

## MacCormack method for solving one-dimensional bed-load sediment transport model

### Metode MacCormack untuk menyelesaikan model transpor sedimen permukaan dasar satu dimensi

Irfan Said<sup>1\*</sup>, Agustinus Ribal<sup>2\*</sup>, Khaeruddin<sup>3\*</sup>

*\*Program Studi Magister Matematika, FMIPA-UNHAS*

Email : [irfansaid272@gmail.com](mailto:irfansaid272@gmail.com)<sup>1</sup>, [agus.ribal@gmail.com](mailto:agus.ribal@gmail.com)<sup>2</sup>, [khaeruddin@gmail.com](mailto:khaeruddin@gmail.com)<sup>3</sup>

Received: 24 November 2022; Accepted: 22 December 2022; Published: 5 January 2023

#### Abstract

In this work, we investigate the numerical solution of one-dimensional bed-load sediment transport model using two steps finite difference method which so-called MacCormack method. Bed-load sediment transport model is composed by the shallow water equation and Exner equation. The Meyer-Peter and Muller (MPM) formula and Wu formula will be used to determine the Grass factor of the bed-load sediment transport. These governing equations will be discretized into predictor and corrector steps of the MacCormack method. The numerical results of the MacCormack method will be validated with an analytical solution of the bed-load sediment transport model. In addition, the MacCormack solution will also be compared with experimental solutions and another numerical method solutions that have existed previously. The numerical results based on MacCormack method give excellent results in which the numerical and the analytical results are hardly differentiated with RMSE of around 00042 *m* or 4,2 *mm*.

**Keywords** : Bed-load sediment transport model, Shallow water equation, Exner equation; MacCormack Method

#### Abstrak

Penelitian ini menyelidiki solusi numerik model transpor sedimen permukaan dasar menggunakan metode beda hingga dua step yang disebut metode MacCormack. Model transpor sedimen permukaan dasar dibangun atas persamaan air dangkal dan persamaan Exner. Formula Meyer-Peter dan Muller (MPM) dan formula wu akan digunakan untuk menentukan faktor Grass dari transpor sedimen permukaan dasar. Persamaan pembangun ini didiskritisasi kedalam step prediktor dan korektor dari metode MacCormack. Hasil numerik metode MacCormack akan divalidasi dengan sebuah solusi analitik dari model transpor sedimen permukaan dasar. Selain itu, solusi metode MacCormack juga akan dibandingkan dengan solusi-solusi eksperimen dan solusi-solusi metode numerik yang telah ada sebelumnya. Hasil numerik berdasarkan metode MacCormack memberikan hasil yang sangat baik dimana hasil numerik dan hasil analitik hampir tidak dapat dibedakan dengan RMSE sekitar 0,0042 *m* atau 4,2 *mm*.

**Kata kunci** : Model transpor sedimen permukaan dasar, Persamaan air dangkal, Persamaan Exner, Metode MacCormack



## 1. Pendahuluan

Transpor sedimen merupakan salah satu fenomena alam yang sangat kompleks. Sedimen dapat didefinisikan sebagai material terfragmentasi dari batuan yang terbentuk dari proses fisika atau proses kimia. Proses transportasi sedimen disebabkan oleh efek gaya gravitasi serta oleh efek gesekan dengan udara atau aliran yang mengandung sedimen [2].

Klasifikasi transpor sedimen di dalam sungai biasanya terbagi ke dalam dua bentuk fenomena yang berbeda: transpor sedimen dasar (*bed-load*) dan transpor sedimen suspensi (*suspended load*). Transpor sedimen dasar (*bed-load*) merupakan gerakan butiran sedimen pada permukaan dasar. Butiran sedimen tersebut bergerak dengan cara bergeser, berguling, atau melompat di atas permukaan dasar. Transpor sedimen suspensi merupakan butiran sedimen yang bergerak didalam aliran. Proses transpor sedimen ini umumnya terjadi pada lingkungan yang memiliki aliran permukaan seperti sungai, pantai dan muara [17].

Transpor sedimen permukaan dasar umumnya terdiri oleh pasangan komponen hidrodinamik dan morfodinamik. Komponen hidrodinamik dimodelkan oleh persamaan air dangkal, dimana model ini digunakan untuk mempelajari pergerakan aliran di sungai, saluran air, area pantai, dan sebagainya. Komponen morfodinamik dimodelkan dengan persamaan Exner yang menggambarkan konservasi massa antara sedimen pada dasar permukaan dengan sedimen yang berpindah [17].

Hudson dan Sweby [7] menginvestigasi solusi numerik persamaan-persamaan pembangun transpor sedimen permukaan dasar menggunakan metode volume hingga skema Roe. Hasil-hasil solusi numerik dari berbagai variasi formula volume hingga dibandingkan dengan sebuah solusi pendekatan yang dibangun. Solusi pendekatan tersebut valid dengan asumsi bahwa antara aliran air dan sedimen permukaan dasar memiliki tingkat interaksi yang lemah.

Dengan metode yang serupa namun untuk masalah satu dimensi, Diaz, dkk. [2] juga melakukan pendekatan numerik transpor sedimen permukaan dasar satu dimensi (yang selanjutnya akan ditulis 1D) yang dipengaruhi oleh aliran air. Hasil-hasil skema metode volume hingga berorde tinggi kemudian dibandingkan dengan solusi analitik maupun dengan data-data eksperimen yang telah dilakukan oleh penelitian-penelitian sebelumnya. Demikian juga, Zhang dan Duan [18] menggunakan persamaan air dangkal yang dimodifikasi dan persamaan Exner sebagai persamaan pembangun model transpor sedimen permukaan dasar. Dalam penelitiannya, mereka menggunakan persamaan van Rijn sebagai formula untuk menghitung laju transpor sedimen. Hasil dari skema numerik dibandingkan dengan solusi analitik maupun dengan data hasil observasi. Kedua penelitian diatas menunjukkan bahwa skema numerik berorde tinggi cenderung memberikan akurasi yang lebih baik.

