

Global Stability of Covid-19 Disease Free Based on Sivrs Model

Kestabilan Global Bebas Penyakit Covid-19 Berdasarkan Model Sivrs

Ratna Widayati*

**Alumni Magister Matematika Universitas Gadjah Mada*

E-mail: ratnawidayati1708@gmail.com

Received: 23 November 2022; Accepted: 22 December 2022; Published: 5 January 2023

Abstract

This study discusses the spread of the Covid-19 disease by including new variant variables. The model used by SIVRS assumes there are deaths caused by Covid-19 and the new variant Covid-19. In addition, individuals who have been infected with the new variant of Covid-19 can recover. Based on the model, disease-free equilibrium points and endemic equilibrium points are obtained. The analysis was carried out around the disease-free equilibrium point and the result was that the global asymptotically stable disease-free equilibrium point with the condition $R_0 \leq 1$. Furthermore, a simulation was carried out with the Maple 18.

Keywords: Covid-19, SIVRS, Liapunov.

Abstrak

Penelitian ini membahas mengenai penyebaran penyakit Covid-19 dengan menyertakan variabel varian baru. Model yang digunakan SIVRS dengan asumsi terdapat kematian yang disebabkan oleh Covid-19 dan Covid-19 varian baru. Selain itu, individu yang telah terinfeksi Covid-19 varian baru dapat sembuh. Berdasarkan model, diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Analisa dilakukan disekitar titik ekuilibrium bebas penyakit diperoleh hasil bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik global dengan syarat $R_0 \leq 1$. Selanjutnya dilakukan simulasi dengan program Maple 18.

Kata kunci: Covid-19, SIVRS, Liapunov.

1. PENDAHULUAN

Sindrom Pernafasan Akut Parah yang dikenal dengan penyakit SARS merupakan penyakit yang menyerang sistem pernafasan dan berasal dari virus SARS-CoV. Pada akhir Februari 2003, virus ini pertama diidentifikasi di China [8]. Menurut WHO, virus SARS ini mempunyai ciri khas



penularan melalui udara dan dapat menyebar melalui air liur dengan cara yang mirip influenza. Selain itu, SARS juga dapat menyebar melalui permukaan yang disentuh oleh penderita virus tersebut.

Pada perkembangannya, virus SARS-CoV mengalami mutasi genetik dan mengakibatkan munculnya strain baru yaitu SARS-CoV-2. Virus SARS-CoV-2 memunculkan penyakit baru yang diberi nama Covid-19. Kasus pertama Covid-19 muncul pada Desember 2019 di kota Wuhan Cina. Virus ini merupakan salah satu virus yang sangat berbahaya karena penularan dan perubahan genetik yang cepat mengakibatkan wabah pandemi yang diumumkan oleh WHO pada tanggal 11 Maret 2020. Menurut Cooper I., dkk [3] karena tidak tersedia obat atau vaksin, penyakit ini berkembang pesat di negara-negara di dunia. Strategi yang digunakan adalah menjaga jarak, memakai masker dan karantina mandiri. Akan tetapi pandemi tidak terelakkan. Gejala yang timbul jika seseorang mengalami penyakit ini adalah batuk kering, flu, demam. Penularan mirip dengan strain virus sebelumnya yaitu melalui droplet, pilek dan air liur. Dalam kurun waktu 2020 sampai dengan 2022, virus Covid-19 mengalami banyak mutasi genetik yang mengakibatkan adanya virus Covid-19 varian baru contohnya varian Delta dan varian Omicron. Fisman D. N. & Tuite A. R [5] dalam penelitiannya menjelaskan bahwa virus varian baru lebih menular dan berbahaya dibandingkan varian strain yang konvensional. Selain itu, vaksin SARS-CoV-2 mengalami penurunan efek pada varian Omicron [4].

