JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI e–ISSN: 2614–8811
Published by Departement of Mathematics, Hasanuddin University, Indonesia
https://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk/index
Vol. 20, No. 2, January 2024, pp. 455-466
DOI: 10.20956/j.v20i2.30320

Group and Group Isomorphism in Pyraminx

Grup dan Isomorfisma Grup pada Pyraminx

Nurhafizah[1]*, Nur Erawaty[2]*, Amir Kamal Amir[3]*
** Program Studi Matematika, Universitas Hasanuddin, Makassar*
***Email**: nhafizah221200@gmail.com[1], nurerawaty@gmail.com[2], amirkamir@science.unhas.ac.id[3]*

Abstract

Pyraminx is a twisty puzzle in the shape of a tetrahedron with 4 sides. Pyraminx is played with the bottom completely flat and the front side facing the person holding the Pyraminx. The goal of the Pyraminx game is to randomize the colors, then return the scrambled colors to their original color positions by rotating the sides. This research does not discuss the most effective way of solving Pyraminx but focuses more on proving that movements in Pyraminx form group and that there is a group isomorphism from the group of Pyraminx movements to the S_{36} symmetry permutation subgroup in Pyraminx. First, it is proved that movements in Pyraminx form group using 2 methods, namely direct proof in Pyraminx (Pyaminx movement group) and performing permutations in set A containing numeric labels in the form of numbers 1 to 36 on Pyraminx facets by following the movements of Pyraminx (S_{36} symmetry permutation subgroup). Furthermore, it is proved that there is a group isomorphism from the Pyraminx movement group to the S_{36} symmetry permutation subgroup in Pyraminx.

Keywords: Group, S_{36} symmetry permutation group, subgroup, isomorphism, Pyraminx.

Abstrak

Pyraminx merupakan sebuah twisty puzzle yang berbentuk tetrahedron dengan 4 sisi. Pyraminx dimainkan dengan cara bagian bawah mendatar sepenuhnya dan bagian sisi depan menghadap kepada orang yang memegang Pyraminx. Tujuan dari permainan Pyraminx adalah mengacak warna, kemudian mengembalikan warna yang teracak ke posisi warna aslinya dengan cara memutar sisi-sisinya. Penelitian ini tidak membahas cara paling efektif dalam penyelesaian Pyraminx tetapi lebih difokuskan pada pembuktian bahwa pergerakan pada Pyraminx membentuk grup dan adanya isomorfisma grup dari grup pergerakan Pyraminx ke subgrup permutasi simetri S_{36} pada Pyraminx. Pertama, dibuktikan bahwa pergerakan pada Pyraminx membentuk grup dengan menggunakan 2 metode, yaitu pembuktian langsung di Pyraminx (grup pergerakan Pyraminx) dan melakukan permutasi pada himpunan A yang berisi label numerik berupa angka 1 sampai 36 pada facet Pyraminx dengan mengikuti pergerakan Pyraminx (subgrup permutasi simetri S_{36}). Selanjutnya, dibuktikan adanya isomorfisma grup dari grup pergerakan Pyraminx ke subgrup permutasi simetri S_{36} pada Pyraminx.

Kata kunci: Grup, grup permutasi simetri S_{36}, subgrup, isomorfisma, Pyraminx.

1. PENDAHULUAN

Teori grup merupakan bidang matematika mendasar dan penting yang memiliki jangkauan luas penerapan di berbagai bidang penelitian, termasuk fisika, kimia, ilmu komputer dan kriptografi [7]. Teori grup mempelajari tentang grup. Grup adalah suatu struktur aljabar yang terdiri dari sebuah himpunan dan operasi biner yang terdefinisi pada himpunan tersebut, serta himpunan beserta operasinya itu harus memenuhi beberapa sifat-sifat tertentu yang biasa disebut aksioma grup [5]. Permainan rubik adalah contoh objek konkret yang memiliki kaitan dengan teori grup. Rubik merupakan teka-teki matematika terkenal yang ditemukan oleh Erno Rubik pada tahun 1974 [14]. Rubik telah menyebabkan terciptanya banyak varian yang berbeda (Megaminx, Pyraminx, Tuttminx, Skewb diamond dan lainnya) [17]. Dengan menerapakan teori grup pada permainan rubik, banyak proposisi dan sifat-sifat rubik yang dapat dibahas [9].

Pyraminx merupakan sebuah twisty puzzle yang berbentuk tetrahedron dengan 4 sisi [3]. Pyraminx dimainkan dengan cara bagian bawah mendatar sepenuhnya dan bagian sisi depan menghadap kepada orang yang memegang Pyraminx. Tujuan dari permainan Pyraminx adalah mengacak warna, kemudian mengembalikan warna yang teracak ke posisi warna aslinya dengan cara memutar sisi-sisinya.

Permainan rubik memiliki kaitan dengan teori grup dan beberapa peneliti telah melakukan penelitian mengenai hal tersebut. Pada tahun 2012, Kurnianingtyas dkk [13] telah melakukan penelitian tentang Grup dan Homomorfisma Grup pada Rubik Revenge yang membuktikan adanya homomorfisma grup dari grup pergerakan rubik ke grup permutasi simetri S_{96} pada rubik revenge. Tahun 2016, Ihsan dkk [10] meneliti Aksi Grup dalam Pembentukan Homomorfisma pada Rubik's Cube yang memperlihatkan homomorfisma yang terbentuk akibat aksi grup ke himpunan facet-nya. Selain itu, pada tahun 2018, Safitri dkk [1] meneliti mengenai Isomorfisma Grup pada Rubik Revenge yang membuktikan adanya isomorfisma grup dari grup pergerakan rubik ke grup permutasi simetri pada rubik revenge.

Penelitian ini tidak membahas cara paling efektif dalam penyelesaian Pyraminx tetapi lebih difokuskan pada pembuktian bahwa pergerakan pada Pyraminx membentuk grup dan adanya isomorfisma grup dari grup pergerakan Pyraminx ke subgrup permutasi simetri S_{36} pada Pyraminx.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Bagian ini menjelaskan definisi dan teorema yang relevan dengan topik penelitian.

Definisi 2.1. [12]. Fungsi $f : A \to B$ disebut fungsi satu-satu (injektif) jika untuk sebarang $a, b \in A$ dan $a \neq b$ maka $f(a) \neq f(b)$. Ekuivalen dengan, fungsi satu-satu jika $f(a) = f(b)$ maka $a = b$.

Definisi 2.2. [16]. Fungsi $f : A \to B$ disebut fungsi pada (surjektif) jika untuk setiap $b \in B$ terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga $f(a) = b$.

