JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI e-ISSN: 2614-8811
Published by Departement of Mathematics, Hasanuddin University, Indonesia
https://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk/index
Vol. 19, No. 2, January 2023, pp. 359-373
DOI: 10.20956/j.v19i2.23916

Determining the Inverse of a Vandermonde Matrix Using Partial Fraction Decomposition Method

Menentukan Invers Matriks Vandermonde Menggunakan Metode Dekomposisi Pecahan Parsial

Feby Seru[1]*, Herlina Datu Wetipo[2]*, Tiku Tandiangnga[3]*

[*]Prodi Matematika, FMIPA, Universitas Cenderawasih

E-mail: *febyseru.math@gmail.com[1], herlinawetipo04@gmail.com[2] , tiku.tandiangnga@gmail.com[3]*

Received: 8 November 2022; Accepted: 24 November 2022; Published: 5 January 2023

Abstract

One method that can be used to calculate the inverse of a matrix is the adjoin method. In this method, the process begins by calculating the value of the determinant and adjoin of a matrix. This study discusses a method for calculating the inverse, especially on the Vandermonde matrix using partial fraction decomposition. The advantage of this method is that it can calculate the inverse of a matrix, without the need to calculate the value of the determinant and adjoin of a matrix. The steps taken are to define a rational function and then write it in the form of a partial fraction, then by using a formula to calculate the coefficient of a partial fraction, a formula is derived to calculate the inverse of the Vandermonde matrix. After obtaining the formula for calculating the inverse, then comparing the results of the inverse calculation of the Vandermonde matrix using the partial fraction decomposition method with the adjoin method. The results obtained a formula to calculate the inverse of the Vandermonde matrix, $V^{-1} = W \times A$. Based on the case examples given, it can be concluded that the results of the inverse calculations performed using the partial fraction decomposition method are the same as the results of the calculations performed using the adjoin method. However, the calculations performed using the partial fraction decomposition method are more effective and efficient than using the adjoin method.

Keywords: Vandermonde matrix, partial fraction decomposition, adjoin method, inverse

Abstrak

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menghitung invers matriks adalah metode adjoin. Pada metode ini, prosesnya dimulai dengan menghitung nilai determinan dan adjoin dari suatu matriks. Penelitian ini membahas mengenai suatu metode untuk menghitung invers khususnya pada matriks Vandermonde menggunakan dekomposisi pecahan parsial. Kelebihan metode ini yaitu dapat menghitung invers matriks tanpa perlu menghitung nilai determinan dan adjoin dari suatu matriks. Langkah-langkah yang dilakukan yaitu mendefinisikan fungsi rasional kemudian menuliskannya dalam bentuk pecahan parsial, selanjutnya dengan menggunakan formula untuk menghitung koefisien pecahan parsial, diturunkan suatu formula untuk menghitung invers dari matriks Vandermonde. Setelah diperoleh formula untuk menghitung invers, selanjutnya dibandingkan hasil perhitungan invers matriks Vandermonde menggunakan metode dekomposisi pecahan parsial dengan metode adjoin. Hasil penelitian diperoleh suatu formula untuk menghitung invers matriks Vandermonde, yaitu $\mathrm{V}^{-1} = \mathrm{W} \times \mathrm{A}$. Berdasarkan contoh kasus yang diberikan, dapat disimpulkan bahwa hasil perhitungan invers yang dilakukan dengan metode dekomposisi pecahan parsial sama dengan hasil perhitungan yang dilakukan menggunakan metode adjoin. Akan tetapi, perhitungan yang dilakukan menggunakan metode dekomposisi pecahan parsial lebih efektif dan efisien dibandingkan dengan menggunakan metode adjoin.

Kata kunci: Matriks Vandermonde, Dekomposisi Pecahan Parsial, Metode Adjoin, Invers

1. PENDAHULUAN

Salah satu komponen yang penting dalam aljabar linear adalah matriks. Menurut Anton dan Rorres [1] matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan yang disebut dengan entri. Pada kehidupan sehari-hari matriks sering digunakan dalam berbagai bidang seperti industri, ekonomi, teknik, dan lain sebagainya.

Pada matriks, terdapat operasi-operasi yang dapat digunakan. Operasi-operasi tersebut [1], diantaranya operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian matriks dengan skalar, perkalian matriks dengan matriks, determinan, dan invers. Untuk menghitung invers matriks, dapat digunakan beberapa metode, diantaranya metode Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss Jordan, dan metode adjoin. Kesulitan yang ditemui dalam menghitung invers matriks adalah ketika suatu matriks memiliki ukuran yang besar. Hal ini dikarenakan perhitungan invers matriks sangat bergantung pada ukuran suatu matriks. Semakin besar ukuran matriks, maka semakin tinggi tingkat kesulitannya [9].

Matriks Vandermonde merupakan salah satu jenis matriks yang memiliki peranan penting dalam bidang matematika terapan. Pada bidang statistik misalnya, matriks Vandermonde digunakan untuk mengatasi masalah analisis deret waktu, yaitu untuk menyelesaikan persamaan stein pada proses ARMA [4]. Pada bidang analisis numerik, matriks Vandermonde muncul dalam interpolasi polinomial [3]. Matriks Vandermonde pertama kali diperkenalkan oleh matematikawan Paris yang bernama Alexandre Theophile pada Tahun 1700. Ia merupakan salah satu orang yang pertama menulis tentang sifat dasar dari determinan [8].

