

Model Matematika Penyebaran Virus HIV Melalui Kontak Sex

Budi Nurwahyu*

Abstrak

Di dalam paper ini dikemukakan tentang model penyebaran virus HIV melalui kontak sex pada daerah tertutup antara populasi Normal dan populasi Penjaja sex. Pemodelan dilakukan dengan menggunakan sistem persamaan diferensial linier dengan melibatkan variabel besarnya populasi Normal yang Suceptible($S_N(t)$), populasi Normal yang terinfeksi($I_N(t)$), populasi Penjaja Sex yang suseptible($S_P(t)$) dan populasi Penjaja Sex yang terinfeksi($I_P(t)$). Pada model ini hanya menggunakan populasi Normal dan Populasi Penjaja Sex. Dianggap tidak ada perbedaan kelamin baik dari populasi Normal maupun populasi Penjaja Sex. Intensitas berkembangnya populasi yang terinfeksi ditunjukkan melalui Basic Reproduction Number(BRN) serta ditunjukkan pula pengaruh BRN terhadap kestabilan asimtotik pada keadaan non endemik(Disease Free Equilibrium) maupun yang endemik

Keywords: *Basic Reproduction Number, Disease Free Equilibrium, suceptible, infective.*

1. Pendahuluan

Kasus Penyakit Menular Seksual(PMS) dan HIV/AIDS cukup banyak terjadi di kalangan remaja. Berbagai jenis PMS serta HIV/AIDS sangat berpengaruh pada tingkat kesehatan seseorang pada umumnya dan kondisi kesehatan reproduksi pada khususnya karena pada umumnya berbagai penyakit PMS dan HIV/AIDS berkaitan langsung dengan sistem reproduksi manusia. Bahkan HIV/AIDS dapat berdampak pada kematian.

Kasus HIV/AIDS bagaikan gunung es; yang nampak hanyalah permukaan belaka namun kasus yang sesungguhnya jauh lebih besar daripada kasus yang nampak. Penyakit ini merupakan penyakit yang mematikan karena sampai saat ini belum ditemukan obat penyembuhannya. Namun demikian sebenarnya pencegahan terhadap penyakit ini relatif mudah asalkan kita mengetahui caranya.

Tingkat penularan virus HIV/AIDS di Indonesia sangat tinggi, pada 2010 jumlah penderita HIV/AIDS di Indonesia diperkirakan sudah mencapai 5 juta orang. Penularan yang sangat pesat itu, terjadi terutama akibat penggunaan jarum suntik secara bersama dan *free sex* (seks bebas).

Penularan virus HIV/AIDS yang paling efektif yaitu melalui jarum suntik. Kalau berhubungan seksual dengan penderita HIV/AIDS, kemungkinan resiko tertular HIV/AIDS 0,1 persen. Sedangkan jika bertukaran jarum suntik, resiko tertular virus HIV/AIDS hingga 20 persen. Karena itu, lewat pertukaran jarum suntik ini, resiko tertular virus HIV/AIDS sangat besar.

Perlu diketahui, kasus AIDS di Indonesia pertama kali dilaporkan tahun 1987 sedangkan yang dilaporkan hingga 31 Desember 2004, sebanyak 3.368 penderita HIV dan 2.682 penderita AIDS dengan 27,59 % di antaranya telah meninggal dunia. Sementara

* Staf Pengajar pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar

estimasi ODHA tahun 2002 sebanyak 90.000 - 130.000 penderita dengan perkiraan kelompok rawan tertular HIV 12 - 19 juta orang. Adapun kelompok yang rawan tertular HIV ini antara lain napza suntik sebanyak 38 %, pelanggan penjaja seks 30 %, pasangan dari Risti (Risiko Tinggi) 14 %, gay 9% , penjaja seks 8 % dan waria 1 persen.