Definisi 2.3. [12]. Fungsi $f : A \to B$ disebut fungsi bijektif jika keduanya fungsi satu-satu dan pada.

Definisi 2.4. [6]. Operasi biner $*$ pada himpunan S adalah fungsi $* : S \times S \to S$.

Definisi 2.5. [6]. Grup $(G,*)$ adalah himpunan G yang tertutup dibawah operasi biner $*$ sehingga aksioma-aksioma dibawah ini terpenuhi:

(i) Operasi biner $*$ bersifat asosiatif. Yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.

(ii) Terdapat elemen identitas e di G terhadap operasi biner $*$, sehingga untuk setiap $a \in G$ berlaku $e * a = a * e = a$.

(iii) Untuk setiap $a \in G$, terdapat elemen invers a di G yang dinotasikan a^{-1}, sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

Definisi 2.6. [15]. Grup $(G,*)$ disebut grup abel jika memenuhi hukum komutatif

$$x * y = y * x$$

untuk setiap $x, y \in G$.

Definisi 2.7. [6]. Jika H himpunan bagian dari grup G yang tertutup di bawah operasi biner dan jika H itu sendiri adalah grup, maka H adalah subgrup dari G. Jika H merupakan subgrup dari grup G dinotasikan dengan $H \leq G$ atau $G \geq H$ dan jika $H \leq G$ tetapi $H \neq G$ dinotasikan dengan $H < G$ atau $G > H$.
Definisi 2.8. [4]. Misalkan G grup dan $S \subseteq G$. Himpunan S dikatakan membangun G atau S adalah himpunan dari generator G jika $G = \langle S \rangle$ dimana setiap elemen di G dapat ditulis sebagai perkalian berhingga (di bawah operasi grup) dari S beserta inversnya.
Definisi 2.9. [6]. Permutasi pada himpunan A adalah fungsi $\phi : A \rightarrow A$ yang satu-satu dan pada.
Teorema 2.1. [6]. Misalkan A adalah himpunan tak kosong dan S_A adalah himpunan semua permutasi pada himpunan A. Maka S_A adalah grup di bawah operasi perkalian permutasi.
Definisi 2.10. [6]. Misalkan A adalah himpunan berhingga $\{1, 2, \ldots, n\}$. Grup dari semua permutasi pada A disebut grup simetri pada n angka dan dinotasikan dengan S_n.
Definisi 2.11. [15]. Jika $(G,*)$ dan $(H,\circ)$ adalah grup, maka fungsi $f : G \rightarrow$ H adalah sebuah homomorfisma jika

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y)$$

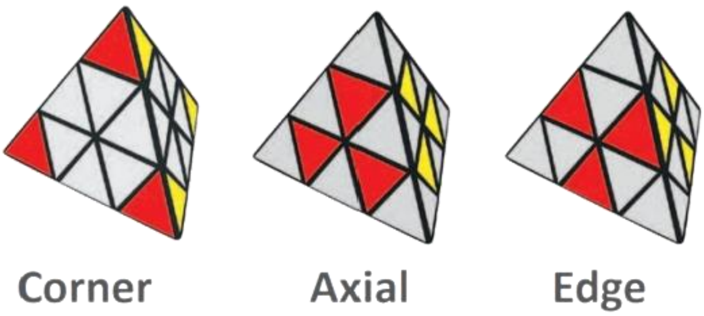
untuk setiap $x, y \in G$. Jika f juga fungsi bijektif, maka f disebut isomorfisma. Dua grup G dan H dikatakan isomorfik, dinotasikan $G \cong H$, jika terdapat isomorfisma antara $f : G \rightarrow H$.
Definisi 2.12. [2]. Misalkan G dan H adalah grup, dan misalkan $\phi : G \rightarrow H$ adalah homomorfisma. Kernel dari ϕ didefinisikan sebagai himpunan

$$Ker\ \phi = \{x \in G \mid \phi(x) = e'\}$$

dimana e' adalah identitas di H.
Teorema 2.2. [2]. Sebuah homomorfisma $\phi : G \rightarrow$ H adalah injektif jika dan hanya jika $Ker\ \phi = \{e\}$.

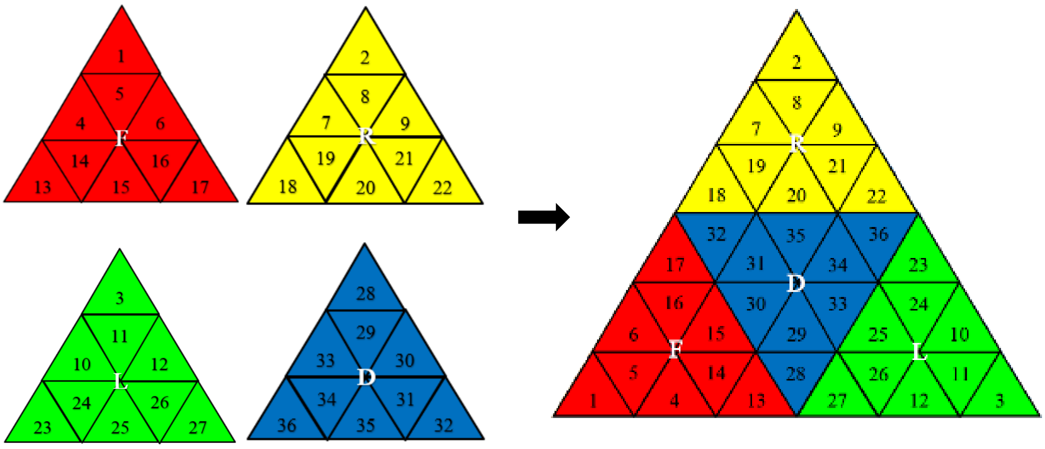
3. STRUKTUR DAN NOTASI PADA PYRAMINX

Pyraminx terdiri dari 4 corner tip yaitu sudut Pyraminx, 4 axial piece yaitu lapisan di bawah corner dan 6 edge piece yaitu bagian rusuk Pyraminx [3]. Kondisi awal Pyraminx dimisalkan dengan warna merah sebagai sisi depan (Front), warna kuning sebagai sisi kanan (Right), warna hijau sebagai sisi kiri (Left) dan warna biru sebagai sisi bawah (Down).



