

Pergerakan Tanah Pada Lembah Tertimbun Yang Dipengaruhi Gelombang Permukaan Datar

Jeffry Kusuma*

Abstrak

Tulisan ini membahas mengenai pergerakan tanah pada lembah tertimbun yang dipengaruhi gelombang permukaan datar. Solusinya diselesaikan secara numerik dengan metode elemen batas dengan menggunakan bahasa pascal.

Kata Kunci : gelombang permukaan datar, metode elemen batas.

1. Pendahuluan

Gempa bumi merupakan peristiwa alam yang terjadi akibat pergeseran lempeng di dalam bumi yang menimbulkan berbagai kerusakan di atas permukaan. Tingkat kerusakan oleh gempa pada dasarnya sangat berkaitan dengan berbagai faktor seperti rendahnya mutu konstruksi suatu tempat/bangunan, pengaruh topografi maupun kondisi geologi dari suatu daerah. Dalam hal ini distribusi kerusakan dipengaruhi oleh gelombang seismik dalam kaitannya dengan topografi lokal dan karakteristik dalam tanah (Wong dan Trifunac, 1974).

Dalam beberapa kondisi, pergerakan tanah akibat gempa dapat dibuatkan model secara sederhana, akan tetapi untuk topografi tak beraturan harus dihadapkan oleh peristiwa mengenai ruang, misalnya kejadian gempa yang melalui lembah tertimbun. Sehingga para pakar sepakat bahwa guna menyelesaikan problem ini, harus meninjau lembah tertimbun ini sebagai masalah dua dimensi yang merupakan permukaan dari setengah bidang elastik (Sanchez, Sesma dan Esquivel, 1979).

Dalam tulisan ini, lembah yang tertimbun ditinjau sebagai daerah yang memiliki batas-batas tertentu. Batas-batas ini tidak lain merupakan model yang ditinjau yang selanjutnya merupakan batas yang akan dikaji ataupun dilakukan perhitungan akan simpangan dan turunannya.

2. Pembahasan

Misalkan u_1 dan u_2 adalah perpindahan pada arah z di setengah ruang dan lembah secara berurutan. Untuk perambatan gelombang permukaan datar SH (surface horizontal), perpindahannya memenuhi persamaan gelombang

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} = \frac{1}{\beta_j^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad \text{dengan } j=1,2. \quad (1)$$

* Staf pengajar pada Jurusan Matematika F.MIPA Universitas Hasanuddin Makassar

dimana $\beta_j = \sqrt{\frac{\mu_j}{\rho_j}}$ merupakan kecepatan gelombang pada medium j . Untuk gelombang harmonik yang tergantung pada waktu maka $u_j = e^{i\omega t}$, sehingga dengan mensubstitusi $k_j = \frac{\omega}{\beta_j}$ dan $u_j = e^{i\omega t}$ maka persamaan sebelumnya menjadi persamaan Helmholtz

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y^2} + k_j^2 u_j = 0. \tag{2}$$

Jika ada sebuah gelombang datar dari satu amplitudo yang merambat pada permukaan setengah ruang elastis, maka

$$u^{(i)} = \exp i\omega \left[t - \frac{x}{c_x} + \frac{y}{c_y} \right], \tag{3}$$

dimana $c_x = \frac{\beta_1}{\sin \gamma}$, $c_y = \frac{\beta_1}{\cos \gamma}$, $\gamma =$ sudut datang.

Adapun gelombang pantul / refleksi berbentuk :