Sebuah solusi analitik diajukan oleh Berthon, dkk. [1] untuk model persamaan transpor sedimen permukaan dasar 1D dalam sistem persamaan air dangkal. Solusi ini valid untuk digunakan pada beberapa model erosi seperti model Grass maupun model Meyer-Peter dan Muller (MPM). Solusi ini dibangun dengan mengasumsikan laju dari aliran pada sistem persamaan air dangkal berada dalam keadaan tunak (*steady*).

Kebanyakan penelitian-penelitian transpor sedimen dalam beberapa tahun terakhir masih terbatas pada bentuk persamaan 1D. Hal yang membedakan diantara penelitian-penelitian tersebut adalah skema dan modifikasi numerik volume hingga yang digunakan berbeda-beda. Gunawan dan Lhebrard [5], misalnya, menggunakan skema numerik yang disebut dengan skema relaksasi hidrostatik. Skema volume hingga ini memberikan rekonstruksi hidrostatik dari pemecah relaksasi. Sementara itu, Liu dan Beljadid [9] menyelesaikan pasangan persamaan transpor sedimen dengan metode volume hingga skema tipe Godunov central-upwind. Skema tersebut dibangun dalam grid segitiga tidak terstruktur dengan akurasi orde kedua. Dua skema numerik volume hingga juga diusulkan oleh Martinez-Aranda, dkk. berdasarkan pada pemecah Roe dan pemecah Roe yang

ditambahkan dengan akurasi orde pertama dalam ruang dan waktu [12][13]. Selain itu, Erami & Firoozjaee [3] menggunakan skema elemen hingga metode *discrete least squares meshless* (DLSM) dan Firoozjaee & Sahebdel [4] menggunakan metode *Element-free Galerkin* dalam menyelesaikan model transpor sedimen permukaan dasar 1D.

Kebanyakan penelitian-penelitian sebelumnya menggunakan metode volume hingga dalam menyelesaikan model transpor sedimen 1D. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan difokuskan pada penyelesaian secara numerik menggunakan pendekatan beda hingga metode MacCormack, kemudian membandingkannya dengan hasil eksperimen maupun hasil numerik penelitian sebelumnya. Metode MacCormack dipilih karena metode ini merupakan metode beda hingga eksplisit dengan akurasi orde kedua dalam ruang dan waktu [10]. Metode MacCormack dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan nonlinear hiperbolik 1D dan memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan dengan metode-metode beda hingga eksplisit lainnya [6]. Selain itu, Metode MacCormack mampu untuk memberikan akurasi yang lebih baik dibandingkan metode upwind dalam persoalan gelombang pecah yang dibangun dari persamaan air dangkal 1D [15] serta juga mampu memberikan hasil numerik yang akurat dalam fenomena bendungan runtuh 1D [11].

Berdasarkan uraian-uraian tersebut diatas, penelitian ini menyelidiki solusi numerik persamaan transpor sedimen permukaan dasar dengan menggunakan metode MacCormack. Solusi numerik yang diperoleh akan divalidasi dengan solusi analitik dan solusi eksperimen yang telah diperoleh pada penelitian-penelitian sebelumnya, untuk mengetahui tingkat akurasi metode yang digunakan.

## 2. Persamaan Pembangun

Persamaan transpor sedimen satu dimensi terdiri dari persamaan air dangkal dan persamaan Exner. Persamaan air dangkal diturunkan dari persamaan Navier-Stokes yang terdiri dari persamaan konservasi massa dan persamaan konservasi momentum [14]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(h) + \frac{\partial}{\partial x}(hu) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(hu) + \frac{\partial}{\partial x}\left(hu^2 + \frac{gh^2}{2}\right) &= -gh \frac{\partial Z_b}{\partial x} - \frac{\tau_x}{\rho_w} \end{aligned} \quad (1)$$

dengan  $h$  adalah kedalaman aliran ( $m$ ),  $u$  adalah komponen kecepatan arah  $x$  ( $m/s$ ),  $g$  adalah percepatan gravitasi ( $m/s^2$ ),  $Z_b$  adalah ketinggian permukaan dasar ( $m$ ),  $\tau_x$  adalah tegangan geser sepanjang  $x$  ( $kg/ms^2$ ), dan  $\rho_w$  adalah kepadatan fluida ( $kg/m^3$ ).

Persamaan Exner berupa persamaan konservasi massa untuk transpor sedimen permukaan dasar:

$$\frac{\partial Z_b}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(q_{b,x}) = 0 \quad (2)$$

dengan  $q_{b,x}$  merupakan laju volume permukaan dasar sepanjang  $x$ , ( $m^2/s$ ). Laju permukaan dasar dapat diekspresikan sebagai [14]:

$$q_{b,x} = \frac{1}{1-\varepsilon} G_p |u|^2 u \quad (3)$$

Variabel  $\varepsilon$  adalah porositas dari permukaan dasar. Sementara  $G_p$  merupakan faktor Grass untuk menghitung interaksi antara aliran dan sedimen ke- $p$  dalam lapisan permukaan dasar.