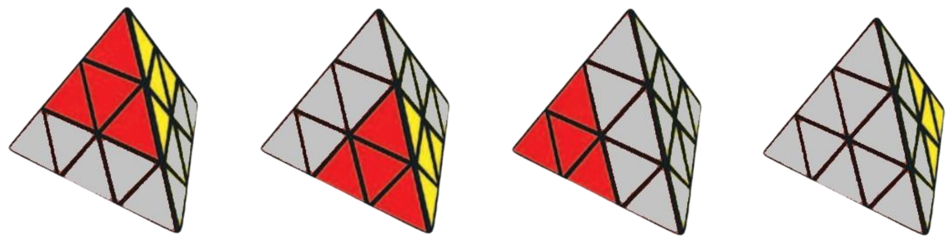
Gambar 3.1. Corner, Axial dan Edge pada Pyraminx

Pyraminx juga memiliki 36 facet. Facet merupakan permukaan/lapisan berbentuk segitiga kecil pada tiap sisi Pyraminx. Jika setiap facet pada sisi Pyraminx diberi label numerik berupa angka 1 sampai 36, akan diperoleh seperti gambar berikut [11].

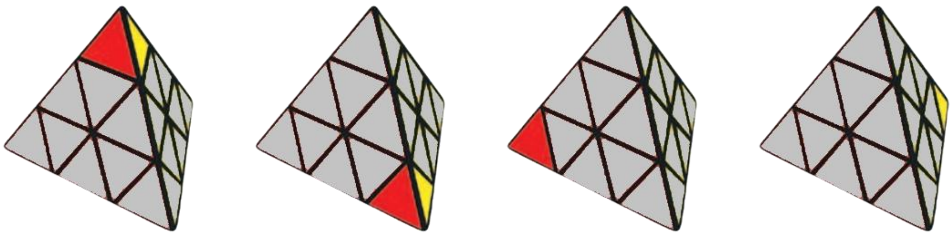


Gambar 3.2. Label numerik pada facet Pyraminx

Notasi yang digunakan pada Pyraminx yaitu U (2 sisi atas), R (2 sisi kanan), L (2 sisi kiri), B (2 sisi belakang), u (ujung bagian atas), r (ujung bagian kanan), l (ujung bagian kiri) dan b (ujung bagian belakang) [8].



U **(2 sisi atas)**	***R*** **(2 sisi kanan)**	***L*** **(2 sisi kiri)**	***B*** **(2 sisi belakang)**



u **(ujung bagian atas)**	***r*** **(ujung bagian kanan)**	***l*** **(ujung bagian kiri)**	***b*** **(ujung bagian belakang)**

Gambar 3.3. Notasi pada Pyraminx

4. HASIL UTAMA

4.1. Pergerakan Pyraminx

Definisi 4.1. Pergerakan merupakan gerakan memutar bagian Pyraminx sejauh 120°.

Jenis pergerakan Pyraminx yang digunakan yaitu pergerakan searah jarum jam. Notasi pergerakan Pyraminx mengikuti bagian Pyraminx yang mengalami pergerakan. Ada 9 gerakan dasar pada Pyraminx yaitu 0, U, R, L, B, u, r, l dan b. Selain gerakan dasar tersebut, ada juga gerakan lain yang berasal dari kombinasi gerakan dasar, yaitu gerakan memutar bagian Pyraminx sebanyak k kali dan gerakan memutar sisi dan ujung bagian Pyraminx secara bersamaan seperti Ub atau Lu, sehingga dari kombinasi gerakan dasar ini akan menambah jumlah pergerakan Pyraminx.

Tabel 4.1. Pergerakan pada Pyraminx

Notasi	Pergerakan
0	Pyraminx tidak mengalami pergerakan (elemen identitas)
U^k	Pergerakan 2 sisi atas Pyraminx sejauh 120° searah jarum jam sebanyak k kali
R^k	Pergerakan 2 sisi kanan Pyraminx sejauh 120° searah jarum jam sebanyak k kali
L^k	Pergerakan 2 sisi kiri Pyraminx sejauh 120° searah jarum jam sebanyak k kali
B^k	Pergerakan 2 sisi belakang Pyraminx sejauh 120° searah jarum jam sebanyak k kali
u^k	Pergerakan ujung bagian atas Pyraminx sejauh 120° searah jarum jam sebanyak k kali
r^k	Pergerakan ujung bagian kanan Pyraminx sejauh 120° searah jarum jam sebanyak k kali
l^k	Pergerakan ujung bagian kiri Pyraminx sejauh 120° searah jarum jam sebanyak k kali
b^k	Pergerakan ujung bagian belakang Pyraminx sejauh 120° searah jarum jam sebanyak k kali

Untuk $k = 0$, Pyraminx tidak mengalami pergerakan sehingga elemen yang dihasilkan adalah elemen identitas identitas dan dinotasikan dengan e. Pergerakan Pyraminx ini menghasilkan posisi yang sama dengan pergerakan saat $k = 3,6,9,12, \dots$.

Untuk $k = 1$, pergerakan Pyraminx menghasilkan posisi yang sama dengan pergerakan saat $k = 4,7,10,13, \dots$.

Untuk $k = 2$, pergerakan Pyraminx menghasilkan posisi yang sama dengan pergerakan saat $k = 5,8,11,14, \dots$.

Oleh karena itu, himpunan pergerakan Pyraminx terdiri dari gerakan dasar dan berbagai gerakan kombinasi dari gerakan dasar Pyraminx yang secara umum dapat dituliskan sebagai berikut.

Definisi 4.2. Misalkan $S = \{0, U, R, L, B, u, r, l, b\}$ adalah gerakan dasar Pyraminx, maka himpunan pergerakan Pyraminx dinotasikan dengan G yaitu:

$$G = \{{g_1}^{k_1}{g_2}^{k_2} \dots {g_n}^{k_n} \mid g_i \in S, k_i \in \{1,2\}, i \in \{1,2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}\}.$$

4.2. Grup

Untuk membuktikan bahwa pergerakan pada Pyraminx membentuk grup, ada 2 metode yang digunakan yaitu pembuktian langsung di Pyraminx (grup pergerakan Pyraminx) dan melakukan permutasi pada himpunan A yang berisi label numerik berupa angka 1 sampai 36 pada facet Pyraminx dengan mengikuti pergerakan Pyraminx (subgrup permutasi simetri S_{36}).

a) Pembuktian langsung di Pyraminx (grup pergerakan Pyraminx)

Sebelum membuktikan himpunan pergerakan Pyraminx adalah grup, terlebih dahulu diberikan sebuah operasi biner yang terdefinisi pada himpunan G.