Penelitian mengenai invers matriks Vandermonde telah banyak dilakukan oleh beberapa peneliti sebelumnya. Moya-Cessa dan Soto-Equibar [6], melakukan penelitian tentang formula untuk menghitung invers matriks Vandermonde sebagai dekomposisi dalam tiga faktor yaitu matriks diagonal, matriks segitiga atas, dan matriks segitiga bawah. Selanjutnya Oruc [7] menyederhanakan formula ini sebagai dekomposisi dua buah matriks yaitu matriks segitiga atas dan matriks segitiga bawah. Kemudian Man [5] melakukan penelitian yang sama mengenai metode untuk menghitung invers matriks Vandermonde, tetapi menggunakan pendekatan yang berbeda. Man menggunakan dekomposisi pecahan parsial untuk mendapatkan formula invers dari matriks tersebut. Rawashdeh [10] menggunakan metode adjoin untuk menurunkan bentuk umum dari invers matriks Vandermonde.

Berdasarkan uraian di atas, maka peneliti tertarik untuk melakukan penelitian yang sama dengan Man [5] mengenai metode dekomposisi pecahan parsial untuk menghitung invers matriks Vandermonde. Pada penelitian ini akan diuraikan langkah-langkah untuk mendapatkan formula dalam menghitung invers matriks Vandermonde, kemudian membandingkan metode tersebut dengan metode adjoin dalam menghitung invers matriks Vandermonde.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Penelitian ini dimulai dengan mendefinisikan fungsi rasional, kemudian dilanjutkan dengan mencari formula untuk menghitung koefisien pecahan parsial dari suatu fungsi rasional. Berikut merupakan landasan teori yang digunakan:

Definisi 2.1 [5]
Misalkan $\lambda_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ *adalah himpunan bilangan yang berbeda. Matriks Vandermonde berukuran* $n \times n$ *didefinisikan sebagai:*

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ {\lambda_1}^2 & {\lambda_2}^2 & {\lambda_3}^2 & \cdots & {\lambda_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {\lambda_1}^{n-1} & {\lambda_2}^{n-1} & {\lambda_3}^{n-1} & \cdots & {\lambda_n}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Karena $\lambda_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ *memiliki nilai yang berbeda, maka det* $(V) \neq 0$*, sehingga matriks Vandermonde memiliki invers.*

Definisi 2.2 [11]
Fungsi rasional adalah hasil bagi dua fungsi polinomial, fungsi polinomial dapat dipecah menjadi penjumlahan pecahan-pecahan yang lebih sederhana yang disebut pecahan parsial.

Teorema 2.1 [1]
Jika A adalah suatu matriks segitiga $n \times n$ *(segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal), maka* $det(A)$ *adalah hasil kali entri-entri pada diagonal utamanya; yaitu,* $det(A) = a_{11}a_{22} \ldots\ a_{nn}$.

Definisi 2.3 [1]
Jika A adalah suatu matriks persegi, maka minor entri a_{ij} *dinyatakan oleh* M_{ij} *dan didefinisikan sebagai determinan submatriks yang masih tersisa setelah baris ke-i kolom ke-j dihilangkan dari A. Bilangan* $(-1)^{i+j}M_{ij}$ *dinyatakan oleh* C_{ij} *dan disebut kofaktor entri* a_{ij}.

Definisi 2.4 [1]
Jika A adalah sembarang matriks $n \times n$ *dan* C_{ij} *adalah kofaktor dari* a_{ij} *maka matriks*

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \ldots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

disebut matriks kofaktor dari A. Transpos dari matriks ini disebut Adjoin A dan dinyatakan oleh adj(A).

Teorema 2.2 [1]

Ekspansi Kofaktor. Determinan dari matriks A, $n \times n$*, dapat dihitung dengan mengalikan entri-entri pada sebarang baris (atau kolom) dengan kofaktor-kofaktornya dan menjumlahkan hasilkali-hasilkali yang diperoleh; dimana untuk setiap* $1 \leq i \leq n$ *dan* $1 \leq j \leq n$*,*
ekspansi kofaktor sepanjang kolom ke$-j$*:*

$$det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

ekspansi kofaktor sepanjang baris ke$-i$*:*

$$det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

Definisi 2.5 [1]
Jika A adalah matriks persegi dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$*, maka A disebut dapat dibalik (invertible) dan B disebut sebagai invers dari A.*

Teorema 2.3 [1]
Suatu matriks persegi A dapat dibalik jika dan hanya jika $det(A) \neq 0$.

Teorema 2.4 [1]
Invers matriks dengan menggunakan adjoin. Jika A adalah matriks yang dapat dibalik, maka:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A)$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Bagian ini, diuraikan langkah-langkah untuk mendapatkan formula menghitung invers matriks Vandermonde. Diberikan sebuah fungsi rasional seperti pada persamaan berikut:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n}{x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n} \\ &= \frac{b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n}{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_n)} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Persamaan (3.1) dapat dituliskan ke dalam bentuk dekomposisi pecahan parsial sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{k_1}{x-\lambda_1} + \frac{k_2}{x-\lambda_2} + \cdots + \frac{k_n}{x-\lambda_n} \tag{3.2}$$

Menurut Chen dan Leung [2] koefisien k_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ dapat diperoleh menggunakan persamaan berikut:

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ {\lambda_1}^2 & {\lambda_2}^2 & \cdots & {\lambda_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {\lambda_1}^{n-1} & {\lambda_2}^{n-1} & \cdots & {\lambda_n}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Berdasarkan Definisi 2.1, maka Persamaan (3.3) dapat dituliskan sebagai:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{V}^{-1} \times \boldsymbol{A}^{-1} \times \boldsymbol{B} \tag{3.4}$$

Matriks A pada Persamaan (3.3) merupakan matriks segitiga bawah, sehingga menurut Teorema 2.1 maka $\det(A) = 1$ dan berdasarkan Teorema 2.3 matriks A memiliki invers. Invers dari matriks V dan A dapat diperoleh menggunakan metode adjoin.