Oleh karena itu, perlu dilakukan analisa mengenai munculnya strain virus baru pada virus Covid-19 dengan menambah kelas populasi pada model. Salah satu model penyebaran penyakit Covid-19 di Indonesia diusulkan oleh Annas S, dkk[1] yang membahas mengenai analisa model SEIR penyebaran Covid-19 dengan menyertakan parameter vaksinasi pada populasi individu rentan. Pada simulasi penelitian tersebut menghasilkan kesimpulan bahwa vaksinasi dapat mempercepat penyembuhan COVID-19 dan isolasi mandiri dapat memperlambat penyebaran COVID-19 di Indonesia. Selain itu, Yang C. & Wang J. [11] dalam penelitiannya menghasilkan model SEIRV dengan V merupakan variabel yang menyatakan konsentrasi virus corona di reservoir lingkungan di Wuhan China. Otunuga O. M. [7] membahas mengenai model stokastik SIS pada penyakit Covid-19 dengan distribusi peluang jumlah kasus COVID-19 di Amerika Serikat untuk periode 22 Januari 2020 sampai dengan 23 Maret 2021. Berdasarkan penelitian-penelitian tersebut, belum terdapat penelitian yang membahas mengenai variabel kelas populasi varian baru dari Covid-19. Terdapat penelitin dari Xu D., dkk [10] yang membahas mengenai analisis kestabilan global dengan variasi virus akan tetapi belum menyertakan penyakit secara pasti. Model yang digunakan adalah SIVRS akan tetapi diasumsikan tidak ada kematian karena penyakit.

Oleh karena itu dalam penelitian ini membahas mengenai model SIVRS pada penyebaran penyakit Covid-19 dengan model SIVRS yang mendefinisikan populasi individu dengan penyakit Covid-19 varian baru dengan variabel V dan mengasumsikan terdapat kematian karena penyakit Covid-19 dan kematian karena Covid-19 varian baru. Selain itu, individu yang telah terinfeksi varian Covid-19 yang baru dapat sembuh.

2. Formulasi Model

Model SIVRS membagi populasi dengan 4 kelas seperti pada tabel berikut ini:

Tabel 2.1. Kelas populasi pada model SIVRS

$S(t)$	Populasi individu rentan Covid-19 pada saat t
$I(t)$	Populasi individu terinfeksi Covid-19 pada saat t
$V(t)$	Populasi individu terinfeksi Covid-19 varian baru pada saat t
$R(t)$	Populasi individu sembuh dari Covid-19

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI
Ratna Widayati

Selanjutnya didefinisikan parameter-parameter yang mempengaruhi perubahan pada populasi.

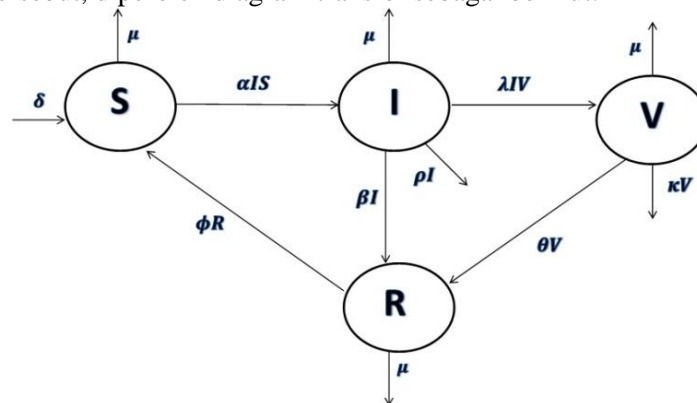
Tabel 2.2. Parameter dalam model SIVRS

δ	Laju kelahiran
μ	Laju kematian alami
α	Laju kontak antara individu terinfeksi Covid-19 dengan individu rentan
λ	Laju kontak antara individu terinfeksi Covid-19 dengan individu terinfeksi Covid-19 varian baru
ρ	Laju kematian karena Covid-19
β	Laju kesembuhan individu yang terinfeksi Covid-19
κ	Laju kematian karena Covid-19 varian baru
θ	Laju kesembuhan individu yang terinfeksi Covid-19 varian baru
ϕ	Laju individu yang telah sembuh menjadi individu yang rentan

Nilai-nilai parameter pada Tabel 2.2 seluruhnya bernilai positif. Asumsi-asumsi yang digunakan pada model SIVRS ini adalah sebagai berikut:

- Bayi yang lahir masuk ke kelas S sebagai individu yang rentan Covid-19
- Penularan Covid-19 hanya bisa terjadi antara individu rentan dan individu yang terinfeksi Covid-19
- Penularan Covid-19 varian baru hanya bisa terjadi antara individu yang terinfeksi Covid-19 dan individu yang terinfeksi Covid-19 varian baru
- Setelah individu sembuh dari infeksi Covid-19 maupun Covid-19 varian baru, individu akan memperoleh kekebalan sementara dan kemudian kembali rentan.