Untuk komponen tegangan geser  $\tau$  dapat diekspresikan dengan:

$$\tau_x = \rho_w gh C_f |u| u \quad (4)$$

dengan  $C_f = n^2 h^{-4/3}$  sebagai koefisien gesekan, dan  $n$  adalah koefisien kekasaran manning.

### 3. Formula Empiris Laju Transpor Permukaan Dasar

Faktor Grass  $G_p$  dihitung menggunakan model yang diusulkan oleh [14]. Oleh karena  $G_p$  tidak seragam dalam ruang dan dapat diekspresikan dalam sebuah fungsi dari kedalaman  $h$ , perisai tegangan tak berdimensi  $\theta_p$ , dan ketebalan lapisan transpor  $\eta_p$  sedimen kelas ke- $p$ :

$$G_p = \Gamma_1(h)\Gamma_2(\theta_p)\Gamma_3(\eta_p) \quad (5)$$

Ekpresi dari fungsi  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ , dan  $\Gamma_3$  dapat dilihat pada Tabel 1.

Pada Tabel 1,  $d_p$  merupakan diameter bulir untuk sedimen kelas ke- $p$ ,  $s = \rho_p/\rho_w$  adalah rasio antara  $\rho_p$  kepadatan bulir sedimen dan  $\rho_w$  kepadatan fluida.  $n_p$  merupakan koefisien kekasaran manning yang dihitung dengan  $n_p = d_p^{1/6}/21,1$ ,  $k_d$  dan  $k_c$  adalah konstanta perubahan deposisi dan erosi.  $\theta_c$  adalah ambang batas perisai tegangan, dan  $\Delta\theta_p$  merupakan selisih perisai tegangan untuk sedimen kelas ke- $p$ , yang dihitung dengan [14]:

$$\Delta\theta_p = \begin{cases} \theta_p - \theta_c & \text{jika } \theta_p > \theta_c \\ 0 & \text{lainnya} \end{cases} \quad (6)$$

**Tabel 1.** Faktor interaksi Grass  $G_p$  untuk formula laju transpor sedimen [14].

formula	$\Gamma_1$	$\Gamma_2$	$\Gamma_3$	$\theta_c$
Meyer-Peter & Muller (MPM)	$\frac{n_p^3 \sqrt{g}}{(s-1)\sqrt{h}}$	$\frac{8\sqrt{\Delta\theta_p}}{\theta_p^{3/2}}$	$\frac{sk_d \eta_p}{k_c d_p}$	0,047
Wu	$\frac{(n_p^3 n)^{3/4} \sqrt{g}}{(s-1)\sqrt{h}}$	$\frac{0,0053\sqrt{\Delta\theta_p}}{\theta_c^{2,2} \theta_p^{3/2}}$	$\frac{sk_d \eta_p}{k_c d_p}$	0,030

Disini  $\theta_p$  dihitung dengan menggunakan keseimbangan antara kekuatan tegangan turbulen oleh aliran pada bulir sedimen di atas permukaan dasar dan kekuatan gravitasi:

$$\theta_p = \frac{n_p^2 |u|^2}{(s-1)d_p h^{1/3}} \quad (7)$$

Ketebalan lapisan transpor  $\eta_p$  untuk sedimen kelas ke- $p$  diperkirakan dengan:

$$\eta_p = \frac{k_e}{sk_d} \Delta\theta_p d_p \quad (8)$$

### 4. Metode MacCormack

Metode MacCormack merupakan metode beda hingga eksplisit dengan akurasi orde kedua dalam ruang dan waktu. Metode ini merupakan pendekatan beda hingga dua langkah berupa prediktor dan korektor. Step korektor menggunakan pendekatan beda maju, sedangkan step korektor menggunakan pendekatan beda mundur [10]. Diskritisasi step prediktor untuk persamaan (1) - (2) adalah sebagai berikut:

$$h_i^* = h_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (q_{i+1}^n - q_i^n) \quad (9)$$

$$q_i^* = q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left( qu + \frac{gh^2}{2} \right)_{i+1}^n - \left( qu + \frac{gh^2}{2} \right)_i^n \right] - \frac{\Delta t}{\Delta x} gh_i^n [Z_{b_{i+1}}^n - Z_{b_i}^n]$$

Irfan Said, Agustinus Ribal, Khaeruddin

$$Z_{b_i}^* = Z_{b_i}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} r \left[ (G_p u^3)_{i+1}^n - (G_p u^3)_i^n \right]$$

Sementara diskritisasi step korektor adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} h_i^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[ h_i^n + h_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} (q_i^* - q_{i-1}^*) \right] \\ q_i^{n+1} &= \frac{1}{2} \left( q_i^n + q_i^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \left( qu + \frac{gh^2}{2} \right)_i^* - \left( qu + \frac{gh^2}{2} \right)_{i-1}^* \right] - \frac{\Delta t}{\Delta x} gh_i^* [Z_{b_i}^* - Z_{b_{i-1}}^*] \right) \\ &\quad - (ghC_f u^2)_i^n \\ Z_{b_i}^{n+1} &= \frac{1}{2} \left[ Z_{b_i}^n + Z_{b_i}^* - \frac{\Delta t}{\Delta x} r \left[ (G_p u^3)_i^* - (G_p u^3)_{i-1}^* \right] \right] \end{aligned} \quad (10)$$

dengan  $q = hu$  dan  $r = 1/(1 - \varepsilon)$ .