Lain pula yang terjadi di Papua, angka kumulatif penderita HIV/AIDS yang dikeluarkan Dinas Kesehatan Provinsi Papua per April 2005 berjumlah 1.874 kasus, 33 orang di antaranya adalah anak-anak. Data tersebut menunjukkan anak-anak di bawah lima tahun juga sudah terinfeksi penyakit yang sebenarnya tak pantas diidapnya.

Sebagian besar penderita HIV/AIDS di Papua tertular virus tersebut karena hubungan seksual. Berbeda dengan di tempat lain yang mengalami penularan HIV/AIDS melalui jarum suntik atau transfusi darah.

Model matematika penyebaran virus HIV/AIDS pertama kali dikemukakan pada tahun 80 an, seperti pada paper [5,6,7,8,9,10,11]. Kebanyakan pemodelan penyebaran HIV/AIDS menggunakan populasi tunggal dengan besar populasi yang konstan, yang merupakan bagian dari pemodelan penyebaran penyakit epidemik [5,7,12]. Pada penelitian ini, menggunakan dua jenis populasi yaitu populasi Normal dan populasi Penjaja Sex

2. Model Matematika

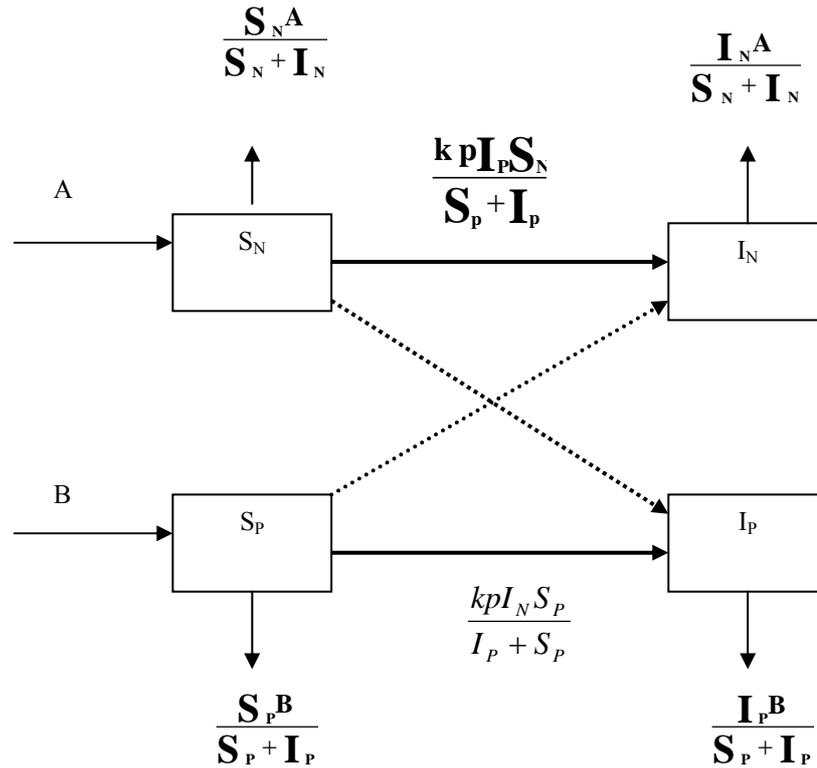
Diasumsikan sebagai berikut:

- A1. Untuk setiap tahun terdapat sebanyak A (konstan) yang masuk menjadi populasi normal yang susceptible
- A2. Setiap individu susceptible dari populasi normal rata-rata melakukan kontak random dengan populasi penjaja sex sebanyak k kali pertahun
- A3. Peluang setiap kontak sex individu susceptible dari populasi normal dengan individu dari populasi penjaja sex yang terinfeksi sehingga individu susceptible dari populasi normal tersebut menjadi terinfeksi adalah p
- A4. Untuk setiap tahun terdapat sebanyak B (konstan) yang masuk menjadi populasi penjaja sex yang susceptible
- A5. Jumlah individu yang keluar dari populasi susceptible normal dan populasi normal yang terinfeksi adalah sama dengan A , dan sebanding dengan besarnya proporsi masing-masing dalam populasi normal
- A6. Jumlah individu yang keluar dari populasi susceptible Penjaja Sex dan populasi Penjaja Sex yang terinfeksi adalah sama dengan B , dan sebanding dengan besarnya proporsi masing-masing dalam populasi Penjaja Sex.