Dari asumsi-asumsi tersebut, diperoleh diagram transfer sebagai berikut:



Gambar 2.1. Diagram transfer model SIVRS

Selanjutnya, berdasarkan Diagram transfer pada Gambar 2.1, diperoleh model matematika untuk penyebaran Covid-19 sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \delta + \phi R - \mu S - \alpha IS \quad (1a)$$

$$\frac{dI}{dt} = \alpha IS - \mu I - \lambda IV - \rho I - \beta I \quad (1b)$$

$$\frac{dV}{dt} = \lambda IV - \mu V - \kappa V - \theta V \quad (1c)$$

$$\frac{dR}{dt} = \theta V - \mu R + \beta I - \phi R \quad (1d)$$

dengan total populasi $N = S + I + V + R$ dengan $S, I, V, R \geq 0$ dan $\delta, \alpha, \beta, \theta, \mu, \rho, \kappa, \lambda, \phi > 0$ sehingga diperoleh himpunan invarian positif

$$\Omega = \left\{ (S, I, V, R) \in \mathbb{R}_+^4 : 0 \leq S + I + V + R \leq \frac{\delta}{\mu} \right\}.$$

3. Titik Ekuilibrium

Berdasarkan Sistem (1) diperoleh titik ekuilibrium yang dijelaskan pada Lemma berikut ini.

Lemma 3.1

(i). Jika $I = 0$ maka Sistem (1) mempunyai titik ekuilibrium bebas penyakit

$$E_0 = (S_0, I_0, V_0, R_0) = \left(\frac{\delta}{\mu}, 0, 0, 0 \right).$$

(ii). Jika $I \neq 0$ maka Sistem (1) mempunyai titik ekuilibrium endemik $E_1 = (S_1, I_1, V_1, R_1)$ dengan

$$S_1 = \frac{\mu + \rho + \beta}{\alpha}$$

$$I_1 = \frac{-\delta(\mu + \phi)\alpha + \mu(\mu + \phi)(\mu + \rho + \beta)}{\phi\beta\alpha - \alpha(\mu + \phi)(\mu + \rho + \beta)}$$

$$V_1 = 0$$

$$R_1 = \frac{\beta}{\mu + \phi} I_1,$$

dan $E_2 = (S_2, I_2, V_2, R_2)$ dengan

$$S_2 = \frac{\phi\theta\mu I_2 + \phi\theta\rho I_2 + \phi\theta\beta I_2 - \delta\lambda I_2(\mu + \phi) - \lambda I_2^2\phi\beta}{\phi\theta\alpha I - \lambda I(\mu + \phi)(\mu + \alpha I)}$$

$$I_2 = \frac{\mu + \kappa + \theta}{\lambda}$$

$$V_2 = \frac{-\delta(\mu + \phi) - \phi\beta I_2 + (\mu + \phi)(\mu + \alpha I_2)S_2}{\phi\theta}$$

$$R_2 = \frac{(\mu + \alpha I_2)S_2 + \delta}{\phi}.$$

Bukti

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI

Ratna Widayati

(i). Sistem (1) mencapai titik ekuilibrium jika $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dV}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$. Oleh karena itu

Sistem (1) dapat dinyatakan sebagai:

$$\delta + \phi R - \mu S - \alpha IS = 0 \quad (2a)$$

$$\alpha IS - \mu I - \lambda IV - \rho I - \beta I = 0 \quad (2b)$$

$$\lambda IV - \mu V - \kappa V - \theta V = 0 \quad (2c)$$

$$\theta V - \mu R + \beta I - \phi R = 0. \quad (2d)$$

Jika $I = 0$, Persamaan (2c) dapat dinyatakan dengan

$$-V(\mu + \kappa + \theta) = 0,$$

karena $(\mu + \kappa + \theta) > 0$ artinya $V = 0$. Selanjutnya Persamaan (2d) dapat dinyatakan dengan

$$-R(\mu + \phi) = 0,$$

karena $(\mu + \phi) > 0$ artinya $R = 0$. Lebih lanjut, Persamaan (2a) dapat dinyatakan dengan

$$\delta - \mu S = 0$$

$$S = \frac{\delta}{\mu},$$

sehingga diperoleh $E_0 = (S_0, I_0, V_0, R_0) = \left(\frac{\delta}{\mu}, 0, 0, 0 \right)$.

(ii). Jika $I \neq 0$ Persamaan (2c) dapat dinyatakan sebagai

$$V(\lambda I - \mu - \kappa - \theta) = 0,$$

sehingga diperoleh $V = 0$ atau $I = \frac{\mu + \kappa + \theta}{\lambda}$.