Dalam banyak kasus, solusi yang diperoleh masih terdapat dispersi numerik yang membuat solusi menjadi kurang akurat. Dispersi numerik ini ditandai dengan adanya osilasi pada solusi. Cara sederhana untuk mengurangi osilasi pada solusi adalah dengan menambahkan bentuk *damping* orde dua [6]. Bentuk *damping* ini berupa  $\psi h_{xx}$ ,  $\omega q_{xx}$ , dan  $\zeta Z_{b_{xx}}$  ditambahkan masing-masing pada persamaan kontinuitas, persamaan momentum, dan persamaan konservasi massa permukaan dasar. Dengan memperhatikan diskritisasi waktu, bentuk *damping* ini didiskritisasi beda tengah, sehingga diperoleh [11]:

$$\begin{aligned} &\frac{\psi \Delta t}{\Delta x^2} [h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n] \\ &\frac{\omega \Delta t}{\Delta x^2} [q_{i+1}^n - 2q_i^n + q_{i-1}^n] \\ &\frac{\zeta \Delta t}{\Delta x^2} [Z_{b_{i+1}}^n - 2Z_{b_i}^n + Z_{b_{i-1}}^n] \end{aligned} \quad (11)$$

Persamaan (11) ditambahkan pada bagian kanan persamaan (10). Nilai  $\psi$ ,  $\omega$  dan  $\zeta$  bisa saja berubah tergantung dengan kondisi masalah yang dimiliki.

## 5. Hasil dan Pembahasan

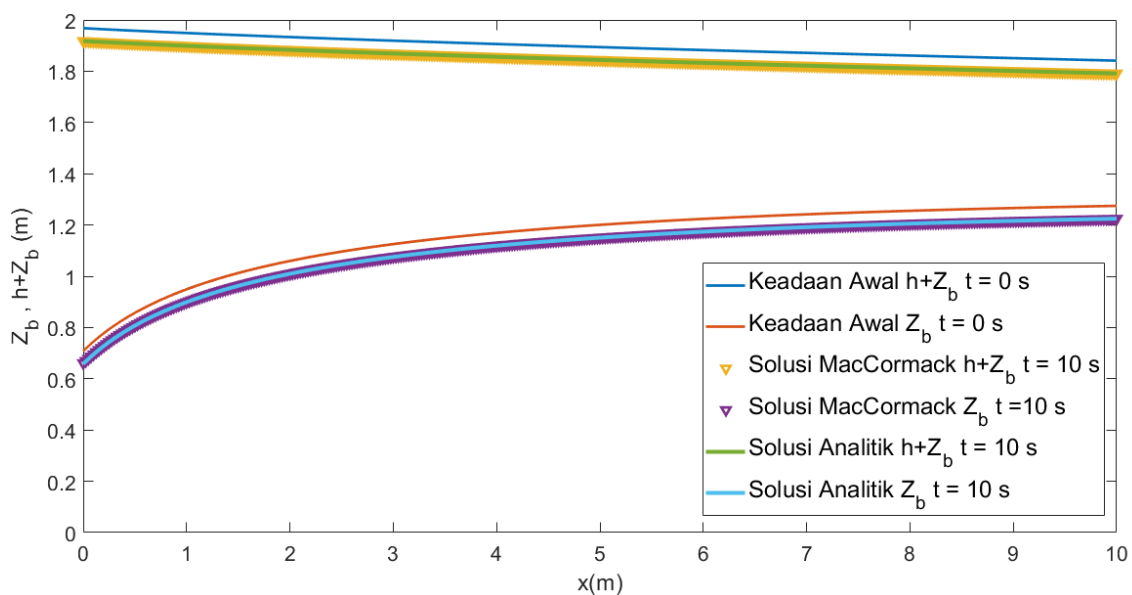
### 5.1. Kasus Dengan Solusi Analitik

Sebuah solusi analitik untuk model transpor sedimen satu dimensi diusulkan oleh [1]. Diasumsikan bahwa laju aliran bersifat  $q = hu$  bernilai konstan sepanjang domain dan tidak ada gesekan pada permukaan dasar, serta laju permukaan dasar  $q_b = A_g u^2 u$  dengan  $A_g = \frac{1}{1-\varepsilon} G_p =$  konstan. Solusi analitik untuk model transpor sedimen 1 dimensi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u &= \left( \frac{\alpha x + \beta}{A_g} \right)^{\frac{2}{3}} \\ h &= \frac{q}{u} \\ z_b^0 &\equiv z_b(t=0) = \gamma - \left( \frac{u^3 + 2gq}{2gu} \right) \\ z_b(t) &= z_b^0 - at \end{aligned} \quad (12)$$

dengan  $\alpha$ ,  $\beta$ , dan  $\gamma$  merupakan parameter konstan,  $g$  sebagai percepatan gravitasi dan  $z_b^0$  sebagai kondisi awal permukaan dasar. Untuk kasus ini dipilih  $\alpha = \beta = 0,005$ ,  $\gamma = 2$ ,  $q = 1 \text{ m}^2/\text{s}$ , dan  $A_g = 0,01 \text{ s}^2/\text{m}$ , dengan domain  $x = [0,10] \text{ m}$  [14]. Perbandingan solusi analitik dengan solusi MacCormack untuk ketinggian permukaan atas  $h + Z_b$  dan ketinggian permukaan dasar  $Z_b$  untuk  $t = 10 \text{ s}$  dapat dilihat pada Gambar 1.