Definisi 4.3. Didefinisikan operasi $*$ pada himpunan G yaitu untuk setiap $a, b \in$ G maka berlaku:

$$(a * b) = a(b)$$

dimana pergerakan b dilakukan terlebih dahulu kemudian pergerakan a.

Teorema 4.1. Jika G adalah himpunan pergerakan Pyraminx, maka G adalah grup di bawah operasi $*$ yang dinotasikan $(G,*)$.

Bukti:

(i) Akan ditunjukkan bahwa G tertutup di bawah operasi $*$.
Misalkan $a, b \in G$,

$$a = {g_1}^{a_1} {g_2}^{a_2} \dots {g_{n_1}}^{a_{n_1}}$$
$$b = {g_1}^{b_1} {g_2}^{b_2} \dots {g_{n_2}}^{b_{n_2}}$$

dimana $g_i \in S,\ a_i, b_i \in \{1,2\}, i \in \{1,2, \dots, n\}$ dan $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.
Diperoleh:

$$\begin{aligned}(a * b) &= \left({g_1}^{a_1} {g_2}^{a_2} \dots {g_{n_1}}^{a_{n_1}}\right) * \left({g_1}^{b_1} {g_2}^{b_2} \dots {g_{n_2}}^{b_{n_2}}\right) \\ &= {g_1}^{b_1} {g_2}^{b_2} \dots {g_{n_2}}^{b_{n_2}} {g_1}^{a_1} {g_2}^{a_2} \dots {g_{n_1}}^{a_{n_1}}\end{aligned}$$

a dan b adalah dua pergerakan Pyraminx,
maka hasil dari $a * b = {g_1}^{b_1} {g_2}^{b_2} \dots {g_{n_2}}^{b_{n_2}} {g_1}^{a_1} {g_2}^{a_2} \dots {g_{n_1}}^{a_{n_1}}$
juga merupakan pergerakan Pyraminx karena $g_1, g_2, \dots, g_n \in S \subseteq G$ dan $c_1, c_2, \dots, c_n \in \{1,2\}$. Jadi G tertutup di bawah operasi $*$.

(ii) Akan ditunjukkan bahwa operasi $*$ memenuhi sifat asosiatif.
Dari Definisi 4.3 diketahui bahwa jika a dan b adalah dua pergerakan Pyraminx maka pergerakan b dilakukan terlebih dahulu kemudian pergerakan yaitu $(a * b) = a(b)$.
Selanjutnya untuk menunjukkan operasi $*$ memenuhi sifat asosiatif $(a * (b * c)) = ((a * b) * c)$ maka diambil tiga pergerakan Pyraminx.
Misalkan $a, b, c \in G$.
Diperoleh:

$$\begin{aligned}(a * (b * c)) &= (a)(b * c) \\ &= a(b(c)) \\ ((a * b) * c) &= (a * b)(c) \\ &= a(b(c)).\end{aligned}$$

Terbukti $(a * (b * c)) = ((a * b) * c)$. Jadi operasi $*$ memenuhi sifat asosiatif.

(iii) Akan ditunjukkan bahwa terdapat elemen identitas e di G terhadap operasi biner $*$ sehingga untuk setiap $a \in G$ berlaku $e * a = a * e = a$.
Elemen identitas e didefinisikan dengan 0 yaitu ketika Pyraminx tidak melakukan pergerakan.
Ambil sebarang $a \in G$, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(0 * a) &= 0 * ({g_1}^{a_1} {g_2}^{a_2} \dots {g_n}^{a_n}) \\ &= {g_1}^{a_1} {g_2}^{a_2} \dots {g_n}^{a_n} \\ &= a \\ (a * 0) &= ({g_1}^{a_1} {g_2}^{a_2} \dots {g_n}^{a_n}) * 0 \\ &= {g_1}^{a_1} {g_2}^{a_2} \dots {g_n}^{a_n} \\ &= a.\end{aligned}$$

Diperoleh $0 * a = a * 0 = a$. Jadi G memiliki elemen identitas di bawah operasi $*$.

(iv) Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $a \in G$, terdapat elemen invers a di G yaitu a^{-1} sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.
Invers pada Pyraminx didefinisikan sebagai pergerakan yang mengembalikan posisi Pyraminx ke posisi identitas. Untuk $a_i = 1$ maka ${a_i}^{-1} = 2$ dan untuk $a_i = 2$ maka ${a_i}^{-1} = 1$ dimana $a_i \in \{1,2\}, i \in \{1,2, \dots, n\}, n \in \mathbb{N}$.

Contohnya invers dari R^2 adalah R.
Hal ini juga berlaku pada elemen yang tidak tunggal di G, misalnya U^2b. Invers dari U^2b adalah b^2U karena pergerakan inilah yang mengembalikan posisi Pyraminx ke posisi identitas.
Secara umum, elemen a^{-1} didefinisikan dengan

$$a^{-1} = {g_n}^{{a_n}^{-1}} \dots {g_2}^{{a_2}^{-1}} {g_1}^{{a_1}^{-1}}.$$

Ambil sebarang $a \in G$, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(a * a^{-1}) &= ({g_1}^{a_1}{g_2}^{a_2} \dots {g_n}^{a_n}) * \left({g_n}^{{a_n}^{-1}} \dots {g_2}^{{a_2}^{-1}} {g_1}^{{a_1}^{-1}}\right)\\ &= {g_n}^{{a_n}^{-1}} \dots {g_2}^{{a_2}^{-1}} {g_1}^{{a_1}^{-1}} {g_1}^{a_1}{g_2}^{a_2} \dots {g_n}^{a_n}\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a^{-1} * a) &= \left({g_n}^{{a_n}^{-1}} \dots {g_2}^{{a_2}^{-1}} {g_1}^{{a_1}^{-1}}\right) * ({g_1}^{a_1}{g_2}^{a_2} \dots {g_n}^{a_n} \ )\\ &= {g_1}^{a_1}{g_2}^{a_2} \dots {g_n}^{a_n} {g_n}^{{a_n}^{-1}} \dots {g_2}^{{a_2}^{-1}} {g_1}^{{a_1}^{-1}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

Diperoleh $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.
Jadi G memiliki invers di bawah operasi $*$.

Terbukti bahwa pergerakan Pyraminx adalah grup dibawah operasi $*$ yang dinotasikan dengan $(G,*)$.

Akan tetapi, grup pergerakan Pyraminx bukan grup abelian, karena terdapat $U, L \in G$ sehingga $[U * L = LU] \neq [L * U = UL]$, maka $(G,*)$ merupakan grup non-abelian.

b) Subgrup Permutasi Simetri S_{36}

Sebelum membuktikan bahwa permutasi pada himpunan facet Pyraminx membentuk subgrup permutasi simetri S_{36} terlebih dahulu diberikan penjelasan bagaimana proses terbentuknya grup permutasi simetri S_{36}.