Menurut Mann [5] koefisien k_i, $i = 1, 2, \dots, n$ pada Persamaan (3.2) dapat diperoleh menggunakan formula berikut:

$$\begin{aligned} k_i &= f(x).(x-\lambda_i)|_{x=\lambda_i} \\ &= \frac{b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \cdots + b_n}{(x-\lambda_1)\,(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_n)}(x-\lambda_i)|_{x=\lambda_i} \\ &= \frac{b_1 {\lambda_i}^{n-1} + b_2 {\lambda_i}^{n-2} + \dots + b_n}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Persamaan (3.5) dapat dituliskan ke dalam bentuk vektor sebagai berikut:

$$k_i = \begin{bmatrix} \frac{{\lambda_i}^{n-1}}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)} & \frac{{\lambda_i}^{n-2}}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)} & \cdots & \frac{1}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i-\lambda_j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Untuk $i = 1$, maka

$$k_1 = \begin{bmatrix} \frac{{\lambda_1}^{n-1}}{\prod_{j\neq 1}(\lambda_1-\lambda_j)} & \frac{{\lambda_1}^{n-2}}{\prod_{j\neq 1}(\lambda_1-\lambda_j)} & \cdots & \frac{1}{\prod_{j\neq 1}(\lambda_1-\lambda_j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Untuk $i = 2$, maka

$$k_2 = \begin{bmatrix} \frac{{\lambda_2}^{n-1}}{\prod_{j\neq 2}(\lambda_2-\lambda_j)} & \frac{{\lambda_2}^{n-2}}{\prod_{j\neq 2}(\lambda_2-\lambda_j)} & \cdots & \frac{1}{\prod_{j\neq 2}(\lambda_2-\lambda_j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

$\vdots$

Untuk $i = n$, maka

$$k_n = \begin{bmatrix} \frac{{\lambda_n}^{n-1}}{\prod_{j\neq n}(\lambda_n-\lambda_j)} & \frac{{\lambda_n}^{n-2}}{\prod_{j\neq n}(\lambda_n-\lambda_j)} & \cdots & \frac{1}{\prod_{j\neq n}(\lambda_n-\lambda_j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

sehingga koefisien pecahan parsial k_i dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{{\lambda_1}^{n-1}}{\prod_{j\neq 1}(\lambda_1-\lambda_j)} & \frac{{\lambda_1}^{n-2}}{\prod_{j\neq 1}(\lambda_1-\lambda_j)} & \cdots & \frac{1}{\prod_{j\neq 1}(\lambda_1-\lambda_j)} \\ \frac{{\lambda_2}^{n-1}}{\prod_{j\neq 2}(\lambda_2-\lambda_j)} & \frac{{\lambda_2}^{n-2}}{\prod_{j\neq 2}(\lambda_2-\lambda_j)} & \cdots & \frac{1}{\prod_{j\neq 2}(\lambda_2-\lambda_j)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{{\lambda_n}^{n-1}}{\prod_{j\neq n}(\lambda_n-\lambda_j)} & \frac{{\lambda_n}^{n-2}}{\prod_{j\neq n}(\lambda_n-\lambda_j)} & \cdots & \frac{1}{\prod_{j\neq n}(\lambda_n-\lambda_j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

atau

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{W} \times \boldsymbol{B} \tag{3.11}$$

dengan:

$$W = \begin{bmatrix} \frac{{\lambda_1}^{n-1}}{\prod_{j\neq 1}(\lambda_1-\lambda_j)} & \frac{{\lambda_1}^{n-2}}{\prod_{j\neq 1}(\lambda_1-\lambda_j)} & \cdots & \frac{1}{\prod_{j\neq 1}(\lambda_1-\lambda_j)} \\ \frac{{\lambda_2}^{n-1}}{\prod_{j\neq 2}(\lambda_2-\lambda_j)} & \frac{{\lambda_2}^{n-2}}{\prod_{j\neq 2}(\lambda_2-\lambda_j)} & \cdots & \frac{1}{\prod_{j\neq 2}(\lambda_2-\lambda_j)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{{\lambda_n}^{n-1}}{\prod_{j\neq n}(\lambda_n-\lambda_j)} & \frac{{\lambda_n}^{n-2}}{\prod_{j\neq n}(\lambda_n-\lambda_j)} & \cdots & \frac{1}{\prod_{j\neq n}(\lambda_n-\lambda_j)} \end{bmatrix} \text{ dan } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Berdasarkan Persamaan (3.4) dan (3.11) diperoleh suatu hubungan yaitu:

$$\boldsymbol{V}^{-1} \times \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{W} \tag{3.13}$$