Untuk menganalisa konvergensi hasil dari solusi metode MacCormack terhadap solusi analitik, akan digunakan 6 (enam) *step sizes* ( $\Delta x$ ) yang berbeda, mulai dari  $\Delta x = 0,1$  hingga  $\Delta x = 0,003125$ , serta perbandingan  $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0,1$ . Syarat batas pada aliran masuk dan laju permukaan dasar bernilai konstan masing-masing  $q = 1 \text{ m}^2/\text{s}$  dan  $q_b = 0,005 \text{ m}^2/\text{s}$ , sedangkan  $h = 0,5665 \text{ m}$  pada syarat batas aliran keluar. Untuk nilai faktor *damping* yang digunakan adalah  $\psi = \omega = \zeta = 0$ .



**Gambar 1.** Perbandingan solusi analitik dan solusi metode MacCormack untuk  $t = 10 \text{ s}$  dengan  $\Delta t = 0,01$  dan  $\Delta x = 0,1$ .

**Tabel 2.** Analisis konvergensi metode MacCormack terhadap solusi analitik untuk  $t = 10 \text{ s}$  dari 6 (enam)  $\Delta x$  yang berbeda.

Jumlah Grid ( $N$ )	$\Delta x$	Kedalaman ( $h$ )		Permukaan Dasar ( $Z_b$ )	
		Galat $L_1$	Galat relatif $L_1$ (%)	Galat $L_1$	Galat relatif $L_1$ (%)
101	0,1	1,54E-02	0,0204	1,61E-02	0,0145
201	0,05	1,09E-02	0,0073	1,25E-02	0,0056
401	0,025	1,47E-02	0,0049	1,33E-02	0,0030
801	0,0125	2,48E-02	0,0042	1,91E-02	0,0022
1601	0,00625	4,62E-02	0,0039	3,27E-02	0,0019
3201	0,003125	8,93E-02	0,0037	6,09E-02	0,0017

Solusi numerik metode MacCormack diperoleh dari persamaan (9) – (11), sedangkan solusi analitik diperoleh dari persamaan (12) untuk  $t = 10 \text{ s}$ . Selanjutnya, galat dari solusi-solusi numerik metode MacCormack terhadap solusi analitik untuk  $t = 10 \text{ s}$  yang disajikan pada Tabel 2 dihitung menggunakan norm galat  $L_1$  dengan:

Irfan Said, Agustinus Ribal, Khaeruddin

$$\|\text{Galat}\|_{L_1} = \sum_{i=1}^N |S_i - \hat{S}_i| \quad (13)$$

dengan  $S$  adalah solusi numerik dan  $\hat{S}$  adalah solusi analitik, serta  $N$  adalah jumlah grid. Untuk persentase galat relatif  $L_1$  dihitung dengan:

$$\text{Galat relatif } L_1 = \frac{\|\text{Galat}\|_{L_1}}{\|\hat{S}\|} \times 100\% \quad (14)$$

Tabel 2 menunjukkan bahwa solusi numerik metode MacCormack konvergen terhadap solusi analitik yang dapat dilihat dari semakin kecil  $\Delta x$  yang digunakan, maka galat relatif yang diperoleh akan semakin kecil menuju 0.

## 5.2. Kasus Dengan Solusi Eksperimen

Hasil dari eksperimen ini diperoleh dari penelitian Spinewine & Zech [16] yang dituliskan ulang oleh Juez, dkk [8]. Saluran memiliki panjang 6 m dan digunakan untuk mensimulasikan bendungan runtuh. Pasir yang digunakan pada permukaan dasar berupa pasir kasar dengan  $d_{50} = 1,82 \text{ mm}$ , kepadatan  $\rho_s = 2683 \text{ kg/m}^3$ , porositas  $\varepsilon = 0,47$  dan koefisien Manning  $n = 0,0165 \text{ sm}^{-1/3}$ .

**Tabel 3.** Kondisi awal dari eksperimen

Eksperimen ke-	$h_{kiri}(m)$	$h_{kanan}(m)$	$Z_{b\ kiri}(m)$	$Z_{b\ kanan}(m)$
1	0,35	0,00	0,00	0,00
2	0,25	0,10	0,10	0,00

Eksperimen dilakukan dengan dua kondisi awal yang berbeda. Keadaan awal eksperimen pertama berupa kasus bendungan runtuh dengan tipe permukaan dasar kering (*dry bed*) dan kondisi permukaan dasar yang datar. Eksperimen kedua berupa kasus bendungan runtuh dengan tipe permukaan dasar basah (*wet bed*) serta ketinggian awal permukaan dasar yang berbeda. Untuk detailnya dapat dilihat pada Tabel 3.