Misalkan A adalah himpunan angka 1 sampai 36 yaitu $A = \{1,2,3, \dots ,36\}$. Permutasi pada himpunan A adalah fungsi bijeksi dari A ke A. Jika dilakukan permutasi pada himpunan A maka diperoleh himpunan semua permutasi-permutasi dari himpunan A yaitu $S_A = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots , \pi_{36!}\}$.

Definisi 4.4. Didefinisikan operasi $\circ$ (perkalian permutasi) pada himpunan A yaitu untuk setiap $\pi_a, \pi_b \in S_A$ maka berlaku:

$$(\pi_a \circ \pi_b) = \pi_a(\pi_b)$$

dimana π_b dilakukan terlebih dahulu kemudian π_a.

Berdasarkan Teorema 2.1., karena $A \neq \emptyset$ dan $S_A = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \dots , \pi_{36!}\}$ adalah himpunan semua permutasi-permutasi dari A, maka S_A adalah grup dibawah operasi perkalian permutasi. Dan berdasarkan Definisi 2.10., karena $A = \{1,2,3, \dots ,36\}$ maka S_A dapat juga disebut grup simetri S_{36}. Jadi, grup dari semua permutasi pada A dapat juga disebut grup permutasi simetri S_{36}.

Pyraminx memiliki $4 \times 9 = 36$ *facet*, dimana terdapat 4 sisi dan tiap sisi memiliki 9 facet. Jika setiap facet Pyraminx diberi label numerik berupa angka 1 sampai 36 maka diperoleh himpunan facet Pyraminx.

Definisi 4.5. Himpunan semua facet Pyraminx dinotasikan dengan B yaitu $B = \{1,2,3, \dots ,36\}$.

Selanjutnya, jika dilakukan permutasi pada himpunan B dengan mengikuti pergerakan Pyraminx maka diperoleh himpunan semua permutasi dari himpunan B.

Definisi 4.6. Misalkan $S' = \{\ \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8, \pi_9\}$ adalah permutasi dari gerakan dasar Pyraminx, maka himpunan semua permutasi dari himpunan B dinotasikan dengan H yaitu:

$$H = \left\{ {h_1}^{l_1}{h_2}^{l_2} \dots {h_n}^{l_n} \,\middle|\, h_i \in S', l_i \in \{1,2\}, i \in \{1,2, \dots , n\}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Saat melakukan permutasi pada himpunan B, tidak semua permutasi S_{36} dapat dilakukan karena bagian corner tidak mungkin dipetakan ke bagian axial. Contohnya pada permutasi dari U, facet angka 1 tidak bisa dipetakan ke facet angka 5. Kata 'dipetakan' disini sama artinya dengan posisi facet angka 1 tidak bisa ke posisi facet angka 5, sehingga grup yang dapat dibentuk dari permutasi pada himpunan B hanya subgrup dari S_{36}.

Teorema 4.2. Jika H adalah himpunan semua permutasi dari himpunan B maka H adalah subgrup permutasi simetri S_{36} dibawah operasi $\circ$ (perkalian permutasi) yang dinotasikan $(H,\circ)$.

Bukti:

- Akan ditunjukkan bahwa $H \subseteq S_{36}$.
  Karena semua elemen di H termuat dalam S_{36} maka $H \subseteq S_{36}$.
- Akan ditunjukkan bahwa H merupakan grup dibawah operasi $\circ$ (perkalian permutasi).

(i) Akan ditunjukkan bahwa H tertutup di bawah operasi $\circ$.
Misalkan $\phi_a, \phi_b \in H$,

$$\phi_a = {h_1}^{a_1}{h_2}^{a_2} \dots {h_{n_1}}^{a_{n_1}}$$
$$\phi_b = {h_1}^{b_1}{h_2}^{b_2} \dots {h_{n_2}}^{b_{n_2}}$$

dimana $h_i \in S'$, $a_i, b_i \in \{1,2\}$, $i \in \{1,2,\dots,n\}$ dan $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.
Diperoleh:

$$\begin{aligned}(\phi_a \circ \phi_b) &= \left({h_1}^{a_1}{h_2}^{a_2} \dots {h_{n_1}}^{a_{n_1}}\right) \circ \left({h_1}^{b_1}{h_2}^{b_2} \dots {h_{n_2}}^{b_{n_2}}\right)\\ &= {h_1}^{b_1}{h_2}^{b_2} \dots {h_{n_2}}^{b_{n_2}}{h_1}^{a_1}{h_2}^{a_2} \dots {h_{n_1}}^{a_{n_1}}\end{aligned}$$

ϕ_a dan ϕ_b adalah dua permutasi pada Pyraminx,
maka hasil dari

$$\phi_a \circ \phi_b = {h_1}^{b_1}{h_2}^{b_2} \dots {h_{n_2}}^{b_{n_2}}{h_1}^{a_1}{h_2}^{a_2} \dots {h_{n_1}}^{a_{n_1}}$$

juga merupakan permutasi pada Pyraminx karena $h_1, h_2, \dots, h_n \in S' \subseteq H$ dan $c_1, c_2, \dots, c_n \in \{1,2\}$. Jadi H tertutup di bawah operasi $\circ$.

(ii) Karena S_{36} merupakan grup maka S_{36} bersifat asosiatif yaitu untuk setiap elemen di S_{36} berlaku $(\phi_a \circ (\phi_b \circ \phi_c)) = ((\phi_a \circ \phi_b) \circ \phi_c)$, sehingga tentu saja sifat asosiatif juga berlaku untuk setiap elemen di $H \subseteq S_{36}$.

(iii) Akan ditunjukkan bahwa terdapat elemen identitas $e \in H$ sehingga untuk setiap $\phi_a \in H$ berlaku $e \circ \phi_a = \phi_a \circ e = \phi_a$.
Elemen identitas e didefinisikan dengan π_1 yaitu permutasi identitas.
Ambil sebarang $\phi_a \in H$, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(\pi_1 \circ \phi_a) &= \pi_1 \circ ({h_1}^{a_1}{h_2}^{a_2} \dots {h_n}^{a_n})\\ &= {h_1}^{a_1}{h_2}^{a_2} \dots {h_n}^{a_n}\\ &= \phi_a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\phi_a \circ \pi_1) &= ({h_1}^{a_1}{h_2}^{a_2} \dots {h_n}^{a_n}) \circ \pi_1\\ &= {h_1}^{a_1}{h_2}^{a_2} \dots {h_n}^{a_n}\\ &= \phi_a.\end{aligned}$$

Jadi H memiliki elemen identitas di bawah operasi $\circ$.