(a). Jika $I \neq 0$ dan $V = 0$ Persamaan (2b) dapat dinyatakan sebagai

$$\alpha IS - \mu I - \lambda IV - \rho I - \beta I = 0$$

$$I(\alpha S - \mu - \rho - \beta) = 0.$$

Karena $I \neq 0$ berakibat $\alpha S - \mu - \rho - \beta = 0$, sehingga diperoleh

$$S = \frac{\mu + \rho + \beta}{\alpha}.$$

Selanjutnya Persamaan (2d) dapat dinyatakan sebagai

$$-\mu R + \beta I - \phi R = 0$$

$$R = \frac{\beta}{\mu + \phi} I.$$

Lebih lanjut, jika $V = 0$, $S = \frac{\mu + \rho + \beta}{\alpha}$ dan $R = \frac{\beta}{\mu + \phi} I$ disubstitusikan ke Persamaan (2a),

diperoleh $I = \frac{-\delta(\mu + \phi)\alpha + \mu(\mu + \phi)(\mu + \rho + \beta)}{\phi\beta\alpha - \alpha(\mu + \phi)(\mu + \rho + \beta)}$. Jadi, diperoleh titik ekuilibrium

endemik yang pertama yaitu $E_1 = (S_1, I_1, V_1, R_1)$ dengan

$$S_1 = \frac{\mu + \rho + \beta}{\alpha}$$

$$I_1 = \frac{-\delta(\mu + \phi)\alpha + \mu(\mu + \phi)(\mu + \rho + \beta)}{\phi\beta\alpha - \alpha(\mu + \phi)(\mu + \rho + \beta)}$$

$$V_1 = 0$$

$$R_1 = \frac{\beta}{\mu + \phi} I_1.$$

(b). Jika $I = \frac{\mu + \kappa + \theta}{\lambda}$. Persamaan (2a) dapat dinyatakan sebagai

$$\phi R - (\mu + \alpha I)S = -\delta \quad (3)$$

dan Persamaan (2d) dapat dinyatakan sebagai

$$-(\mu + \phi)R + \beta I = -\theta V. \quad (4)$$

Selanjutnya eliminasi Persamaan (3) dan Persamaan (4) diperoleh

$$-(\mu + \phi)(\mu + \alpha I)S + \phi\theta V = -\delta(\mu + \phi) - \phi\beta I, \quad (5)$$

kemudian eliminasi Persamaan (2b) dan Persamaan (4) diperoleh

$$S = \frac{\phi\theta\mu I + \phi\theta\rho I + \phi\theta\beta I - \delta\lambda I(\mu + \phi) - \lambda I\phi\beta I}{\phi\theta\alpha I - \lambda I(\mu + \phi)(\mu + \alpha I)}.$$

Persamaan (5) dapat dinyatakan sebagai

$$V = \frac{-\delta(\mu + \phi) - \phi\beta I + (\mu + \phi)(\mu + \alpha I)S}{\phi\theta},$$

dan Persamaan (3) menjadi

$$R = \frac{(\mu + \alpha I)S + \delta}{\phi}.$$

Jadi, diperoleh titik ekuilibrium yang kedua yaitu $E_2 = (S_2, I_2, V_2, R_2)$ dengan

$$S_2 = \frac{\phi\theta\mu I_2 + \phi\theta\rho I_2 + \phi\theta\beta I_2 - \delta\lambda I_2(\mu + \phi) - \lambda I_2^2\phi\beta}{\phi\theta\alpha I_2 - \lambda I_2(\mu + \phi)(\mu + \alpha I_2)}$$

$$I_2 = \frac{\mu + \kappa + \theta}{\lambda}$$

$$V_2 = \frac{-\delta(\mu + \phi) - \phi\beta I_2 + (\mu + \phi)(\mu + \alpha I_2)S_2}{\phi\theta}$$

$$R_2 = \frac{(\mu + \alpha I_2)S_2 + \delta}{\phi}.$$

4. Eksistensi Titik Ekuilibrium Endemik

Pada bagian akan dijelaskan mengenai eksistensi titik ekuilibrium endemik pertama. Didefinisikan bilangan reproduksi dasar (*basic reproduction number*) sebagai berikut:

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI
Ratna Widayati

$$R_0 = \frac{\alpha\delta}{\mu(\mu + \rho + \beta)}.$$

Lemma 4.1 Jika $R_0 > 1$ maka E_1 eksis.