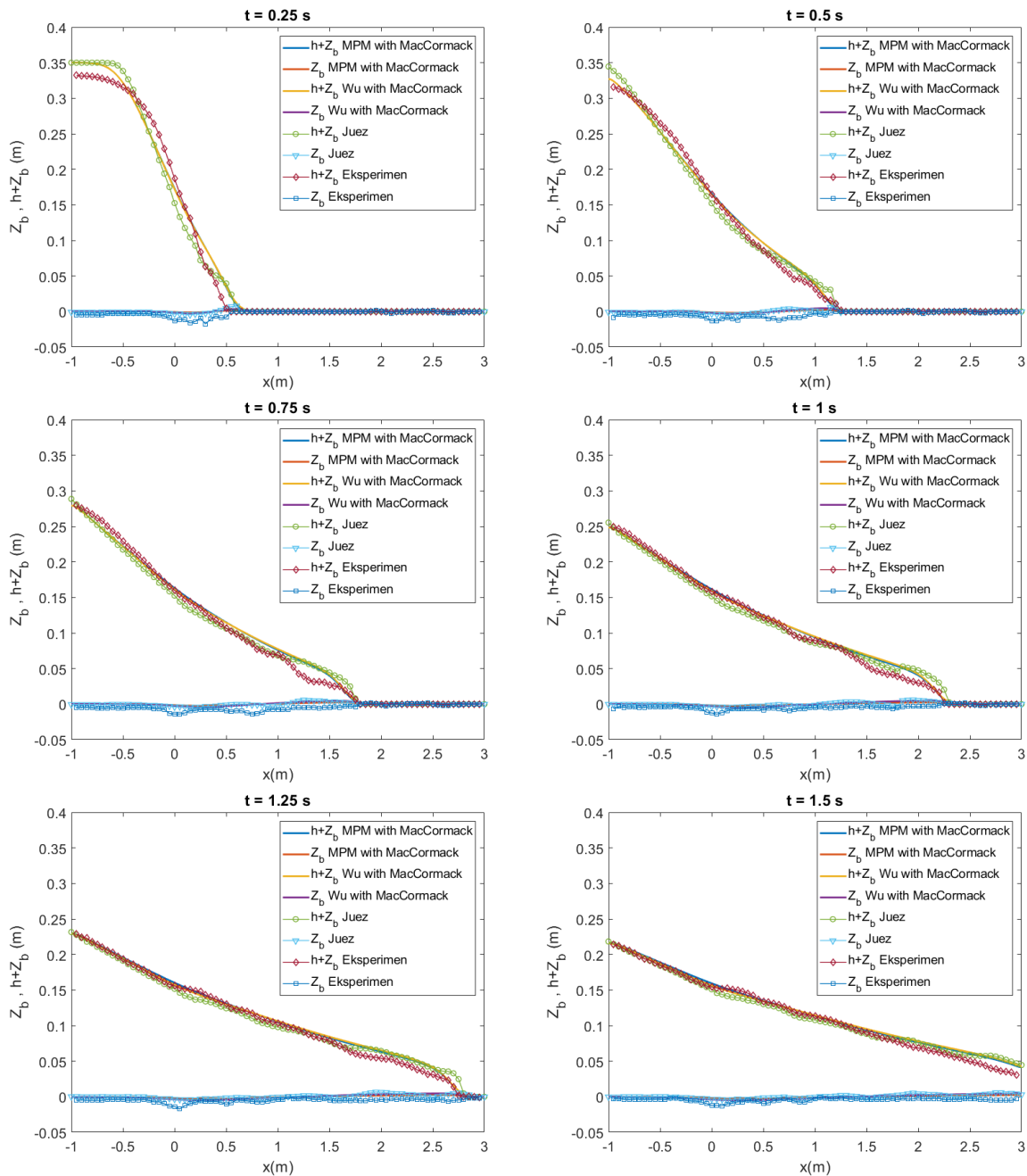
Simulasi numerik telah dilakukan menggunakan metode MacCormack dengan  $\Delta t = 0,0001$  dan  $\Delta x = 0,01$ , serta menggunakan formula Meyer-Peter dan Muller (MPM) dan formula Wu untuk menentukan faktor Grass pada permukaan dasar sedimen. Hasil simulasi metode MacCormack akan dibandingkan dengan hasil eksperimen dan hasil numerik dari penelitian sebelumnya yang menggunakan .

**Tabel 4.** Root mean square error (RMSE) dari solusi numerik yang diperoleh pada Eksperimen pertama (Hasil MPM dan Wu menggunakan metode MacCormack; Hasil Juez merupakan hasil penelitian sebelumnya [8])

T	RMSE ketinggian air ( $h + Z_b$ ) (m)			RMSE permukaan dasar ( $Z_b$ ) (m)		
	Juez	MPM	WU	Juez	MPM	WU
0,25	0,0148	0,0117	0,0117	0,0043	0,0048	0,0047
0,50	0,0091	0,0071	0,0073	0,0053	0,0054	0,0054
0,75	0,0088	0,0077	0,0079	0,0061	0,0063	0,0063
1,00	0,0080	0,0060	0,0062	0,0050	0,0051	0,0052
1,25	0,0072	0,0051	0,0052	0,0063	0,0059	0,0061
1,50	0,0071	0,0056	0,0056	0,0055	0,0049	0,0050