$$u^{(r)} = \exp\left(t - \frac{x}{c_x} - \frac{y}{c_y}\right). \tag{4}$$

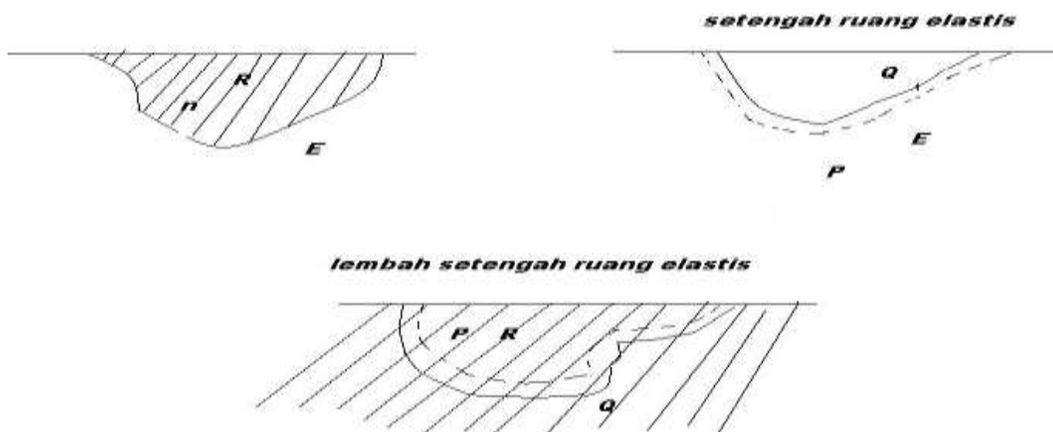
Jadi, jika tidak ada iregularitas maka dengan mudah diperoleh daerah solusi yakni:

$$u^{(0)} = 2 \cos\left(\frac{\omega y}{c_y}\right) \exp i\omega \left(t - \frac{x}{c_x} \right). \tag{5}$$

Dengan adanya lembah tertimbun, maka solusi untuk daerah luar lapisan akan berbentuk

$$u_1 = u^{(0)} + u^{(d)}, \tag{6}$$

dimana $u^{(d)}$ merupakan perpindahan ke gelombang difraksi.



Gambar 1 Definisi daerah R dan E serta kurva c_1, c_2 , dan ∂E

Misalkan $u^{(d)}$ dan u_2 dapat ditulis sebagai penghasil potensial sendiri (Ursell; 1973), dan kurva c_1 dan c_2 (gambar 1) yang terdefinisi Gambar 1c h setengah ruang dan lembah secara berurutan, maka

$$u^{(d)}(P) = \int_{c_1} \sigma_1(Q)G_1(P,Q)dS_Q, \quad (7)$$

dimana $Q \in c_1; P \in E \cup \partial E$ (gambar 1b) dan

$$u_2(P) = \int_{c_2} \sigma_2(Q)G_2(P,Q)dS_Q, \quad (8)$$

dimana: $Q \in c_2; P \in R \cup \partial E$ (Gambar 1c). Karena perpindahan u_j tergantung pada posisi P dan Q serta \bar{r}, \bar{r}_0 merupakan vektor posisi pada P dan Q, sehingga diperoleh

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + k_j^2 \right) G_j(P,Q) = -\delta(|\bar{r} - \bar{r}_0|) \quad (9)$$

dengan kondisi batas bebas

$$\frac{\partial G_j}{\partial y} = 0 \quad ; \text{ pada } y=0; j=1,2. \quad (10)$$

Fungsi Green diberikan oleh

$$G_j(P,Q) = \frac{i}{4} \{ H_0^{(2)}(k_j r_1) + H_0^{(2)}(k_j r_2) \} ; j=1,2 \quad (11)$$

dimana $H_0^{(2)}(\cdot) = J_0(\cdot) - iY_0(\cdot)$ merupakan fungsi Hankel jenis kedua dan berorder nol dengan $r_1 = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]^{1/2}$ yang merupakan jarak antara titik P(x, y) dan Q(x₀, y₀) serta $r_2 = [(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2]^{1/2}$ yang merupakan jarak antara titik P(x, y) dan Q(x₀, -y₀).

Untuk perpindahan dan stress secara berurutan yakni

$$u_1 = u_2, \quad (12)$$

$$\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}, \quad (13)$$

dimana n merupakan vektor normal pada batas ∂E .

Berdasarkan persamaan (6) dan (7), diperoleh

$$u_1(P) = u^{(0)}(P) + \int_{c_1} \sigma_1(Q)G_1(P,Q)dS_Q \text{ dengan } P \in E \cup \partial E. \quad (14)$$

Substitusi persamaan (8) dan (14) ke persamaan (12), diperoleh:

$$\int_{c_1} \sigma_1(Q)G_1(P,Q)dS_Q - \int_{c_2} \sigma_2(Q)G_2(P,Q)dS_Q = -u^{(0)}(P). \quad (15)$$

Substitusi persamaan (8) dan (14) ke persamaan (13), diperoleh:

$$\int_{c_1} \sigma_1(Q) \frac{\partial G_1(P,Q)}{\partial n_p} dS_Q - \alpha \int_{c_2} \sigma_2(Q) \frac{\partial G_2(P,Q)}{\partial n_p} dS_Q = -\frac{\partial u^{(0)}(P)}{\partial n_p}, \quad (16)$$

dimana $P \in \partial E$, n_p merupakan vektor normal pada batas titik P, dan $\frac{\mu_2}{\mu_1} = \alpha$.