Bukti. Diketahui $E_1 = (S_1, I_1, V_1, R_1)$ dengan

$$S_1 = \frac{\mu + \rho + \beta}{\alpha}$$

$$I_1 = \frac{-\delta(\mu + \phi)\alpha + \mu(\mu + \phi)(\mu + \rho + \beta)}{\phi\beta\alpha - \alpha(\mu + \phi)(\mu + \rho + \beta)}$$

$$V_1 = 0$$

$$R_1 = \frac{\beta}{\mu + \phi} I_1.$$

Akan dibuktikan $I_1 \geq 0$.

(i). Akan dibuktikan $-\delta(\mu + \phi)\alpha + \mu(\mu + \phi)(\mu + \rho + \beta) < 0$.

$$\begin{aligned} -\delta\alpha(\mu + \phi) + \mu(\mu + \phi)(\mu + \rho + \beta) &= \left(1 - \frac{\delta\alpha}{\mu(\mu + \rho + \beta)}\right) (\mu(\mu + \phi)(\mu + \rho + \beta)) \\ &= (1 - R_0) (\mu(\mu + \phi)(\mu + \rho + \beta)), \end{aligned}$$

karena $R_0 > 1$ maka $-\delta(\mu + \phi)\alpha + \mu(\mu + \phi)(\mu + \rho + \beta) < 0$.

(ii). Akan dibuktikan $\phi\beta\alpha - \alpha(\mu + \phi)(\mu + \rho + \beta) < 0$.

$$\begin{aligned} \phi\beta\alpha - \alpha(\mu + \phi)(\mu + \rho + \beta) &= \phi\beta\alpha - (\alpha\mu + \alpha\phi)(\mu + \rho + \beta) \\ &= \phi\beta\alpha - \alpha\mu^2 - \alpha\mu\rho - \alpha\mu\beta - \alpha\phi\mu - \alpha\phi\rho - \alpha\phi\beta \\ &= -\alpha\mu^2 - \alpha\mu\rho - \alpha\mu\beta - \alpha\phi\mu - \alpha\phi\rho. \end{aligned} \quad (6)$$

Persamaan (6) jelas bernilai negatif untuk setiap $\delta, \alpha, \beta, \theta, \mu, \rho, \kappa, \lambda, \phi > 0$.

Jadi, $I_1 \geq 0$. Karena $I_1 \geq 0, S_1 > 0, V_1 = 0, R_1 \geq 0$ maka E_1 eksis.

5. KESTABILAN TITIK EKUILIBRIUM BEBAS PENYAKIT

Pada paper ini akan dibahas mengenai kestabilan global titik ekuilibrium bebas penyakit.

Lemma 5.1. Jika $R_0 < 1$ maka E_0 stabil asimtotik lokal.

Bukti. Matriks Jacobian disekitar titik ekuilibrium E_0 adalah:

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} -\mu & \frac{-\alpha\delta}{\mu} & 0 & \phi \\ 0 & \frac{\alpha\delta}{\mu} - \mu - \rho - \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu - \kappa - \theta & 0 \\ 0 & \beta & \theta & -\mu - \phi \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Persamaan karakteristik dari Persamaan (7) yaitu $|J_{E_0} - hI| = 0$ dengan h nilai eigen adalah

$$\begin{vmatrix} -\mu - h & \frac{-\alpha\delta}{\mu} & 0 & \phi \\ 0 & -\left(-\frac{\alpha\delta}{\mu} + \mu + \rho + \beta\right) - h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu + \kappa + \theta) - h & 0 \\ 0 & \beta & \theta & -(\mu + \phi) - h \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\mu - h & -\left(-\frac{\alpha\delta}{\mu} + \mu + \rho + \beta\right) - h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu + \kappa + \theta) - h & 0 \\ \beta & \theta & -(\mu + \phi) - h & \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} (-\mu - h)(-\mu - h) & -\left(-\frac{\alpha\delta}{\mu} + \mu + \rho + \beta\right) - h & 0 \\ 0 & 0 & -(\mu + \kappa + \theta) - h \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\mu - h)(-\mu - h) \left(-\left(-\frac{\alpha\delta}{\mu} + \mu + \rho + \beta\right) - h \right) (-\mu + \kappa + \theta) - h = 0. \quad (8)$$

Berdasarkan (8) diperoleh nilai eigen sebagai berikut:

$$h_1 = -\mu, h_2 = -(\mu + \phi), h_3 = -(\mu + \kappa + \theta),$$

dan

$$\begin{aligned} h_4 &= \frac{\alpha\delta}{\mu} - (\mu + \rho + \beta) \\ &= (R_0 - 1)(\mu + \rho + \beta). \end{aligned}$$

Karena diketahui $R_0 < 1$ maka h_4 bernilai negatif. Oleh karena itu, terbukti E_0 stabil asimtotik lokal.