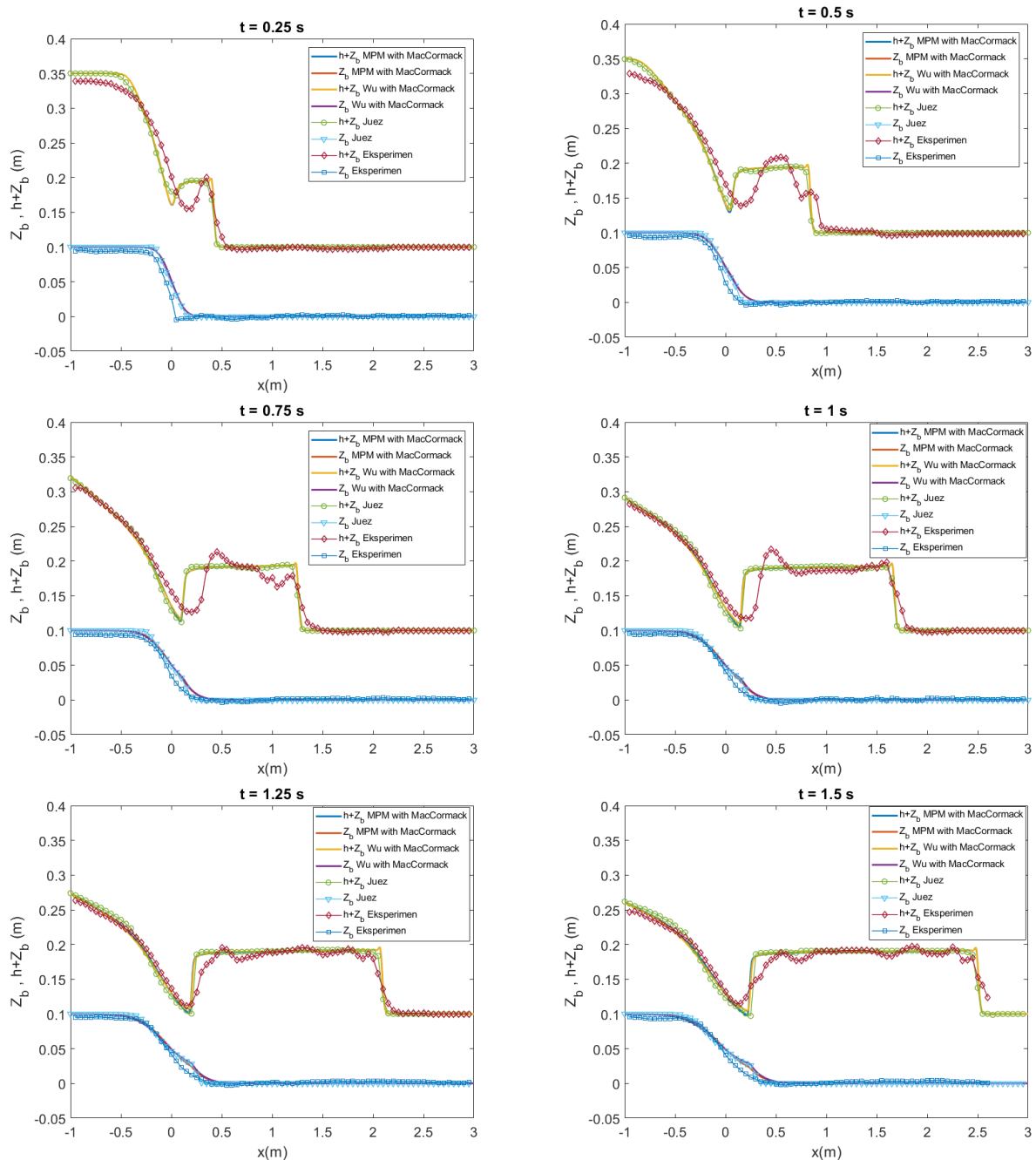


Solusi numerik metode MacCormack untuk eksperimen pertama dapat dilihat pada Gambar 2. Kedua solusi metode MacCormack yang diperoleh dari formula MPM dan formula Wu menunjukkan hasil yang baik terhadap solusi eksperimen pertama. Analisis galat solusi-solusi metode MacCormack dan solusi penelitian sebelumnya terhadap solusi eksperimen pertama menggunakan *root mean square error* (RMSE) untuk ketinggian permukaan atas  $h + Z_b$  dan ketinggian permukaan dasar  $Z_b$  dapat dilihat pada Tabel 4. Hasil numerik yang diperoleh menggunakan metode MacCormack serupa dengan solusi numerik yang telah diperoleh dari penelitian sebelumnya yang menggunakan metode volume hingga. Nilai faktor *damping* yang digunakan pada eksperimen pertama adalah  $\psi = \omega = 0,04$  dan  $\zeta = 0,02$ .



**Gambar 2.** Perbandingan antara solusi eksperimen pertama [16], solusi numerik metode volume hingga [8], dengan solusi metode MacCormack menggunakan formula MPM dan formula Wu untuk  $t = 0,25$ ,  $t = 0,5$  s,  $t = 0,75$  s,  $t = 1$  s,  $t = 1,25$  s dan  $t = 1,5$  s.





**Gambar 3.** Perbandingan antara solusi eksperimen kedua [16], solusi numerik metode volume hingga [8], dengan solusi metode MacCormack menggunakan formula MPM dan formula Wu untuk  $t = 0,25$ ,  $t = 0,5$  s,  $t = 0,75$  s,  $t = 1$  s,  $t = 1,25$  s dan  $t = 1,5$  s.

Serupa dengan hasil sebelumnya, solusi metode MacCormack menggunakan formula MPM dan formula Wu juga mampu memberikan hasil yang baik pada eksperimen kedua. Analisis galat dari solusi numerik metode MacCormack dan solusi numerik penelitian sebelumnya terhadap solusi eksperimen kedua menggunakan *root mean square error* (RMSE) untuk ketinggian permukaan atas  $h + Z_b$  dan ketinggian permukaan dasar  $Z_b$  dapat dilihat pada Tabel 5. Analisis galat pada Tabel 5 menunjukkan kedekatan solusi-solusi metode MacCormack dan solusi numerik penelitian sebelumnya dengan solusi eksperimen kedua. Perbandingan antara simulasi-simulasi numerik dengan solusi eksperimen dapat dilihat pada Gambar 3. Solusi-solusi metode MacCormack untuk eksperimen kedua serupa dengan solusi numerik penelitian sebelumnya yang menggunakan

metode volume hingga. Pada eksperimen kedua nilai faktor *damping* yang digunakan adalah  $\psi = \omega = 0,004$  dan  $\zeta = 0,02$ .