Dengan mengalikan matriks A pada kedua ruas di Persamaan (3.13) maka diperoleh:

$$\boldsymbol{V}^{-1} = \boldsymbol{W} \times \boldsymbol{A} \tag{3.14}$$

Berdasarkan Persamaan (3.14) maka invers dari matriks Vandermonde dapat diperoleh dari perkalian antara dua buah matriks, yaitu matriks W dan matriks A. Matriks W dapat diperoleh menggunakan Persamaan (3.12) sedangkan formula untuk menghitung matriks A diperoleh sebagai berikut. Perhatikan bahwa matriks A merupakan koefisien fungsi polinomial dari penyebut pada Persamaan (3.1), yang berarti bahwa matriks A hanya bergantung pada penyebut dari fungsi rasional tersebut. Oleh karena itu, fungsi rasional pada Persamaan (3.1) didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n} \\ &= \frac{1}{(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots(x-\lambda_n)} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Perhatikan persamaan berikut:

a. Untuk $n = 2$ maka:

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2) = x^2 - \lambda_2 x - \lambda_1 x + \lambda_1\lambda_2 = x^2 + (-\lambda_1 - \lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2$$

Berdasarkan Persamaan (3.15) diperoleh:

$$a_1 = -\sum_{j=1}^{2} \lambda_j \ dan\ a_2 = \prod_{j=1}^{2} \lambda_j \tag{3.16}$$

b. Untuk $n = 3$ maka:

$$\begin{aligned} (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) &= x^3 - \lambda_2 x^2 - \lambda_1 x^2 + \lambda_1\lambda_2 x - \lambda_3 x^2 + \lambda_2\lambda_3 x \\ &\quad + \lambda_1\lambda_3 x - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\ &= x^3 + (-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3)x^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)x \\ &\quad + (-\lambda_1\lambda_2\lambda_3) \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan (3.15) diperoleh:

$$a_1 = -\sum_{j=1}^{3} \lambda_j, \quad a_2 = \sum_{\substack{j=1,m=2; \\ j\neq m}}^{j=2,m=3} \lambda_j\lambda_m \text{ , } dan\ \ a_3 = -\prod_{j=1}^{3} \lambda_j \tag{3.17}$$

c. Untuk $n = 4$, maka:

$$\begin{aligned} &(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)(x-\lambda_4) \\ &= x^4 - \lambda_2 x^3 - \lambda_1 x^3 + \lambda_1\lambda_2 x^2 - \lambda_2\lambda_3 x^2 + \lambda_1\lambda_3 x^2 - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 x - \lambda_4 x^3 \end{aligned}$$

$$+\lambda_2\lambda_4x^2+\lambda_1\lambda_4x^2-\lambda_1\lambda_2\lambda_4x+\lambda_3\lambda_4x^2-\lambda_2\lambda_3\lambda_4x-\lambda_1\lambda_3\lambda_4x+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$$
$$=x^4+(-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4)x^3+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_4+\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_4)x^2$$
$$+(-\lambda_1\lambda_2\lambda_3-\lambda_1\lambda_2\lambda_4-\lambda_1\lambda_3\lambda_4-\lambda_2\lambda_3\lambda_4)x+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$$

Berdasarkan Persamaan (3.15) diperoleh:

$$a_1=-\sum_{j=1}^{4}\lambda_j\,,\qquad a_2=\sum_{\substack{j=1,m=2;\\ j\neq m}}^{j=3,m=4}\lambda_j\lambda_m\,,\qquad a_3=-\sum_{\substack{j=1,m=2,s=3;\\ j\neq m\neq s}}^{j=2,m=3,s=4}\lambda_j\lambda_m\lambda_s \tag{3.18}$$
$$a_4=\prod_{j=1}^{4}\lambda_j$$

Berdasarkan Persamaan (3.16) sampai (3.18), maka untuk $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$ diperoleh:

$$a_1=-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,,\qquad a_2=\sum_{\substack{j=1,m=2;\\ j\neq m}}^{j=n-1,m=n}\lambda_j\lambda_m\,,\qquad a_3=-\sum_{\substack{j=1,m=2,s=3;\\ j\neq m\neq s}}^{j=n-2,m=n-1,s=n}\lambda_j\lambda_m\lambda_s$$
$$a_4=\sum_{\substack{j=1,m=2,s=3,t=4;\\ j\neq m\neq s\neq t}}^{\substack{j=n-3,m=n-2,\\ s=n-1,t=n}}\lambda_j\lambda_m\lambda_s\lambda_t\quad,\ldots,\qquad a_n=(-1)^n\prod_{j=1}^{n}\lambda_j \tag{3.19}$$

Selanjutnya membuktikan Persamaan (3.19) menggunakan induksi matematika sebagai berikut:

(1) Untuk $n=2$ maka:
$a_1=-\lambda_1-\lambda_2$ dan $a_2=\lambda_1\,\lambda_2$
Pernyataan tersebut benar, sesuai dengan Persamaan (3.16)

(2) Asumsikan pernyataan benar untuk $n=k$ yaitu:

$$a_1=-\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\,,\qquad a_2=\sum_{\substack{j=1,m=2;\\ j\neq m}}^{j=k-1,m=k}\lambda_j\lambda_m\,,\qquad a_3=-\sum_{\substack{j=1,m=2,s=3;\\ j\neq m\neq s}}^{j=k-2,m=k-1,s=k}\lambda_j\lambda_m\lambda_s$$
$$a_4=\sum_{\substack{j=1,m=2,s=3,t=4;\\ j\neq m\neq s\neq t}}^{\substack{j=k-3,m=k-2,\\ s=k-1,t=k}}\lambda_j\lambda_m\lambda_s\lambda_t\quad,\ldots,\qquad a_k=(-1)^k\prod_{j=1}^{k}\lambda_j$$