Lebih lanjut, untuk meninjau kestabilan global akan digunakan fungsi Liapunov melalui Lemma berikut ini.

Lemma 5.2 Jika $R_0 \leq 1$ maka E_0 stabil asimtotik global.

Bukti. Didefinisikan fungsi L dengan

$$\begin{aligned} L: \square_+^4 &\rightarrow \square, \\ \square_+^4 &= \left\{ (S, I, V, R)^T : 0 \leq S + I + V + R \leq \frac{\delta}{\mu} \right\} \text{ dan} \\ L(S, I, V, R)^T &= I. \end{aligned} \quad (9)$$

Akan ditunjukkan bahwa fungsi L pada Persamaan (9) merupakan fungsi Liapunov. Menurut Luenberger D. G [6] dalam definisinya menyatakan bahwa syarat fungsi L dapat disebut fungsi Liapunov jika memenuhi:

- (i). Fungsi L kontinu dan mempunyai turunan parsial yang kontinu pada \square_+^4 .
- (ii). Titik ekuilibrium E_0 merupakan satu-satunya titik minimum di L pada \square_+^4 . Hal tersebut dapat diartikan bahwa fungsi L definit positif. Fungsi L definit positif karena $S, I, V, R \geq 0$.
- (iii). Fungsi \dot{L} memenuhi $\dot{L}(S, I, V, R)^T \leq 0$ untuk setiap $(S, I, V, R)^T \in \square_+^4$.

Akan ditunjukkan \dot{L} memenuhi $\dot{L}(S, I, V, R)^T \leq 0$ untuk setiap $(S, I, V, R)^T \in \square_+^4$.

Jika kedua ruas dari Persamaan (9) diturunkan terhadap t diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{L} &= \frac{\partial L}{\partial S} \frac{dS}{dt} + \frac{\partial L}{\partial I} \frac{dI}{dt} + \frac{\partial L}{\partial V} \frac{dV}{dt} + \frac{\partial L}{\partial R} \frac{dR}{dt} \\ &= 0 + 1 \left(\frac{dI}{dt} \right) + 0 + 0 \\ &= \alpha IS - \mu I - \lambda IV - \rho I - \beta I\end{aligned}\quad (10)$$

karena $\lambda > 0$, $I \geq 0$ dan $V \geq 0$ maka Persamaan (10) menjadi

$$\begin{aligned}\dot{L} &= \alpha IS - \mu I - \lambda IV - \rho I - \beta I \leq \alpha IS - \mu I - \rho I - \beta I \\ &= (\alpha S - \mu - \rho - \beta)I.\end{aligned}\quad (11)$$

Karena domain fungsi yaitu $\Omega = \left\{ (S, I, V, R)^T \in \square_+^4 : 0 \leq S + I + V + R \leq \frac{\delta}{\mu} \right\}$, maka

Pertidaksamaan (11) dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned}\dot{L} &\leq \left(\alpha \left(\frac{\delta}{\mu} \right) - \mu - \rho - \beta \right) I \\ &= \left(\frac{\alpha \delta}{\mu} - (\mu + \rho + \beta) \right) I \\ &= (R_0 (\mu + \rho + \beta) - (\mu + \rho + \beta)) I \\ &= (\mu + \rho + \beta) (R_0 - 1) I \\ &\leq 0\end{aligned}$$

untuk setiap $(S, I, V, R) \in \square_+^4$ dan (S, I, V, R) bukan titik ekuilibrium yaitu

$$(S, I, V, R) \neq \left(\frac{\delta}{\mu}, 0, 0, 0 \right).$$

Berdasarkan (i)-(iii), terbukti L merupakan fungsi Liapunov. Selanjutnya untuk meninjau kestabilan global, Brock W. A & Malliaris A. G [2] dalam teoremanya menyebutkan bahwa syarat titik ekuilibrium E_0 asimtotik global adalah:

- Jika $(S, I, V, R) \rightarrow \infty$, maka $L(S, I, V, R) \rightarrow \infty$.
- Nilai $\dot{L}(E_0) = 0$. Akan ditunjukkan $\dot{L}(E_0) = 0$.

$$\dot{L}(S, I, V, R) = \alpha IS - \mu I - \lambda IV - \rho I - \beta I \text{ dan } E_0 = \left(\frac{\delta}{\mu}, 0, 0, 0 \right) \text{ diperoleh nilai nilai}$$

$$\dot{L}(E_0) = \alpha IS - \mu I - \lambda IV - \rho I - \beta I = 0.$$

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI
Ratna Widayati

Jadi, titik ekuilibrium E_0 stabil asimtotik global.