Persamaan (15) dan (16) akan dibuat dalam sistem persamaan integral Fredholm jenis pertama dengan σ_1 dan σ_2 sebagai fungsi tak diketahui.

Solusi numerik pada kasus daerah yang bermaterial komposit sebenarnya merupakan pengembangan solusi numerik pada material homogen. Oleh karena itu persamaan dan pendekatan-pendekatan numerik pada daerah homogen juga berlaku pada daerah komposit.

Dalam hal ini, guna mendapatkan solusi numerik maka dimisalkan $\sigma_j(Q)$; $j=1,2$ dan dapat ditulis dalam bentuk

$$\sigma_1(Q) = \sum_{m=1}^M a_m \delta(|Q - Q_m|); Q, Q_m \in c_1, \quad (17)$$

$$\sigma_2(Q) = \sum_{n=1}^N b_n \delta(|Q - Q_n|); Q, Q_n \in c_2. \quad (18)$$

Karena persamaan (17) dan (18) maka persamaan (8) dan (14) menjadi:

$$u_1(P) = u^{(0)}(P) + \sum_{m=1}^M a_m G_1(P, Q_m); P \in E, \quad (19)$$

$$u_2(P) = \sum_{n=1}^N b_n G_2(P, Q_n); P \in R. \quad (20)$$

Dengan cara yang sama, persamaan (15) dan (16) dapat didiskritkan dengan menentukan L pada titik-titik P_l , sehingga diperoleh:

$$\sum_{m=1}^M a_m G_1(P_l, Q_m) - \sum_{n=1}^N b_n G_2(P_l, Q_n) = -u^{(0)}(P_l); l = 1, 2, \dots, L \quad (21)$$

$$\sum_{m=1}^M a_m \frac{\partial G_1(P_l, Q_m)}{\partial n_{p_l}} - \alpha \sum_{n=1}^N b_n \frac{\partial G_2(P_l, Q_n)}{\partial n_{p_l}} = -\frac{\partial u^{(0)}(P_l)}{\partial n_{p_l}}. \quad (22)$$

Persamaan (21) dan (22) akan dibentuk dalam sebuah sistem persamaan linear $2L$ dengan $M + N$ yang tidak diketahui. Jika $2L = M + N$, maka dengan demikian persamaan (21) dan (22) dapat ditulis sebagai

$$[A]\{x\} = \{b\}. \quad (23)$$

Solusi $\{x\}$ yakni minimum mean square error dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan

$$[A^*]^T [W][A]\{x\} = [A^*]^T [W]\{b\}, \quad (24)$$

dimana, $[A^*]$ merupakan tranpose konjugat dari matriks koefisien $[A]$, $[W]$ adalah matriks diagonal yang memuat faktor normal. Pergerakan tanah yang terjadi merupakan kasus komposit, maka hubungan resiprokal yang terjadi adalah:

$$\int_c \left(U_j \frac{\partial G_j}{\partial n} - G_j \frac{\partial U_j}{\partial n} \right) dS_j = 0; j = 1, 2 \quad (25)$$

Persamaan integral diturunkan dengan memperhatikan kontur yang membatasi domain yang ditinjau. Bila material komposit terdiri dari material pertama yang bagian luarnya dibatasi oleh kontur c_1 dan material kedua seluruhnya berada dalam material pertama dan dibatasi oleh kontur c_2 maka kontur yang membatasi material pertama seluruhnya adalah kontur tertutup sederhana $c_1 \cup c_2$. Dengan mengeluarkan sebuah titik (a,b) dari dalam kontur tertutup yang membatasi material pertama, misalkan kontur ini berbentuk lingkaran kecil Γ dengan jari-jari ε maka diperoleh

$$\int_{c_1+c_2+\Gamma} \left(U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} - G_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right) dS = 0, \quad (26)$$

$$\psi U_1(a, b) = \int_{c_1+c_2} \left(U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} - G_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right) dS. \quad (27)$$