(3) Akan ditunjukkan bahwa pernyataan juga benar untuk $n=k+1$:
$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)\ldots(x-\lambda_k)(x-\lambda_{k+1})$$
$$=(x^k+a_1x^{k-1}+a_2x^{k-2}+a_3x^{k-3}+a_4x^{k-4}+\cdots+a_k)(x-\lambda_{k+1})$$
$$=x^{k+1}+a_1x^k+a_2x^{k-1}+a_3x^{k-2}+a_4x^{k-3}+\cdots+a_kx-\lambda_{k+1}x^k-a_1\lambda_{k+1}x^{k-1}$$
$$-a_2\lambda_{k+1}x^{k-2}-a_3\lambda_{k+1}x^{k-3}-a_4\lambda_{k+1}x^{k-4}-\cdots-a_k\lambda_{k+1}$$
$$=x^{k+1}+(a_1-\lambda_{k+1})x^k+(a_2-a_1\lambda_{k+1})x^{k-1}+(a_3-a_2\lambda_{k+1})x^{k-2}$$
$$+(a_4-a_3\lambda_{k+1})x^{k-3}+\cdots+a_k\lambda_{k+1}$$

$$= x^{k+1} + \left(-\sum_{j=1}^{k} \lambda_j - \lambda_{k+1} \right) x^k + \left(\sum_{\substack{j=1,m=2;\\ j\neq m}}^{j=k-1,m=k} \lambda_j \lambda_m + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \, \lambda_{k+1} \right) x^{k-1}$$

$$+ \left(- \sum_{\substack{j=1,m=2,s=3;\\ j\neq m\neq s}}^{j=k-2,m=k-1,s=k} \lambda_j \lambda_m \lambda_s - \sum_{\substack{j=1,m=2;\\ j\neq m}}^{j=k-1,m=k} \lambda_j \lambda_m \, \lambda_{k+1} \right) x^{k-2}$$

$$+ \left(\sum_{\substack{j=1,m=2,s=3,t=4;\\ j\neq m\neq s\neq t}}^{\substack{j=k-3,m=k-2,\\ s=k-1,t=k}} \lambda_j \lambda_m \lambda_s \lambda_t + \sum_{\substack{j=1,m=2,s=3;\\ j\neq m\neq s}}^{j=k-2,m=k-1,s=k} \lambda_j \lambda_m \lambda_s \, \lambda_{k+1} \right) x^{k-3} + \cdots$$

$$+ (-1)^{k+1} \prod_{j=1}^{k} \lambda_j \, \lambda_{k+1}$$

$$= x^{k+1} + \left(-\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j \right) x^k + \left(\sum_{\substack{j=1,m=2;\\ j\neq m}}^{j=k,m=k+1} \lambda_j \lambda_m \right) x^{k-1} + \left(- \sum_{\substack{j=1,m=2,s=3;\\ j\neq m\neq s}}^{j=k-1,m=k,s=k+1} \lambda_j \lambda_m \lambda_s \right) x^{k-2}$$

$$+ \left(\sum_{\substack{j=1,m=2,s=3,t=4;\\ j\neq m\neq s\neq t}}^{\substack{j=k-2,m=k-1\\ s=k,t=k+1}} \lambda_j \lambda_m \lambda_s \lambda_t \right) x^{k-3} + \cdots + (-1)^{k+1} \prod_{j=1}^{k+1} \lambda_j$$

Sehingga diperoleh:

$$a_1 = -\sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j \ , \qquad a_2 = \sum_{\substack{j=1,m=2;\\ j\neq m}}^{j=k,m=k+1} \lambda_j \lambda_m \, , \qquad a_3 = -\sum_{\substack{j=1,m=2,s=3;\\ j\neq m\neq s}}^{j=k-1,m=k,s=k+1} \lambda_j \lambda_m \lambda_s \, ,$$

$$a_4 = \sum_{\substack{j=1,m=2,s=3,t=4;\\ j\neq m\neq s\neq t}}^{\substack{j=k-2,m=k-1\\ s=k,t=k+1}} \lambda_j \lambda_m \lambda_s \lambda_t \quad , \ldots , \qquad a_{k+1} = (-1)^{k+1} \prod_{j=1}^{k+1} \lambda_j$$

Jadi terbukti bahwa Persamaan (3.19) berlaku untuk semua n, sehingga entri-entri pada matriks A dapat diperoleh menggunakan persamaan tersebut.

Berikut merupakan contoh kasus untuk menghitung invers matriks Vandermonde berukuran 5×5 menggunakan metode dekomposisi pecahan parsial dan metode adjoin. Diberikan matriks Vandermonde sebagai berikut:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 1 & 8 & 27 & 64 \\ 0 & 1 & 16 & 81 & 256 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Berdasarkan Definisi 2.1, maka diperoleh: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$, $\lambda_4 = 3$, $\lambda_5 = 4$. Untuk menghitung invers matriks Vandermonde menggunakan metode dekomposisi pecahan parsial pada Persamaan (3.14) maka terlebih dahulu dicari matriks W dan matriks A. Entri-entri dari matriks W dapat diperoleh menggunakan Persamaan (3.13) sebagai berikut:

Baris ke-1 $= \left(\frac{{\lambda_1}^{n-1}}{\prod_{j\neq 1} \lambda_1 - \lambda_j} \quad \frac{{\lambda_1}^{n-2}}{\prod_{j\neq 1} \lambda_1 - \lambda_j} \quad \frac{{\lambda_1}^{n-3}}{\prod_{j\neq 1} \lambda_1 - \lambda_j} \quad \frac{{\lambda_1}^{n-4}}{\prod_{j\neq 1} \lambda_1 - \lambda_j} \quad \frac{1}{\prod_{j\neq 1} \lambda_1 - \lambda_j}\right)$

$$= \left(\frac{0^{5-1}}{24} \quad \frac{0^{5-2}}{24} \quad \frac{0^{5-3}}{24} \quad \frac{0^{5-4}}{24} \quad \frac{1}{24}\right)$$
$$= \left(\frac{0^4}{24} \quad \frac{0^3}{24} \quad \frac{0^2}{24} \quad \frac{0}{24} \quad \frac{1}{24}\right)$$
$$= \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{24}\right)$$

dengan:

$$\prod_{j=1, j\neq 1}^{5} \lambda_1 - \lambda_j = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_5)$$
$$= (0-1)(0-2)(0-3)(0-4)$$
$$= (-1)(-2)(-3)(-4)$$
$$= 24$$

Baris ke-2 $= \left(\frac{{\lambda_2}^{n-1}}{\prod_{j\neq 2} \lambda_2 - \lambda_j} \quad \frac{{\lambda_2}^{n-2}}{\prod_{j\neq 2} \lambda_2 - \lambda_j} \quad \frac{{\lambda_2}^{n-3}}{\prod_{j\neq 2} \lambda_2 - \lambda_j} \quad \frac{{\lambda_2}^{n-4}}{\prod_{j\neq 2} \lambda_2 - \lambda_j} \quad \frac{1}{\prod_{j\neq 2} \lambda_2 - \lambda_j}\right)$

$$= \left(\frac{1^{5-1}}{-6} \quad \frac{1^{5-2}}{-6} \quad \frac{1^{5-3}}{-6} \quad \frac{1^{5-4}}{-6} \quad \frac{1}{-6}\right)$$
$$= \left(\frac{1^4}{-6} \quad \frac{1^3}{-6} \quad \frac{1^2}{-6} \quad \frac{1}{-6} \quad \frac{1}{-6}\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{6} \quad -\frac{1}{6} \quad -\frac{1}{6} \quad -\frac{1}{6} \quad -\frac{1}{6}\right)$$

dengan:

$$\prod_{j=1, j\neq 2}^{5} \lambda_2 - \lambda_j = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_5)$$
$$= (1-0)(1-2)(1-3)(1-4)$$
$$= (1)(-1)(-2)(-3) = -6$$

Baris ke-3 $= \left(\frac{{\lambda_3}^{n-1}}{\prod_{j\neq 3} \lambda_3 - \lambda_j} \quad \frac{{\lambda_3}^{n-2}}{\prod_{j\neq 3} \lambda_3 - \lambda_j} \quad \frac{{\lambda_3}^{n-3}}{\prod_{j\neq 3} \lambda_3 - \lambda_j} \quad \frac{{\lambda_3}^{n-4}}{\prod_{j\neq 3} \lambda_3 - \lambda_j} \quad \frac{1}{\prod_{j\neq 3} \lambda_3 - \lambda_j}\right)$

$$= \left(\frac{2^{5-1}}{4} \quad \frac{2^{5-2}}{4} \quad \frac{2^{5-3}}{4} \quad \frac{2^{5-4}}{4} \quad \frac{1}{4}\right)$$
$$= \left(\frac{2^4}{4} \quad \frac{2^3}{4} \quad \frac{2^2}{4} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{1}{4}\right)$$
$$= \left(\frac{16}{4} \quad \frac{8}{4} \quad \frac{4}{4} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{1}{4}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

dengan:

$$\prod_{j=1, j\neq 3}^{5} \lambda_3 - \lambda_j = (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_5)$$
$$= (2-0)(2-1)(2-3)(2-4)$$
$$= (2)(1)(-1)(-2) = 4$$

Baris ke-4 $= \begin{pmatrix} \frac{{\lambda_4}^{n-1}}{\prod_{j\neq 4} \lambda_4 - \lambda_j} & \frac{{\lambda_4}^{n-2}}{\prod_{j\neq 4} \lambda_4 - \lambda_j} & \frac{{\lambda_4}^{n-3}}{\prod_{j\neq 4} \lambda_4 - \lambda_j} & \frac{{\lambda_4}^{n-4}}{\prod_{j\neq 4} \lambda_4 - \lambda_j} & \frac{1}{\prod_{j\neq 4} \lambda_4 - \lambda_j} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3^{5-1}}{-6} & \frac{3^{5-2}}{-6} & \frac{3^{5-3}}{-6} & \frac{3^{5-4}}{-6} & \frac{1}{-6} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{3^4}{-6} & \frac{3^3}{-6} & \frac{3^2}{-6} & \frac{3}{-6} & \frac{1}{-6} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{81}{6} & -\frac{27}{6} & -\frac{9}{6} & -\frac{3}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\frac{27}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

dengan:

$$\prod_{j=1, j\neq 4}^{5} \lambda_4 - \lambda_j = (\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_5)$$
$$= (3-0)(3-1)(3-2)(3-4)$$
$$= (3)(2)(1)(-1)$$
$$= -6$$