6. SIMULASI NUMERIK

Sistem persamaan diferensial (1) dapat diselesaikan secara numerik dengan menggunakan MAPLE 18. Berikut ini diberikan nilai-nilai parameter yaitu $\delta = 0,5; \mu = 0,3; \lambda = 0,02; \beta = 0,5; \phi = 0,01$ [10]. Untuk nilai $\kappa = 0,02; \theta = 0,2$ dan $\rho = 0,09$ diperoleh dari asumsi dikarenakan pada penelitian Xu D., dkk [10] tidak menggunakan parameter-parameter tersebut. Selanjutnya nilai awal yang digunakan adalah

$$S(0) = 0,2$$

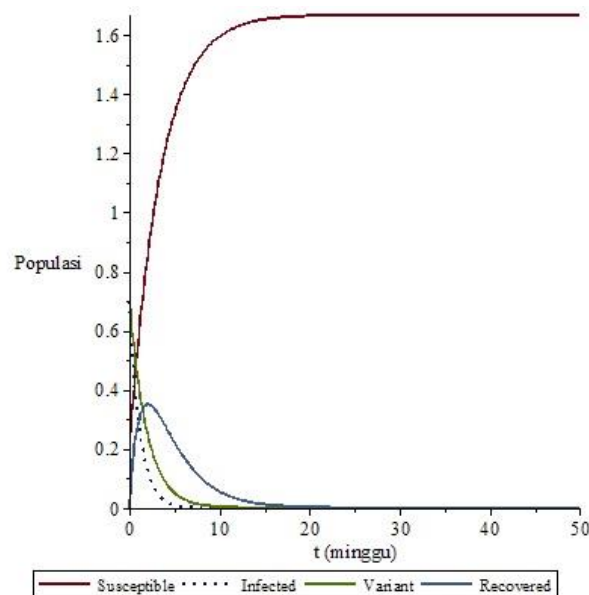
$$I(0) = 0,7$$

$$V(0) = 0,7$$

$$R(0) = 0$$

dengan mempertimbangkan maksimal total populasi sebesar $\frac{\delta}{\mu} = 1,666667$.

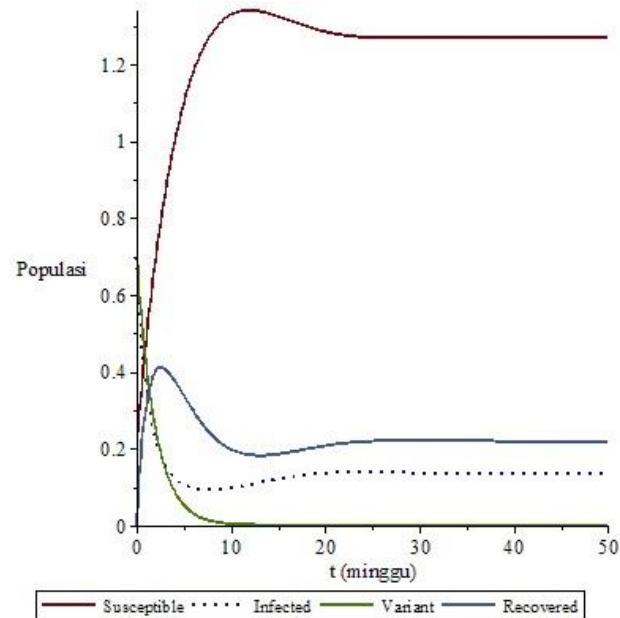
Gambar berikut ini merepresentasikan simulasi untuk nilai $R_0 < 1$ dengan nilai $\alpha = 0,08$ [10]. Nilai R_0 yang diperoleh adalah $R_0 = 0,1498127340$.