**Tabel 5.** *Root mean square error* (RMSE) dari solusi numerik yang diperoleh pada Eksperimen kedua (Hasil MPM dan Wu menggunakan metode MacCormack; Hasil Juez merupakan hasil penelitian sebelumnya [8])

T	RMSE ketinggian air ( $h + Z_b$ ) (m)			RMSE permukaan dasar ( $Z_b$ ) (m)		
	Juez	MPM	WU	Juez	MPM	WU
0,25	0,0124	0,0135	0,0135	0,0068	0,0075	0,0075
0,50	0,0167	0,0172	0,0172	0,0055	0,0062	0,0063
0,75	0,0168	0,0158	0,0158	0,0051	0,0052	0,0053
1,00	0,0161	0,0152	0,0152	0,0042	0,0043	0,0046
1,25	0,0103	0,0095	0,0095	0,0044	0,0042	0,0047
1,50	0,0120	0,0102	0,0100	0,0048	0,0044	0,0051

## 6. Kesimpulan

Pada penelitian ini telah ditunjukkan penyelesaian model transpor sedimen satu dimensi menggunakan metode MacCormack. Formula Meyer-Peter dan Muller (MPM) dan formula Wu digunakan untuk memformulasikan laju transpor permukaan dasar. Persamaan pembangun model transpor sedimen didiskritisasi kedalam step prediktor dan step korektor dari metode MacCormack. Penambahan bentuk *damping* pada masing-masing persamaan pembangun transpor sedimen dilakukan untuk mengurangi dispersi numerik untuk meningkatkan akurasi dari metode MacCormack.

Solusi metode MacCormack telah diuji pada kasus dengan solusi analitik maupun pada kasus-kasus eksperimen yang telah dilakukan pada penelitian-penelitian sebelumnya. Metode MacCormack mampu memberikan hasil yang konvergen terhadap solusi analitik model transpor sedimen 1D. Pada kasus-kasus eksperimen, solusi numerik metode MacCormack menunjukkan kedekatan terhadap solusi-solusi eksperimen yang ditunjukkan dengan analisis galat menggunakan *root mean square error* (RMSE). Disamping itu, metode MacCormack juga memberikan hasil yang serupa dalam kasus transpor sedimen 1D dengan solusi numerik dari penelitian sebelumnya yang menggunakan metode volume hingga.

## Daftar Pustaka

- [1] Berthon, C., Cordier, O., & Le, M., 2012. An analytical solution of the shallow water system coupled to the Exner Equation. *Comptes Rendus Mathematique, Elsevier Masson*, 183-186.
- [2] Castro Diaz, M., Fernandez-Nieto, E., & Ferreiro, A., 2008. Sediment transport models in shallow water equations and numerical approach by high order finite volume methods. *Computer & Fluids*, 299-316.
- [3] Erami, F. E., & Firoozjaee, A. R., 2019. Numerical solution of bed load transport equations using discrete least squares meshless (DLSM) method. *Applied Mathematical Modelling*, 1095-1109.
- [4] Firoozjaee, A.R., & Sahebdel, M., 2017. Element-free Galerkin method for numerical simulation of sediment transport equations on regular and irregular distribution of nodes. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 108-116.
- [5] Gunawan, P., & Lhebrard, X., 2015. Hydrostatic relaxation scheme for the 1d shallow water - exner equations in bedload transport. *Computers & Fluids*, 44-50.

- [6] Hoffmann, K., & Chiang, S., 2000. *Computational fluid dynamics (Vol. I)*. Wichita, Kansas: Engineering Education System.
- [7] Hudson, J., & Sweby, P., 2003. Formulations for numerically approximating hyperbolic systems governing sediment transport. *Journal of Scientific Computing*, 225-252.
- [8] Juez, C., Murillo, J., & García-Navarro, P., 2014. A 2D weakly-coupled and efficient numerical model for transient shallow flow and movable bed. *Advances in Water Resources*, 93-109.
- [9] Liu, X., & Beljadid, A., 2017. A coupled numerical model for water flow, sediment transport and bed erosion. *Computers & Fluids*, 273-284.
- [10] MacCormack, R., 1969. the effect of viscosity in hypervelocity impact cratering. *AIAA Hypervelocity Impact Conference*, 69-354.
- [11] Magdalena, I., & Pebriansyah, M., 2022. Numerical treatment of finite difference method for solving dam break model on a wet-dry bed withan obsatcle. *Results in Engineering*, 100382.
- [12] Martinez-Aranda, S., Murillo, J. & Garcia-Navarro, P., 2019. A comparative analysis of capacity and non-capacity formulations for the simulation of unsteady flows over finite-depth erodible beds. *Advances in Water Resources*. 91-112.
- [13] Martinez-Aranda, S., Murillo, J., & Garcia-Navarro, P., 2019. A 1D numerical model for the simulation of unsteady and highly erosive flows in rivers. *Computers & Fluids* , 8-13.
- [14] Martinez-Aranda, S., Murillo, J., & Garcia-Navarro, P., 2021. Comparison of new efficient 2D models for the simulation of bedload transport using the augmented Roe approach. *Advances in Water Resources*, 103931.
- [15] Said, I., Ribal, A., & Mahie, A., 2017. Numerical investigation of long-wave breaking on even bottom with linear friction. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 595-606.
- [16] Spinewine, B., & Zech, Y., 2007. Small-scle laboratory dam break waves on movable beds. *Journal of Hydraulic Research*, 73-86.
- [17] Wu, W., 2007. *Computational river dynamics*. London: Taylor & Francis.
- [18] Zhang, S., & Duan, J., 2011. 1D finite volume model of unsteady flow over mobile bed. *Journal of Hydrology*, 57-68.