Baris ke-5 $= \begin{pmatrix} \frac{{\lambda_5}^{n-1}}{\prod_{j\neq 5} \lambda_5 - \lambda_j} & \frac{{\lambda_5}^{n-2}}{\prod_{j\neq 5} \lambda_5 - \lambda_j} & \frac{{\lambda_5}^{n-3}}{\prod_{j\neq 5} \lambda_5 - \lambda_j} & \frac{{\lambda_5}^{n-4}}{\prod_{j\neq 5} \lambda_5 - \lambda_j} & \frac{1}{\prod_{j\neq 5} \lambda_5 - \lambda_j} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4^{5-1}}{24} & \frac{4^{5-2}}{24} & \frac{4^{5-3}}{24} & \frac{4^{5-4}}{24} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{4^4}{24} & \frac{4^3}{24} & \frac{4^2}{24} & \frac{4}{24} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{256}{24} & \frac{64}{24} & \frac{16}{24} & \frac{4}{24} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{32}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{pmatrix}$$

dengan:

$$\prod_{j=1, j\neq 5}^{5} \lambda_5 - \lambda_j = (\lambda_5 - \lambda_1)(\lambda_5 - \lambda_2)(\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_4)$$
$$= (4-0)(4-1)(4-2)(4-3)$$
$$= (4)(3)(2)(1)$$
$$= 24$$

Sehingga diperoleh matriks W sebagai berikut:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 4 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{27}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ \frac{32}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya mencari matriks A dengan menghitung nilai a_1, a_2, a_3, a_4 menggunakan Persamaan (3.19) sebagai berikut:

$$a_1 = -\sum_{j=1}^{5} \lambda_j = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) = -(0 + 1 + 2 + 3 + 4) = -10$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \sum_{\substack{j=1,m=2, \\ j \neq m}}^{j=4,m=5} \lambda_j \lambda_m \\ &= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_1\lambda_5 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_2\lambda_5 + \lambda_3\lambda_4 + \lambda_3\lambda_5 + \lambda_4\lambda_5 \\ &= (0)(1) + (0)(2) + (0)(3) + (0)(4) + (1)(2) + (1)(3) + (1)(4) + (2)(3) \\ &\quad +(2)(4) + (3)(4) \\ &= 2 + 3 + 4 + 6 + 8 + 12 = 35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 &= -\sum_{\substack{j=1,m=2,s=3; \\ j \neq m \neq s}}^{j=3,m=4,s=5} \lambda_j \lambda_m \lambda_s \\ &= -(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2\lambda_5 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_5 + \lambda_1\lambda_4\lambda_5 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4 \\ &\quad +\lambda_2\lambda_3\lambda_5 + \lambda_2\lambda_4\lambda_5 + \lambda_3\lambda_4\lambda_5) \\ &= -(0)(1)(2) + (0)(1)(3) + (0)(1)(4) + (0)(2)(3) + (0)(2)(4) \\ &\quad +(0)(3)(4) + (1)(2)(3) + (1)(2)(4) + (1)(3)(4) + (2)(3)(4) \\ &= -(6 + 8 + 12 + 24) = -50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= \sum_{\substack{j=1,m=2,s=3,t=4; \\ j \neq m \neq s \neq t}}^{j=2,m=3,s=4,t=5} \lambda_j \lambda_m \lambda_s \lambda_t \\ &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4\lambda_5 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5 \\ &= (0)(1)(2)(3) + (0)(2)(3)(4) + (1)(2)(3)(4) = 24 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh matriks A sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 35 & -10 & 1 & 0 & 0 \\ -50 & 35 & -10 & 1 & 0 \\ 24 & -50 & 35 & -10 & 1 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan Persamaan (3.14) maka diperoleh invers dari matriks Vandermonde sebagai berikut:

$$V^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{24}\\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\\ 4 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ -\frac{27}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6}\\ \frac{32}{3} & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -10 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 35 & -10 & 1 & 0 & 0\\ -50 & 35 & -10 & 1 & 0\\ 24 & -50 & 35 & -10 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -\frac{25}{12} & \frac{35}{24} & -\frac{5}{12} & \frac{1}{24}\\ 0 & 4 & -\frac{13}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{6}\\ 0 & -3 & \frac{19}{4} & -2 & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{7}{6} & -\frac{1}{6}\\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{11}{24} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{24}\end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Selanjutnya membuktikan bahwa Persamaan (3.21) merupakan invers dari matriks pada Persamaan (3.20) sebagai berikut:

$$V\times V^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16\\ 0 & 1 & 8 & 27 & 64\\ 0 & 1 & 16 & 81 & 256\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\frac{25}{12} & \frac{35}{24} & -\frac{5}{12} & \frac{1}{24}\\ 0 & 4 & -\frac{13}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{6}\\ 0 & -3 & \frac{19}{4} & -2 & \frac{1}{4}\\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{7}{6} & -\frac{1}{6}\\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{11}{24} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{24}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Karena $V\times V^{-1}=I$ maka berdasarkan Definisi 2.5 terbukti bahwa Persamaan (3.21) merupakan invers dari matriks Vandermonde.

Selanjutnya menghitung invers matriks Vandermonde pada Persamaan (3.20) menggunakan metode adjoin. Langkah pertama adalah menghitung determinan matriks V menggunakan metode ekspansi kofaktor sepanjang kolom pertama.

$$\det(V)=1\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 9 & 16\\ 1 & 8 & 27 & 64\\ 1 & 16 & 81 & 256\end{vmatrix}$$

$$=1\begin{vmatrix}4 & 9 & 16\\ 8 & 27 & 64\\ 16 & 81 & 256\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 8 & 27 & 64\\ 16 & 81 & 256\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 4 & 9 & 16\\ 16 & 81 & 256\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 4 & 9 & 16\\ 8 & 27 & 64\end{vmatrix}$$

$$=1152-1248+432-48=288$$

Selanjutnya menghitung minor dan kofaktor dari matriks V sebagai berikut:

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI
Feby Seru, Herlina Datu Wetipo, Tiku Tandiangnga