Gambar 6.1. Simulasi Sistem (1) dengan $\alpha = 0,08$ untuk $R_0 < 1$

Berdasarkan Gambar 6.1 dapat dilihat bahwa perilaku Sistem (1) menuju ekuilibrium E_0 yaitu $(1,6667; 0; 0; 0)$ sesaat setelah $t = 10$. Artinya pada saat $R_0 < 1$ penyakit Covid-19 semakin lama akan menghilang dari populasi. Akan tetapi jika $\alpha = 0,7$ [9] dan nilai $R_0 = 1,310861424$ diperoleh gambar sebagai berikut:

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI
Ratna Widayati



Gambar 6.2. Simulasi Sistem (1) dengan $\alpha = 0,7$ untuk $R_0 > 1$

Berdasarkan Gambar 6.2, populasi kelas I naik karena adanya kontak dengan populasi kelas S . Akan tetapi populasi kelas I turun sejalan dengan populasi kelas V karena adanya kontak antara individu yang terinfeksi Covid-19 dengan individu yang terinfeksi Covid-19 varian baru. Populasi kelas I turun dikarenakan pula individu yang telah terinfeksi Covid-19 telah sembuh kemudian masuk kelas R . Kemudian individu yang terinfeksi Covid-19 varian baru semakin lama menurun seiring meningkatnya individu yang sembuh dari Covid-19 varian baru yaitu masuk kelas R . Populasi kelas S tetap ada karena individu yang telah sembuh kemudian masuk kembali ke kelas S . Selain itu, kelas I masih ada artinya individu yang terinfeksi Covid-19 masih ada di populasi ketika $R_0 > 1$. Artinya Covid-19 akan terus menjadi wabah jika tingkat infeksi masih lebih dari 1.

7. KESIMPULAN

Diberikan model matematika penyebaran penyakit Covid-19 dengan menyertakan populasi individu yang terinfeksi varian baru Covid-19 seperti pada Sistem (1). Analisa kestabilan global dilakukan pada titik ekuilibrium bebas penyakit dengan menggunakan fungsi Liapunov. Diperoleh hasil bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik global jika dipenuhi syarat $R_0 \leq 1$. Simulasi numerik dilakukan dengan membandingkan solusi Sistem (1) jika diketahui $R_0 < 1$ dan $R_0 > 1$. Diperoleh kesimpulan bahwa untuk $R_0 < 1$ solusi Sistem (1) mendekati ekuilibrium bebas penyakit. Artinya suatu saat penyebaran penyakit Covid-19 akan hilang jika dipenuhi syarat tingkat infeksi yang kurang dari 1. Akan tetapi, jika tingkat infeksi lebih dari 1, penyebaran penyakit Covid-19 masih tetap akan ada dalam populasi.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Annas S., Pratama I. M., Rifandi M., Sanusi W., Side S.. 2020. Stability analysis and numerical simulation of SEIR model for pandemic COVID-19 spread in Indonesia, *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol 139, 1-7.

- [2] Brock W. A & Malliaris A. G, 1989. *Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics*, Elsevier, Amsterdam.
- [3] Cooper I., Mondal A. & Antonopoulos C. G., 2020. A SIR model assumption for the spread of COVID-19 in different communities, *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol 139, 1-30.
- [4] Collie S., Champion J., Moultrie H., dkk., 2022. Effectiveness of BNT162b2 vaccine against omicron variant in South Africa. *N Engl J Med* , Vol 386:494–6.
- [5] Fisman D. N. & Tuite A. R., 2021. Evaluation of the relative virulence of novel SARS-Cov-2 variants: a retrospective cohort study in Ontario, Canada, *CMAJ (Can Med Assoc J)*, Vol 193. E1619-e25
- [6] Luenberger D. G., 1979. *Introduction to Dynamics Systems*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [7] Otunuga O. M., 2021. Time-dependent probability distribution for number of infection in a stochastic SIS model: case study COVID-19, *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol 147.
- [8] WHO, 2022. *Severe Acute Respiratory Syndrome (SARS)*. World Health Organization. https://www.who.int/health-topics/severe-acute-respiratory-syndrome#tab=tab_1. [6 Desember 2022]
- [9] Xu D., Xu X. & Su Z., 2015. Novel SIVR Epidemic Spreading Model with Virus Variation in Complex Networks, *27th Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, 5164-5169.
- [10] Xu D., Xu X., Xie Y. & Yang C., 2016. Optimal control of an SIVRS epidemic spreading model with virus variation based on complex networks, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, Vol 48, 200-210.
- [11] Yang C. & Wang J., 2020. A mathematical model for the novel coronavirus epidemic in Wuhan, China. *Math Biosci Eng*, 17(3):2708–24.