Dari asumsi A1 dan A2, maka banyaknya populasi Normal yang *susceptible* berubah menjadi populasi Normal yang *terinfeksi* adalah $\frac{k p I_p S_N}{S_p + I_p}$, dimana $\frac{I_p}{S_p + I_p}$ proporsi

individu populasi Normal susceptible melakukan kontak dengan populasi Penjaja Sex yang terinfeksi. Sedangkan banyaknya total kontak yang dilakukan oleh I_N adalah $k I_N$ dengan proporsi kontak dengan PSK adalah $1/K_p$, maka total populasi PSK yang akan terinfeksi menjadi $p k I_N / K_p$. Demikian pula dengan menggunakan asumsi A5 dan A6. Dari asumsi A7, banyaknya individu dari populasi Normal susceptible yang keluar/ mati adalah $\frac{S_N A}{S_N + I_N}$ dan banyaknya individu dari populasi Normal terinfeksi yang keluar/ mati adalah

$\frac{I_N^A}{S_N + I_N}$. Dari asumsi A6, banyaknya individu dari populasi Penjaja Sex susceptible yang keluar/ mati adalah $\frac{S_P^B}{S_P + I_P}$ dan banyaknya individu dari populasi Normal terinfeksi yang keluar/ mati adalah $\frac{I_P^B}{S_P + I_P}$



Gambar 1. Diagram Kompartmen model:

Garis titik-titik menunjukkan kontak sex antara populasi Normal susceptible(S_N) dengan populasi Penjaja Sex yang terinfeksi(I_P) dan antara populasi Penjaja Sex yang susceptible(S_P) dengan populasi Normal yang terinfeksi(I_N).

Dari diagram kompartmen model diatas, dapat dirumuskan model matematikanya sebagai berikut:

$$\frac{dS_N(t)}{dt} = A - \frac{k p I_P S_N}{S_P + I_P} - \frac{S_N^A}{S_N + I_N} \tag{1}$$

$$\frac{dI_N(t)}{dt} = \frac{k p I_P S_N}{S_P + I_P} - \frac{I_N^A}{S_N + I_N} \tag{2}$$

$$\frac{dS_P(t)}{dt} = B - \frac{k p I_N S_P}{S_P + I_P} - \frac{S_P^B}{S_P + I_P} \tag{3}$$

$$\frac{dI_P(t)}{dt} = \frac{k p I_N S_P}{S_P + I_P} - \frac{I_P^B}{S_P + I_P} \tag{4}$$

Dimana $S_N(0) \geq 0, I_N(0) \geq 0, S_P(0) \geq 0, I_P(0) \geq 0$

3. Analisis model

Dari persamaan (1) dan (2) dapat diperoleh $\frac{dS_N(t)}{dt} + \frac{dI_N(t)}{dt} = 0$, akibatnya $S_N(t) + I_N(t) = K_N$, berarti besar populasi Normal adalah konstan. Demikian juga dari persamaan (3) dan (4) dapat diperoleh $\frac{dS_P(t)}{dt} + \frac{dI_P(t)}{dt} = 0$, akibatnya $S_P(t) + I_P(t) = K_P$, berarti besar populasi Penjaja Sex adalah konstan. Sehingga model diatas menjadi berbentuk:

$$\frac{dS_N(t)}{dt} = A - \frac{k p I_P(t) S_N(t)}{K_P} - \frac{S_N(t) A}{K_N} \quad (1')$$

$$\frac{dI_N(t)}{dt} = \frac{k p I_P(t) S_N(t)}{K_P} - \frac{I_N(t) A}{K_N} \quad (2')$$

$$\frac{dS_P(t)}{dt} = B - \frac{k p I_N(t) S_P(t)}{K_P} - \frac{S_P(t) B}{K_P} \quad (3')$$

$$\frac{dI_P(t)}{dt} = \frac{k p I_N(t) S_P(t)}{K_P} - \frac{I_P(t) B}{K_P} \quad (4')$$