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 8 & 27 & 64 \\ 16 & 81 & 256 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 8 & 27 & 64 \\ 16 & 81 & 256 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \\ 16 & 81 & 256 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \\ 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$$

$$= 288$$

$C_{11} = (-1)^2(288) = 288$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 8 & 27 & 64 \\ 0 & 16 & 81 & 256 \end{vmatrix}$$

$$= 0\begin{vmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 8 & 27 & 64 \\ 16 & 81 & 256 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 8 & 27 & 64 \\ 16 & 81 & 256 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \\ 16 & 81 & 256 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \\ 8 & 27 & 64 \end{vmatrix} = 0$$

$C_{12} = (-1)^3(0) = 0$

dengan cara yang sama diperoleh:

$C_{13} = C_{14} = C_{15} = 0$

$C_{21} = -600, C_{22} = 1152, C_{23} = -864, C_{24} = 384\ , C_{25} = -72$

$C_{31} = 420, C_{32} = -1248, C_{33} = 1368, C_{34} = -672, C_{35} = 132$

$C_{41} = -120, C_{42} = 432, C_{43} = -576, C_{44} = 336, C_{45} = -72$

$C_{51} = 12, C_{52} = -48, C_{53} = 72, C_{54} = -48, C_{55} = 12$

Sehingga diperoleh matriks kofaktornya adalah

$$C = \begin{bmatrix} 288 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -200 & 1152 & -864 & 384 & -72 \\ 420 & -1248 & 1368 & -672 & 132 \\ -120 & 432 & -576 & 336 & -72 \\ 12 & -48 & 72 & -48 & 12 \end{bmatrix}$$

dan matriks adjoinnya adalah

$$adj(V) = \begin{bmatrix} 288 & -1536 & 420 & -120 & 12 \\ 0 & 1152 & -1248 & 432 & -48 \\ 0 & -864 & 1368 & -576 & 72 \\ 0 & 384 & -672 & 336 & -48 \\ 0 & -72 & 132 & -72 & 12 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya menghitung invers matriks menggunakan Teorema 2.4 yaitu:

$$V^{-1} = \frac{1}{288}\begin{bmatrix} 288 & -200 & 420 & -120 & 12 \\ 0 & 1152 & -1248 & 432 & -48 \\ 0 & -864 & 1368 & -576 & 72 \\ 0 & 384 & -672 & 336 & -48 \\ 0 & -72 & 132 & -72 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\frac{25}{12} & \frac{35}{24} & -\frac{5}{12} & \frac{1}{24} \\ 0 & 4 & -\frac{13}{3} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -3 & \frac{19}{4} & -2 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{7}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{11}{24} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{24} \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

Invers pada Persamaan (3.21) sama dengan invers pada Persamaan (3.22) sehingga dapat disimpulkan bahwa hasil invers menggunakan metode dekomposisi pecahan parsial sama dengan invers yang diperoleh menggunakan metode adjoin.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Invers matriks Vandermonde dapat diperoleh dari perkalian antara dua buah matriks yaitu:
$$V^{-1} = W \times A$$
dengan matriks W dan A seperti pada Persamaan (3.12) dan (3.19).
2. Hasil perhitungan invers yang dilakukan dengan metode dekomposisi pecahan parsial sama dengan hasil perhitungan yang dilakukan menggunakan metode adjoin. Akan tetapi, perhitungan yang dilakukan menggunakan metode dekomposisi pecahan parsial lebih efektif dan efisien dibandingkan dengan menggunakan metode adjoin.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H., & Rorres, C., 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi Jilid 1, Edisi 8*. Erlangga, Jakarta.

[2] Chen, C. F.& Leung, K. K., 1981. A new look at partial fraction expansion from a high-level language viewpoint. *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 7, No. 5, 361–367.

[3] Eisinberg, A., & Fedele,G., 2006. On The Inversion of The Vandermonde Matrix. *Applied Mathematics and Computation.* Vol. 174, No. 2, 1384–1397.

[4] Klein, A. & Spreij, P., 2003. Some Results on Vandermonde Matrices with an Application to Time Series Analysis. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 25, No. 1, 213–223.

[5] Man, Y. K., 2015. On The Inversion of Vandermonde Matrix Via Partial Fraction Decomposotion. *IAENG Transaction on Engineering Science*s, 57–66.

[6] Moya-Cessa, H. & Soto-Eguibar, F., 2011. Inverse of the Vandermonde and Vandermonde Confluent Matrices. *Applied Mathematics and Information Sciences*, Vol. 5, No. 3, 361–366.

[7] Oruç, H., 2007. L U Factorization of the Vandermonde Matrix and its Applications. *Applied Mathematics Letters*, Vol. 20, No. 9, 982–987.

[8] Purnamayanti, Thresye, Hijrianti, N.,. 2012. Formula Binet Dan Jumlah n Suku Pertama Pada Generalisasi Fibonacci Dengan Metode Matriks. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan*, Vol. 6, No. 1, 38–46.

[9] Putra, M. E. K. & Aryani,F., 2017. Invers Matriks Positif Menggunakan Metode Adjoin. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*. Vol. 3, No. 1, 45–52.

[10] Rawashdeh, E. A., 2019. A Simple Method for Finding The Inverse Matrix of Vandermonde Matrix. *Matematiˇcki Vesnik*, Vol. 3, No. 71, 207–213.
[11] Varberg, D., Purcell,E.J., Rigdon, D. E., 2011. *Kalkulus Jilid 2*. Erlangga, Jakarta.