(iv) Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $\phi_a \in H$, terdapat elemen invers ϕ_a di H yaitu ${\phi_a}^{-1}$ sehingga $\phi_a \circ {\phi_a}^{-1} = {\phi_a}^{-1} \circ \phi_a = \pi_1$.
Invers permutasi pada Pyraminx didefinisikan sebagai permutasi yang mengembalikan posisi Pyraminx ke posisi identitas. Untuk $a_i = 1$ maka ${a_i}^{-1} = 2$ dan untuk $a_i = 2$ maka ${a_i}^{-1} = 1$ dimana $a_i \in \{1,2\}, i \in \{1,2,\dots,n\}, n \in \mathbb{N}$.
Contohnya invers dari π_1 adalah ${\pi_1}^2$.
Hal ini juga berlaku pada elemen yang tidak tunggal di H, misalnya ${\pi_4}^2\pi_5\pi_2$. Invers dari ${\pi_4}^2\pi_5\pi_2$ adalah ${\pi_2}^2{\pi_5}^2\pi_4$ karena permutasi ini yang akan mengembalikan posisi Pyraminx ke posisi identitas.
Secara umum, elemen ${\phi_a}^{-1}$ didefinisikan dengan

$$\phi_a{}^{-1} = h_n{}^{a_n{}^{-1}} \dots h_2{}^{a_2{}^{-1}} h_1{}^{a_1{}^{-1}}.$$

Ambil sebarang $\phi_a \in H$, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}(\phi_a \circ \phi_a{}^{-1}) &= (h_1{}^{a_1} h_2{}^{a_2} \dots h_n{}^{a_n}) \circ \left(h_n{}^{a_n{}^{-1}} \dots h_2{}^{a_2{}^{-1}} h_1{}^{a_1{}^{-1}}\right)\\ &= h_n{}^{a_n{}^{-1}} \dots h_2{}^{a_2{}^{-1}} h_1{}^{a_1{}^{-1}} h_1 h_1{}^{a_1} h_2{}^{a_2} \dots h_n{}^{a_n}\\ &= \pi_1\\ (\phi_a{}^{-1} \circ \phi_a) &= \left(h_n{}^{a_n{}^{-1}} \dots h_2{}^{a_2{}^{-1}} h_1{}^{a_1{}^{-1}}\right) \circ (h_1{}^{a_1} h_2{}^{a_2} \dots h_n{}^{a_n})\\ &= h_1{}^{a_1} h_2{}^{a_2} \dots h_n{}^{a_n} h_n{}^{a_n{}^{-1}} \dots h_2{}^{a_2{}^{-1}} h_1{}^{a_1{}^{-1}}\\ &= \pi_1.\end{aligned}$$

Diperoleh $\phi_a \circ \phi_a{}^{-1} = \phi_a{}^{-1} \circ \phi_a = \pi_1$.

Jadi H memiliki invers di bawah operasi $\circ$.

Terbukti bahwa H adalah subgrup permutasi simetri S_{36} dibawah operasi $\circ$ (perkalian permutasi) yang dinotasikan $(H,\circ)$.

4.3. Isomorfisma Grup pada *Pyraminx*

Selanjutnya akan dibuktikan adanya isomorfisma grup pada Pyraminx.

Teorema 4.3. Misalkan $G = \{g_1{}^{k_1} g_2{}^{k_2} \dots g_n{}^{k_n} \mid g_i \in S, k_i \in \{1,2\}, i \in \{1,2,\dots,n\}, n \in \mathbb{N}\}$ adalah grup pergerakan Pyraminx dengan generator $S = \{0, U, R, L, B, u, r, l, b\}$ dan $H = \{h_1{}^{l_1} h_2{}^{l_2} \dots h_n{}^{l_n} \mid h_i \in S', l_i \in \{1,2\}, i \in \{1,2,\dots,n\}, n \in \mathbb{N}\}$ adalah subgrup permutasi simetri S_{36} dengan generator $S' = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8, \pi_9\}$. Didefinisikan $\theta : G \to H$ dengan

$$\theta(g_1{}^{a_1} g_2{}^{a_2} \dots g_n{}^{a_n}) = \theta(g_1)^{a_1} \theta(g_2)^{a_2} \dots \theta(g_n)^{a_n}$$

dimana $\theta(0) = \pi_1$, $\theta(U) = \pi_2$, $\theta(R) = \pi_3$, $\theta(L) = \pi_4$, $\theta(B) = \pi_5$, $\theta(u) = \pi_6$, $\theta(r) = \pi_7$, $\theta(l) = \pi_8$ dan $\theta(b) = \pi_9$. θ merupakan isomorfisma grup yang dinotasikan dengan $G \cong H$.

Bukti:

Diketahui operasi biner pada grup G didefinisikan dengan operasi $*$ yaitu untuk setiap $a, b \in G$ maka berlaku $(a * b) = a(b)$ dimana pergerakan b dilakukan terlebih dahulu kemudian pergerakan a dan operasi biner pada grup H didefinisikan dengan operasi $\circ$ (perkalian permutasi) yaitu untuk setiap $\pi_a, \pi_b \in H$ maka berlaku $(\pi_a \circ \pi_b) = \pi_a(\pi_b)$ dimana π_b dilakukan terlebih dahulu kemudian π_a.

Syarat dua grup disebut isomorfisma jika dua grup tersebut terdapat sebuah homomorfisma dan juga fungsi bijektif.