Titik stasioner $E = (S_N^*, I_N^*, S_P^*, I_P^*)$ dan solusi *non endemiknya* adalah: $E_0 = (K_N, 0, K_P, 0)$

4. Basic Reproduction Number(BRN)

Secara konstruksi BRN dapat diturunkan sebagai berikut:

Misalkan R_1 adalah banyaknya populasi PSK yang terinfeksi oleh satu individu Normal yang terinfeksi, dan R_2 adalah banyaknya populasi Normal yang terinfeksi yang disebabkan oleh satu individu PSK yang terinfeksi, berarti $R_0 = R_1 R_2$. Satu individu Normal yang terinfeksi (I_N) melakukan kontak dengan PSK sebanyak k kali setiap tahun, peluang terjadi infeksi untuk setiap kontak adalah p , dan lama waktu kontak adalah K_N/A , maka total I_P yang dihasilkan adalah $k p K_N/A$. Sedangkan setiap I_P melakukan kontak sebanyak $k K_N/K_P$ selama waktu K_P/B , sehingga banyaknya I_N menjadi I_N adalah $p k K_N/K_P \cdot K_P/B = p k I_N/B$. Jadi $R_0 = k p K_N/A \times p k K_N/B = k^2 p^2 K_N^2/AB$.

Menghitung Basic Reproduction Number tanpa melalui konstruksi:

$E_0 = (K_N, 0, K_P, 0)$ merupakan Disease Free Equilibrium(DFE)

Misalkan

$$I' = \begin{bmatrix} I'_N \\ I'_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{A}{K_N} & \frac{k p S_N}{K_P} \\ \frac{k p I_N S_P}{K_P} & -\frac{B}{K_P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_N \\ I_P \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} -\frac{A}{K_N} & \frac{kpK_N}{K_P} \\ \frac{kpK_P}{K_P} & -\frac{B}{K_P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_N \\ I_P \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & \frac{kpK_N}{K_P} \\ kp & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{A}{K_N} & 0 \\ 0 & \frac{B}{K_P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_N \\ I_P \end{bmatrix} \\
\text{Misalkan } M &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{kpK_N}{K_P} \\ kp & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } D = \begin{bmatrix} \frac{A}{K_N} & 0 \\ 0 & \frac{B}{K_P} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

maka diperoleh $D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{K_N}{A} & 0 \\ 0 & \frac{K_P}{B} \end{bmatrix}$,

sehingga: $MD^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{k^2 p^2 K_N}{B} \\ \frac{kp K_N}{A} & 0 \end{bmatrix}$

Dari nilai eigen MD^{-1} : $\lambda = \pm \sqrt{\frac{k^2 p^2 K_N^2}{AB}}$ maka Basic Reproduction Number (BRN) dapat diambil:

$$R_0 = \frac{k^2 p^2 K_N^2}{AB}$$

Tampak jika B dibesarkan maka R_0 akan mengecil, berarti populasi yang terinfeksi akan punah. Hal ini wajar, karena penambahan PSK yang baru tidak akan meningkatkan besarnya populasi PSK, sebab banyaknya populasi PSK yang masuk akan sama dengan besarnya populasi PSK yang keluar setiap tahunnya. Sehingga penambahan PSK baru hanya bersifat ‘penyegaran’.