Disini ψ adalah konstanta yang merupakan nilai tengah Cauchy. Konstanta tersebut akan bernilai 1 jika titik (a,b) pada material pertama berada dalam kontur $c_1 \cup c_2$ dan bernilai 0.5 jika titik (a,b) berada pada kontur $c_1 \cup c_2$. Disini kontur c_1 dipilih dengan arah berlawanan dengan arah jarum jam sedangkan kontur c_2 dipilih searah jarum jam. Dengan mendiskritkan kontur c_1 dan c_2 , katakanlah c_1 ke dalam M segmen dan c_2 ke dalam N segmen maka persamaan (27) menjadi:

$$\psi U_1(a, b) = \sum_{i=1}^M \int_{c_1} \left(U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} - G_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right) dS + \sum_{i=1}^N \int_{c_2} \left(U_1 \frac{\partial G_1}{\partial n} - G_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right) dS. \quad (28)$$

Demikian pula untuk kontur c_2 yang membatasi material kedua yakni:

$$\psi U_2(c, d) = \sum_{i=1}^N \int_{c_2} \left(U_2 \frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} \right) dS. \quad (29)$$

Selanjutnya dengan melakukan pendekatan elemen konstan yaitu dengan menganggap $U_1, \frac{\partial U_1}{\partial n}$ pada kontur c_1 dan c_2 serta $U_2, \frac{\partial U_2}{\partial n}$ pada kontur c_2 sebagai suatu konstanta serta untuk segmen ke-j, maka pendekatan solusi menjadi:

$$\psi U_j^{(1)}(a, b) = \sum_{i=1}^M (U_i^1 G_{ij}^1 - \Gamma_i^1 P_{ij}^1) + \sum_{i=M+1}^{M+N} (U_i^1 G_{ij}^1 - \Gamma_i^1 P_{ij}^1), \quad (30)$$

$$\psi U_j^2(c, d) = \sum_{i=M+1}^{M+N} (\Gamma_i^2 P_{ij}^2 - U_i^2 G_{ij}^2). \quad (31)$$

Jika diberikan M buah syarat awal yang diketahui pada batasan luar material pertama pada kontur c_1 maka persamaan (12) dan (13) beserta syarat awalnya akan segera membentuk M+2N persamaan linear dengan M+2N variabel yang tidak diketahui.

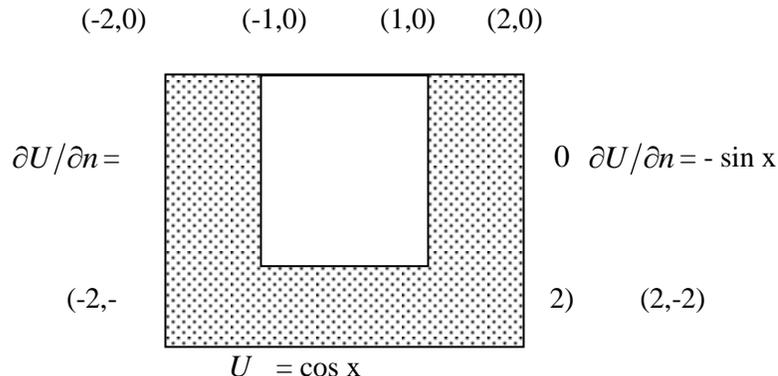
Persamaan ini disusun seperti persamaan (23) dan diselesaikan, maka simpangan U dan $\frac{\partial U}{\partial n}$ pada material 1 maupun material 2 akan diketahui.

Peristiwa dan difraksi gelombang yang hanya sepanjang arah vertikal, amplitudo perpindahan berada bebas pada permukaan yaitu

$$|u| = 2[\cos^2(k_2 H) + (\alpha\beta_1/\beta_2)^2 \sin^2(k_2 H)]^2, \quad (32)$$

dengan H merupakan ketebalan seragam (Rosset dan Whitman, 1969 lihat [2]).

Jika lereng-lereng merupakan lembah dan dalamnya lapisan kira-kira sama seperti lebarnya, serta lateral interferensinya signifikan, maka inilah yang menjadikan persamaan (32) tidak digunakan.



Gambar 2. Lembah Tertimbun Berbentuk Segi Empat

Material pertama menempati daerah persegi yang dibatasi oleh vertex $(-2,0)$, $(-2,-2)$, $(2,-2)$, $(2,0)$, sedangkan di dalam material ini terdapat material kedua yang dibatasi oleh vertex $(-1,0)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,0)$. Sedangkan syarat batas yang merupakan masalah Robin (masalah campuran) dengan nilai λ untuk material kedua adalah 1.