(i) Akan ditunjukkan bahwa θ merupakan homomorfisma grup.
Homomorfisma grup jika: $\theta(a * b) = \theta(a) \circ \theta(b)$ untuk setiap $a, b \in G$.
Ambil sebarang $a, b \in G$,

$$a = g_1{}^{a_1} g_2{}^{a_2} \dots g_{n_1}{}^{a_{n_1}}$$
$$b = g_1{}^{b_1} g_2{}^{b_2} \dots g_{n_2}{}^{b_{n_2}}$$

dimana $g_i \in S$, $a_i, b_i \in \{1,2\}$, $i \in \{1,2,\dots,n\}$ dan $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$.
Maka

$$\begin{aligned}\theta(a * b) &= \theta(g_1{}^{a_1} g_2{}^{a_2} \dots g_{n_1}{}^{a_{n_1}} * g_1{}^{b_1} g_2{}^{b_2} \dots g_{n_2}{}^{b_{n_2}})\\ &= \theta(g_1{}^{b_1} g_2{}^{b_2} \dots g_{n_2}{}^{b_{n_2}} g_1{}^{a_1} g_2{}^{a_2} \dots g_{n_1}{}^{a_{n_1}})\\ &= \theta(g_1)^{b_1} \theta(g_2)^{b_2} \dots \theta(g_{n_2})^{b_{n_2}} \theta(g_1)^{a_1} \theta(g_2)^{a_2} \dots \theta(g_{n_1})^{a_{n_1}}\\ \theta(a) \circ \theta(b) &= \theta(g_1{}^{a_1} g_2{}^{a_2} \dots g_{n_1}{}^{a_{n_1}}) \circ \theta(g_1{}^{b_1} g_2{}^{b_2} \dots g_{n_2}{}^{b_{n_2}})\\ &= \theta(g_1)^{a_1} \theta(g_2)^{a_2} \dots \theta\left(g_{n_1}\right)^{a_{n_1}} \circ \theta(g_1)^{b_1} \theta(g_2)^{b_2}\\ &\quad \dots \theta\left(g_{n_2}\right)^{b_{n_2}}\\ &= \theta(g_1)^{b_1} \theta(g_2)^{b_2} \dots \theta\left(g_{n_2}\right)^{b_{n_2}} \theta(g_1)^{a_1} \theta(g_2)^{a_2} \dots \theta\left(g_{n_1}\right)^{a_{n_1}}.\end{aligned}$$

Diperoleh $\theta(a * b) = \theta(a) \circ \theta(b)$.
Jadi θ merupakan homomorfisma grup.

(ii) Akan ditunjukkan bahwa θ merupakan fungsi bijektif.

- Pertama, akan ditunjukkan bahwa θ adalah fungsi satu-satu.
  Misalkan $a \in G$,
  $$a = {g_1}^{a_1}{g_2}^{a_2} \dots {g_n}^{a_n}$$
  dimana $g_i \in S,\ a_i \in \{1,2\}, i \in \{1,2, \dots, n\}$ dan $n \in \mathbb{N}$.
  Maka
  $$\begin{aligned} Ker\ \theta &= \{a \in G \mid \theta(a) = \pi_1\} \\ &= \{{g_1}^{a_1}{g_2}^{a_2} \dots {g_n}^{a_n} \in G \mid \theta({g_1}^{a_1}{g_2}^{a_2} \dots {g_n}^{a_n}) = \pi_1\} \\ &= \{{g_1}^{a_1}{g_2}^{a_2} \dots {g_n}^{a_n} \in G \mid \theta(0) = \pi_1\} \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$
  Diperoleh $Ker\ \theta = \{0\}$ dimana 0 adalah elemen identitas di G.
  Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa anggota $Ker\ \theta$ hanya satu yaitu 0.
  Dengan menggunakan metode kontradiksi, andaikan terdapat elemen bukan 0 yang pemetaannya π_1.
  Misalkan $x \in G, x \neq 0$ dan $\theta(x) = \pi_1$.
  Maka
  $$\begin{aligned} Ker\ \theta &= \{a \in G \mid \theta(a) = \pi_1\} \\ &= \{{g_1}^{a_1}{g_2}^{a_2} \dots {g_n}^{a_n} \in G \mid \theta({g_1}^{a_1}{g_2}^{a_2} \dots {g_n}^{a_n}) = \pi_1\} \\ &= \{0, x\} \end{aligned}$$
  karena $\theta(0) = \pi_1$ dan $\theta(x) = \pi_1$.
  Perhatikan bahwa,
  $$\theta({g_1}^{a_1}{g_2}^{a_2} \dots {g_n}^{a_n}) = \theta(g_1)^{a_1}\theta(g_2)^{a_2} \dots \theta(g_n)^{a_n}$$
  dimana $\theta(0) = \pi_1, \theta(U) = \pi_2, \theta(R) = \pi_3, \theta(L) = \pi_4, \theta(B) = \pi_5, \theta(u) = \pi_6, \theta(r) = \pi_7, \theta(l) = \pi_8$ dan $\theta(b) = \pi_9$.
  Pada definisi diatas ditemukan fakta bahwa hanya $\theta(0) = \pi_1$ artinya hanya elemen 0 yang pemetaannya π_1. Hal ini kontradiktif dengan asumsi bahwa terdapat $x \neq 0$ dan $\theta(x) = \pi_1$ sehingga pengandaian perlu diingkari. Jadi, $x = 0$. Terbukti bahwa anggota $Ker\ \theta$ hanya satu yaitu 0.
  Berdasarkan Teorema 2.4, karena $Ker\ \theta = \{0\}$ maka θ merupakan fungsi satu-satu.
- Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa θ adalah fungsi pada.
  Untuk menunjukkan θ adalah fungsi pada maka harus ditunjukkan untuk setiap $\pi_a \in H$ terdapat $x \in G$ sehingga $\theta(x) = \pi_a$.
  Ambil sebarang $\pi_a \in H$,
  $$\pi_a = {h_1}^{a_1}{h_2}^{a_2} \dots {h_n}^{a_n}$$
  dimana $h_j \in S', a_j \in \{1,2\}, j \in \{1,2, \dots, n\}$ dan $n \in \mathbb{N}$.
  Berdasarkan definisi $\theta : G \to H$, masing-masing h_j dapat ditentukan g_i sehingga $\theta(g_i) = h_j$ untuk suatu j.

  Pilih $x \in G$,
  $$x = {g_1}^{b_1}{g_2}^{b_2} \dots {g_n}^{b_n}$$
  dimana $g_i \in S,\ b_i \in \{1,2\}, i \in \{1,2, \dots, n\}$ dan $n \in \mathbb{N}$.
  Perhatikan bahwa,
  $$x = {g_1}^{b_1}{g_2}^{b_2} \dots {g_n}^{b_n}$$
  maka untuk setiap h_j dapat ditentukan g_i sehingga
  $$\begin{aligned} \theta(x) &= \theta\left({g_1}^{b_1}{g_2}^{b_2} \dots {g_n}^{b_n}\right) \\ &= \theta(g_1)^{b_1}\theta(g_2)^{b_2} \dots \theta(g_n)^{b_n} \\ &= {h_1}^{a_1}{h_2}^{a_2} \dots {h_n}^{a_n} \\ &= \pi_a. \end{aligned}$$
  Diperoleh $\theta(x) = \pi_a$.

Karena untuk setiap $\pi_a \in H$ terdapat $x \in G$ sehingga $\theta(x) = \pi_a$ maka θ adalah fungsi pada.