5. Analisis kestabilan non endemik dan kestabilan endemik

Dari model diatas, dapat diperoleh titik stasioner endemik sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
- S_N &= \frac{A(kpK_N + B)}{kp(kpK_N + A)}, & I_N &= \frac{K_N^2 k^2 p^2 - AB}{kp(kpK_N + A)} \\
- S_P &= \frac{BK_P(kpK_N + A)}{kpK_N(kpK_N + B)}, & I_P &= \frac{K_P(K_N^2 k^2 p^2 - AB)}{kpK_N(kpK_N + B)}
\end{aligned}$$

Tampak jika $R_0 > 1$ maka I_N^* , I_P^* positif, berarti akan terjadi endemik

Matriks Jacobian dari system persamaan diatas adalah:

$$\begin{bmatrix} -\frac{kpI_P}{K_P} - \frac{A}{K_N} & 0 & 0 & -\frac{kpS_N}{K_P} \\ \frac{kpI_P}{K_P} & -\frac{A}{K_N} & 0 & \frac{kpS_N}{K_P} \\ 0 & -\frac{kpS_P}{K_P} & -\frac{kpI_N}{K_P} - \frac{B}{K_P} & 0 \\ 0 & \frac{kpS_P}{K_P} & -\frac{kpI_N}{K_P} & -\frac{B}{K_P} \end{bmatrix}$$

untuk titik setimbang non endemik $E_0 = (K_N, 0, K_P, 0)$

$$\begin{bmatrix} -\frac{A}{K_N} & 0 & 0 & -\frac{kpS_N}{K_P} \\ 0 & -\frac{A}{K_N} & 0 & \frac{kpS_N}{K_P} \\ 0 & -kp & -\frac{B}{K_P} & 0 \\ 0 & kp & 0 & -\frac{B}{K_P} \end{bmatrix}$$

diperoleh persamaan karakteristik:

$$(\lambda K_N + A)(\lambda K_P + B)(\lambda^2 K_N K_P + (BK_N + AK_P) - (K_N^2 k^2 p^2 - AB)) = 0$$

Tampak jelas semua akar karakteristik akan bernilai negatif jika $R_0 = \frac{k^2 p^2 K_N^2}{AB} < 1$,

sehingga untuk keadaan non endemik terjadi stabil asimtotik. Berdasarkan hal tersebut diperoleh teorema berikut:

Teorema 1:

Jika Basic Reproduction Number $R_0 < 1$, maka sistem diatas mempunyai solusi Non endemik yang stabil asimtotik.

Sedangkan untuk analisis kestabilan endemik dapat diperlihatkan dari matriks Jacobian sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} -\frac{K_N^2 k^2 p^2 - AB}{K_N (kpK_N + B)} - \frac{A}{K_N} & 0 & 0 & -\frac{(kpK_N + B)}{K_P (kpK_N + A)} \\ \frac{K_N^2 k^2 p^2 - AB}{K_N (kpK_N + B)} & -\frac{A}{K_N} & 0 & \frac{(kpK_N + B)}{K_P (kpK_N + A)} \\ 0 & -\frac{B(kpK_N + A)}{K_N (kpK_N + B)} & -\frac{K_N^2 k^2 p^2 - AB}{K_P (kpK_N + A)} - \frac{B}{K_P} & 0 \\ 0 & \frac{B(kpK_N + A)}{K_N (kpK_N + B)} & \frac{K_N^2 k^2 p^2 - AB}{K_P (kpK_N + A)} & -\frac{B}{K_P} \end{bmatrix}$$