Dari gambar 2, dapat diperoleh nilai λ untuk material pertama sebesar 1 dengan memasukan spesifikasi syarat batas.

$$U(x,-2) = \cos x,$$

$$\frac{\partial U}{\partial n}(-2, y) = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial n}(2, y) = -\sin x,$$

kedalam persamaan Helmholtz (2).

Kemudian, jika masing-masing sisi daerah yang berada di sebelah luar (kontur c_1) dibagi atas 2 segmen yang sama panjang, demikian pula untuk daerah yang berada di dalam (kontur c_2) maka akan diperoleh total $N=8$ dan $M=8$, setiap segmen harus ditentukan titik ujung dan titik tengahnya terlebih dahulu, misalkan untuk sisi $(-2,0)$ sampai $(-2,-2)$.

- *Segment 1*: titik ujung bawahnya $(-2,0)$ dan titik ujung atasnya $(-2,-1)$ dengan titik tengahnya $(-2,-0,5)$.
- *Segment 2*: titik ujung bawahnya $(-2,-1)$ dan titik ujung atasnya $(-2,-2)$ dengan titik tengahnya $(-2,-1,5)$.

Selanjutnya ditentukan nilai-nilai solusi (U) serta fungsi Green dan turunannya pada setiap titik segmen yang ada di kontur c_1 . Semua nilai $G_{ij}^{(1)}$ dan $P_{ij}^{(1)}$ dapat dihitung dengan metode Bode 10 titik yaitu:

$$\int_{x_2}^{x_1} f(x) dx = \frac{9h}{89600} \{2587(f_0 + f_9) + 15741(f_1 + f_8) + 1080(f_2 + f_7) + 19344(f_3 + f_6) + 5778(f_4 + f_5)\} - \frac{173}{14620} f^{(10)}(\xi) h^{11}$$

dengan $f(x_i) = f_i$, $f^{(10)}$ adalah turunan kesepuluh fungsi f , $h = x_{i+1} - x_i$, dan ξ menyatakan nilai errornya.

Selanjutnya ditentukan pula nilai-nilai fungsi Green dan turunannya pada setiap titik tengah segmen yang berada di titik kontur c_2 . Dan pada akhirnya, program yang dibuat akan memudahkan untuk mencari solusi pada setiap titik-titik yang dimaksud.

3. Kesimpulan

Dalam mencari suatu solusi numerik terutama untuk persoalan pergerakan tanah yang menggunakan PD Helmholtz dapat digunakan metode elemen batas yang memanfaatkan batasan domainnya untuk mendekati solusinya. Untuk mendekati domain digunakan bentuk poligon (segi banyak). Dalam hal ini bentuk poligon yang dimaksud merupakan bentuk dari lembah yang tertimbun. Jadi metode ini pada dasarnya membagi-bagi batasan domain menjadi segmen yang lebih kecil. Kemudian segmen-segmen yang dibagi tadi dibagi lagi untuk mendekati integral dengan menggunakan metode bode 10 titik.

Dalam penggunaan metode ini perlu diketahui bahwa semakin banyak pembagian yang dilakukan pada pembagian domain maka semakin akurat hasil yang diperoleh. Jadi dengan melakukan proses perhitungan akan didapatkan solusi dan turunan solusi pada batasan domain.

Daftar Pustaka

- [1] George B.Arffen,-,"*Mathematical Methods for Physics*", edisi IV, New York, Academic Press.
- [2] Jeffry Kusuma, 1994, "*Persamaan Diferensial Helmholtz*", dalam mata kuliah Persamaan Diferensial Parsial dan Masalah Syarat Batas, Ujung Pandang, 8 Desember.
- [3] Fransisco J. Sanchez,; Sesma; Jorge A. Esquivel,1979, "*Ground Motion On Alluvial Valleys Under Incident Plane SH Waves*", Bull. Seism. Soc. Am.69.
- [4] Paul A Tipler, 1998, "*Fisika Untuk Sains Dan Teknik*", Jakarta, Erlangga.
- [5] MO Tjia,1993, "*Gelombang*", Bandung, Jurusan Fisika, FMIPA ITB.
- [6] M.D.Trifunac,1971, "*Surface Motion Of Semi-Cylindrical Alluvial Valley For Incident Plane SH Waves*", Bull. Seism. Soc.Am.61.