θ adalah fungsi satu-satu dan pada, maka θ merupakan fungsi bijektif.

Karena θ merupakan homomorfisma grup dan juga fungsi bijektif maka dapat disimpulkan bahwa θ merupakan isomorfisma grup dari G ke H. Jadi terbukti bahwa $G \cong H$.

5. KESIMPULAN

Misalkan $S = \{0, U, R, L, B, u, r, l, b\}$ adalah gerakan dasar Pyraminx, maka himpunan pergerakan Pyraminx dinotasikan dengan G yaitu:

$$G = \{{g_1}^{k_1}{g_2}^{k_2} \dots {g_n}^{k_n} \mid g_i \in S, k_i \in \{1,2\}, i \in \{1,2,\dots,n\}, n \in \mathbb{N}\}.$$

G adalah grup dengan operasi $*$ yang didefinisikan untuk setiap $a, b \in G$ maka berlaku $(a * b) = a(b)$ dimana pergerakan b dilakukan terlebih dahulu kemudian pergerakan a. Grup tersebut dinotasikan $(G,*)$.

Misalkan A adalah himpunan semua facet Pyraminx yang diberi label numerik berupa angka 1 sampai 36 yaitu $A = \{1,2,3,\dots,36\}$ dan $S' = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8, \pi_9\}$ adalah permutasi dari gerakan dasar Pyraminx, maka himpunan semua permutasi dari himpunan A dinotasikan dengan H yaitu:

$$H = \{{h_1}^{l_1}{h_2}^{l_2} \dots {h_n}^{l_n} \mid h_i \in S', l_i \in \{1,2\}, i \in \{1,2,\dots,n\}, n \in \mathbb{N}\}.$$

H adalah subgrup permutasi simetri S_{36} dengan operasi $\circ$ (perkalian permutasi) yang didefinisikan untuk setiap $\pi_a, \pi_b \in H$ maka berlaku $(\pi_a \circ \pi_b) = \pi_a(\pi_b)$ dimana π_b dilakukan terlebih dahulu kemudian π_a. Grup tersebut dinotasikan $(H,\circ)$.

Misalkan $G = \{{g_1}^{k_1}{g_2}^{k_2} \dots {g_n}^{k_n} \mid g_i \in S, k_i \in \{1,2\}, i \in \{1,2,\dots,n\}, n \in \mathbb{N}\}$ adalah grup pergerakan Pyraminx dengan generator $S = \{0, U, R, L, B, u, r, l, b\}$ dan $H = \{{h_1}^{l_1}{h_2}^{l_2} \dots {h_n}^{l_n} \mid h_i \in S', l_i \in \{1,2\}, i \in \{1,2,\dots,n\}, n \in \mathbb{N}\}$ adalah subgrup permutasi simetri S_{36} dengan generator $S' = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8, \pi_9\}$. Terdapat isomorfisma grup dari G ke H yang didefinisikan $\theta : G \to H$ dengan

$$\theta({g_1}^{a_1}{g_2}^{a_2} \dots {g_n}^{a_n}) = \theta(g_1)^{a_1}\theta(g_2)^{a_2} \dots \theta(g_n)^{a_n}$$

dimana $\theta(0) = \pi_1$, $\theta(U) = \pi_2$, $\theta(R) = \pi_3$, $\theta(L) = \pi_4$, $\theta(B) = \pi_5$, $\theta(u) = \pi_6$, $\theta(r) = \pi_7$, $\theta(l) = \pi_8$ dan $\theta(b) = \pi_9$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Abdy, M., Sukarna & Safitri, N. H., 2018. *Isomorfisma Grup pada Rubik Revenge*. Skripsi. Universitas Negeri Makassar, Makassar.

[2] Bhattacharya, P. B., Jain, S. K. & Nagpaul, S. R. 1995. *Basic Abstract Algebra Second Edition*. United Kingdom: Cambridge University Press.

[3] Brata, A. 2010. *Langkah Mudah Menjadi Master Rubik*. Jakarta: Bukune.

[4] Chen, J. 2004. *Group Theory and the Rubik's Cube*.

[5] Erawaty, N. & Amir, A. K. 2016. Struktur Aljabar. Universitas Hasanuddin: Pusat Kajian Media dan Sumber Belajar LKPP.

[6] Fraleigh, J. B. & Brand N. E. 2021. *A First Course in Abstract Algebra Eighth Edition*. Hoboken: Pearson Education.

[7] Gu, Y., 2023. Introduction of Several Special Groups and Their Applications to Rubik's Cube. *Highlights in Science, Engineering and Technology,* 47, 172–175. https://doi.org/10.54097/hset.v47i.8186

[8] https://www.worldcubeassociation.org/regulations/translations/indonesian/#article- 12-notation. (diakses 3 Desember 2022)

[9] Hu, W., 2023. Applying the Group Theory to Rubik's Cube. *Highlights in Science, Engineering and Technology*, 47, 122–125. https://doi.org/10.54097/hset.v47i.8174

[10] Ihsan, M. K., Haryanto, L. & Erawaty, N., 2016. *Aksi Grup dalam Pembentukan Homomorfisma pada Rubik's Cube*. Skripsi. Universitas Hasanuddin, Makassar.
[11] Joyner, D. 2008. *Adventures in Group Theory: Rubik's Cube, Merlin's Machine, and Other Mathematical Toys*. Earth Island Institute.
[12] Judson, T. W. 2014. *Abstract Algebra Theory and Applications*. Stephen F. Austin State University.
[13] Kurnianingtyas, D. T., Mas'oed, T. W. & Aliatiningtyas, N., 2012. *Grup dan Homomorfisma Grup pada Rubik Revenge*. Skripsi. Institut Pertanian Bogor, Bogor.
[14] Lyu, Z., Liu, Z., Khojandi, A., & Yu, A. J., 2022. Q-learning and Traditional Methods on Solving the Pocket Rubik's Cube. *Computers & Industrial Engineering*, Volume 171, 108452, ISSN 0360-8352, https://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108452.
[15] Rotman, J. J. 2003. *Advanced Modern Algebra*. Prentice Hall Inc.
[16] Sharma, R. K., Shah, S. K. & Shankar, A. G. 2011. *Algebra 1 A Basic Course in Abstract Algebra*. India: Pearson Education in South Asia.
[17] Sikiric, M. D., 2020. A Variation on the Rubik's Cube. *Proceedings of the 3rd Croatian Combinatorial Days*. https://doi.org/10.5592/CO/CCD.2020.03