Dan diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 P(\lambda) = & (kpAK_N^3K_P^2 + ABK_N^2K_P^2 + kpBK_N^3K_P^2 + k^2p^2K_N^4K_P^2)\lambda^4 + (2kpB^2K_N^3K_P + 3k^2p^2BK_N^4K_P + \\
 & ABkpK_N^2K_P^2 + 2kpA^2K_N^2K_P^2 + A^2BK_NK_P^2 + ABkpK_N^3K_P + AB^2K_N^2K_P + k^3p^3K_N^5K_P + \\
 & 3Ak^2p^2K_N^3K_P^2 + k^3p^3K_N^4K_P^2)\lambda^3 + (k^3p^3BK_N^5 + 2k^2p^2A^2K_N^2K_P^2 + 2k^2p^2B^2K_N^4 + \\
 & 2k^3p^3BK_N^4K_P^2 + kpA^2BK_N^2K_P + 2k^3p^3AK_N^4K_P + kpB^3K_N^3 + k^3p^3AK_N^3K_P^2 + kpAB^2K_N^2K_P + \\
 & 5k^2p^2ABK_N^3K_P + k^4p^4K_N^5K_P + kpA^3K_NK_P^2)\lambda^2 + (2k^3p^3ABK_N^3K_P - A^2B^3K_N + k^4p^4AK_N^4K_P - \\
 & A^3B^2K_P + 2k^2p^2A^2BK_N^2K_P + 2k^2p^2AB^2K_N^3K_P + k^3p^3B^2K_N^4 - kpA^2B^2K_NK_P + 2k^3p^3ABK_N^4 - \\
 & kpA^2B^2K_N^2 + k^3p^3A^2K_N^3K_P + k^4p^4BK_N^5)\lambda + k^3p^3AB^2K_N^3 - kpA^3B^2K_N - A^3B^3 - kpA^2B^3K_N + \\
 & k^4p^4ABK_N^4 + k^3p^3A^2BK_N^3
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Descartes Rule of Sign dari polinomial $Q(\lambda)=P(-\lambda)$, maka agar akar karakteristik polinom $P(\lambda)$ negative semua, haruslah koefisien derajat 4 dari $Q(\lambda)$ adalah positif, yaitu:

$$a_4 := k p K N^3 A K P^2 + B K N^2 A K P^2 + B K N^3 K P^2 k p + k^2 p^2 K N^4 K P^2$$

Jelas $a_4 > 0$

Koefisien derajat 3 adalah:

$$\begin{aligned}
 a_3 := & -2 B^2 K N^3 K P k p - 3 k^2 p^2 K N^4 K P B - B A K P^2 k p K N^2 - 2 k p K N^2 A^2 K P^2 \\
 & - K N B A^2 K P^2 - k p K N^3 A K P B - B^2 K N^2 A K P - k^3 p^3 K N^5 K P \\
 & - 3 k^2 p^2 K N^3 A K P^2 - k^3 p^3 K N^4 K P^2
 \end{aligned}$$

Jelas $a_3 < 0$

Koefisien derajat 2 adalah:

$$\begin{aligned}
 a_2 := & k^3 p^3 K N^5 B + 2 k^2 p^2 K N^2 A^2 K P^2 + 2 k^2 p^2 K N^4 B^2 + 2 k^3 p^3 K N^4 K P B \\
 & + A^2 k p K N^2 K P B + 2 k^3 p^3 K N^4 A K P + B^3 K N^3 k p + k^3 p^3 K N^3 A K P^2 \\
 & + B^2 A K P k p K N^2 + 5 k^2 p^2 K N^3 A K P B + k^4 p^4 K N^5 K P + K N A^3 k p K P^2
 \end{aligned}$$

Jelas $a_2 > 0$

Koefisien derajat 1 adalah:

$$\begin{aligned}
 a_1 := & -2 k^3 p^3 K N^3 A K P B + K N B^3 A^2 - k^4 p^4 K N^4 A K P + A^3 B^2 K P \\
 & - 2 A^2 k^2 p^2 K P K N^2 B - 2 B^2 A K N^3 k^2 p^2 - k^3 p^3 K N^4 B^2 + A^2 B^2 K P k p K N \\
 & - 2 k^3 p^3 K N^4 A B + k p K N^2 A^2 B^2 - A^2 k^3 p^3 K N^3 K P - k^4 p^4 K N^5 B
 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan nilai R_0 kedalam koefisien a_1 tersebut, diperoleh:

$$\begin{aligned}
 a_1 := & (-B^3 R_0 A - 2 A^2 B^2 R_0 + A^2 B^2) k p K N^2 \\
 & + (B^3 A^2 - 2 B^3 A^2 R_0 - R_0^2 A^2 B^3) K N \\
 & + (-A^3 K P R_0 B - 2 A^2 B^2 K P R_0 + A^2 B^2 K P) k p K N - R_0^2 A^3 B^2 K P \\
 & - 2 A^3 K P R_0 B^2 + A^3 B^2 K P
 \end{aligned}$$

- Suku pertama dapat ditulis dalam bentuk

$$-B^2 (2 R_0 - 1) k p K_N^2 A^2 - R_0 B^3 k p K_N^2 A$$

Jika $R_0 > 1$, maka suku pertama bernilai negatif

- Suku kedua dapat ditulis dalam bentuk:

$$-B^3 A^2 (-1 + 2 R_0 + R_0^2) K_N$$

Jika $R_0 > 1$, maka suku kedua bernilai negatif

- Suku ketiga dapat ditulis dalam bentuk:

$$-A^2 K_P (2 R_0 - 1) k p K_N B^2 - A^3 K_P R_0 k p K_N B$$

Jika $R_0 > 1$, maka suku ketiga bernilai negatif

- Suku ke empat + suku kelima + suku ke enam dapat ditulis dalam bentuk:

$$(1 - 2 R_0 - R_0^2) K_P B^2 A^3$$

Jika $R_0 > 1$, maka jumlahan suku suku ke empat + suku kelima + suku ke enam bernilai negatif, sebab $1 - 2R_0 - R_0^2 < 0$

Akibatnya untuk $R_0 > 1$, maka diperoleh $a_1 < 0$

Koefisien derajat 0 adalah:

$$a_0 := A B (k p K_N + B) (k p K_N + A) (K_N^2 k^2 p^2 - A B)$$

Jika $R_0 > 0$ maka jelas $a_0 > 0$

Dengan demikian jika $R_0 > 1$, maka nilai $a_4 > 0$, $a_3 < 0$, $a_2 > 0$, $a_1 < 0$, $a_0 > 0$, sehingga menurut Descartes Rule of Sign, nilai akar karakteristiknya akan negatif, yang berarti bahwa titik stasioner endemiknya akan stabil asimtotik.

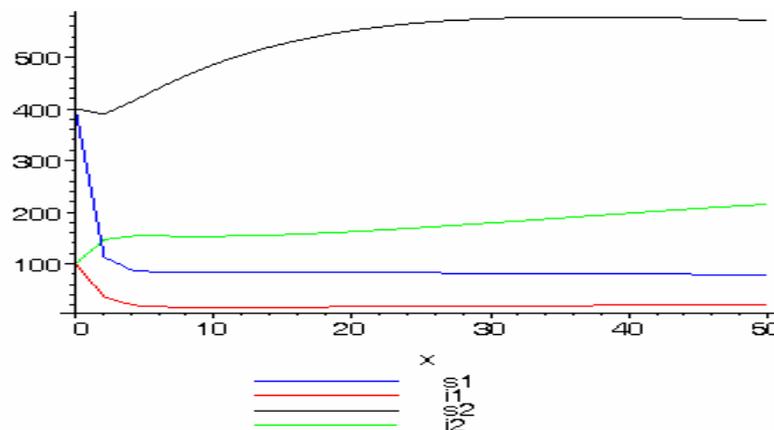
Sehingga diperoleh teorema :

Teorema 2:

Jika Basic Reproduction Number $R_0 > 1$, maka solusi endemik dari sistem diatas akan stabil asimtotik

Contoh 1:

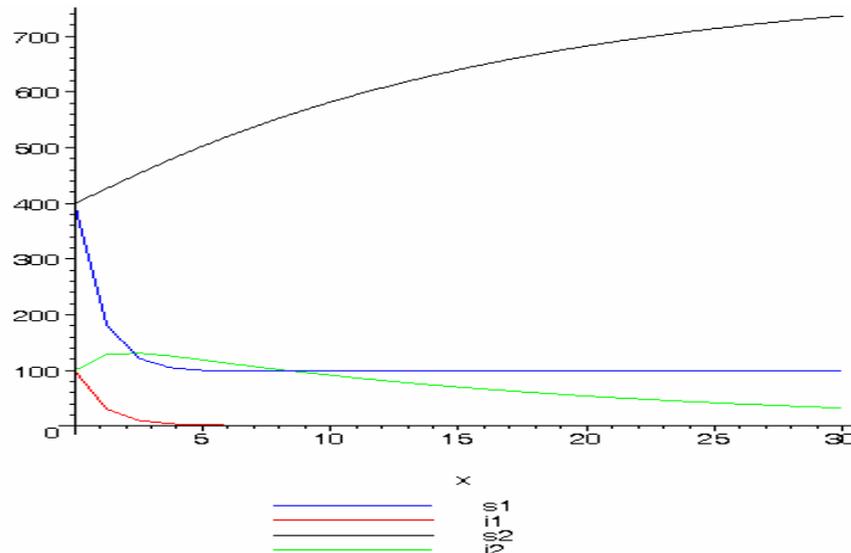
Untuk $k=10$, $p=0,1$, $K_N=100$, $K_p=800$, $A=100$, $B=50$, sehingga $R_0 > 1$. Dari gambar 1 terjadi endemik, dimana populasi yang terinfeksi berkembang lebih cepat dan lebih besar dari pada populasi yang susceptible, namun akan menuju stabil asimtotik



Gambar 2

Contoh 2:

Untuk $A=100$, $B=50$, $k=10$, $p=0.01$, $K_N=100$, $K_P=800$ dengan nilai awal $S_N(0)=400$, $I_N(0)=200$, $S_P(0)=400$, $I_P(0)=200$ ($R_0 < 1$), tampak solusinya tidak stabil asimtotik



Gambar 3

6. Kesimpulan

Dari analisis model diatas, diperoleh bahwa penyebaran virus HIV melalui kontak sex antara populasi Normal dengan Penjaja Sex, hanya diperoleh dua solusi, yaitu satu solusi non endemik dan satu solusi endemik. Solusi non endemik yaitu $R_0 < 1$, akan berakibat solusinya stabil asimtotik. Demikian pula untuk keadaan endemik yaitu $R_0 > 1$, maka akan berakibat solusi menjadi stabil asimtotik.

Daftar pustaka

- [1]. Sani A, 2005, "Stochastic Models for the spread of HIV in a mobile Heterosexual Population", research paper, august 15
- [2]. Aggarwala B.D, 2003, "On some(more) mathematical models for development of HIV/AIDS in a community", research paper.
- [3]. Mode C.J and Sleeman C.K, 1999, "A new design of stochastic partnership models for epidemic of sexually transmitted diseases with stages", Math. Biosci., 156:95–122.
- [4]. Mode C. J. and C. K. Sleeman, 2000, "Stochastic Processes in Epidemiology, HIV/AIDS, Other Infectious Diseases and Computers". World Scientific.
- [5]. Kate Dolan, 1998, "A mathematical model of HIV transmission in NSW prisons", 50, pp 197-202
- [6]. Zhilan Feng, "On the computation of R_0 and its role on global stability"

- [7]. Dietz K, 1998, "On the transmission dynamic of HIV", Math. Biosci. 90, 397-414.
- [8]. Kremer M and Morcom C, 1998, "The effect of changing sexual activity on HIV prevalence", Math. Biosci., 151:99-122.
- [9]. May R.M, Anderson R.M, and McLean A.R., 1989, "Possible demographic consequences of HIV/AIDS epidemics. II. Assuming HIV infection does not necessarily lead to AIDS. In *Mathematical Approaches to Problems in Resource Management and Epidemiology*" (Ithaca, NY, 1987), volume 81 of Lecture Notes in Biomath., pages 220-248. Springer, Berlin.
- [10]. Tan W.Y and Zhu X., 1996, "A stochastic model for the HIV epidemic in homosexual populations involving age and race", Math. Comput. Modelling, 24:67-105.
- [11]. Tan W.Y and Zhu X, 1996, "A stochastic model of the HIV epidemic for heterosexual transmission involving married couples and prostitutes": I. the probabilities of HIV transmission and pair formation. Math. Comput. Modelling, 24:47-100.