

# Kestabilan Aliran Fluida Viskos Tipis pada Bidang Inklinasi

Sri Sulasteri

**Abstract.** Fluida yang mengalir pada suatu bidang inklinasi umumnya menunjukkan ketidakstabilan berupa terbentuknya *finger* pada garis kontak, daerah dimana fase padat, cair, dan gas bertemu. Tulisan ini membahas tentang kestabilan aliran fluida viskos tipis pada suatu bidang inklinasi, dibawah pengaruh gaya gravitasi. Simulasi numerik menunjukkan bahwa gaya gravitasi memegang peranan penting terhadap kestabilan aliran fluida.

*Keywords :* *finger, garis kontak, bidang inklinasi.*

## 1 Pendahuluan

Aliran fluida berbentuk suatu lapisan tipis adalah hal yang dapat ditemukan dalam banyak bidang, antara lain lapisan jantung dan kornea mata (bidang medis/biologi), pelapisan (cat) pada dinding (bidang teknik), serta pembuatan mikrochip (bidang industri). Hal yang selalu menjadi perhatian dalam lapisan fluida tipis adalah masalah ketidakstabilan aliran fluida; dalam banyak kasus, bagian depan dari fluida (*front*) membentuk profil berbentuk *finger* atau *rivulets*. Kondisi seperti ini seringkali tidak diinginkan.

Salah satu contoh lapisan fluida tipis yang sederhana adalah aliran fluida viskos yang mengalir di atas suatu bidang inklinasi yang dipengaruhi oleh gaya gravitasi. Salah satu aspek yang penting dari model ini adalah kelakuan dari fluida pada bagian depan dari bidang inklinasi, yaitu daerah di mana fase padat, cair, dan gas bertemu, yang dikenal sebagai garis kontak (*contact line*). Hasil-hasil percobaan menunjukkan bahwa beberapa saat setelah fluida dilepaskan, garis kontak menjadi tidak stabil jika diberikan gangguan pada arah melintang [4]. Tulisan ini akan membahas beberapa parameter yang menentukan kestabilan aliran fluida tersebut.

---

<sup>†</sup> *Jurusan Pendidikan Matematika Universitas Islam Negeri Alauddin Makassar*

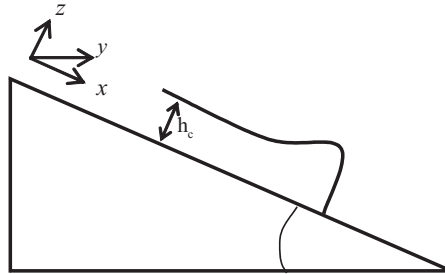
## 2 Model Matematika

Teori tentang aliran lapisan fluida tipis dikenal sebagai teori lubrikasi, dan merujuk kepada suatu rumus matematika standar yang dikenal sebagai hampiran lubrikasi [1]. Adapun titik awal untuk memodelkan hampiran lubrikasi adalah Persamaan Navier-Stokes.

Dalam penurunan model, digunakan asumsi bahwa ketebalan lapisan fluida sangat kecil dibandingkan panjang bidang, serta fluida yang mengalir adalah fluida viskos dan bersifat tak mampat. Dengan merata-ratakan kecepatan fluida atas ketebalannya (hampiran lubrikasi), serta menggunakan kondisi batas tidak slip pada lapis batas permukaan padat-fluida, maka diperoleh persamaan lapisan fluida tipis :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot (h^3 \nabla \nabla^2 h) + D(\alpha) \nabla \cdot (h^3 \nabla h) - \frac{\partial h^3}{\partial x}, \quad (1)$$

dengan  $\nabla = (\partial_x, \partial_y)$ ,  $D(\alpha) = (3Ca)^{1/3} \cot \alpha$ ,  $Ca$  adalah bilangan kapiler, dan  $\alpha$  adalah sudut inklinasi. Suku pertama dari ruas kanan persamaan (1) menyatakan pengaruh tegangan permukaan, sedangkan suku kedua dan ketiga menyatakan komponen normal dan paralel dari gravitasi.



**Fig. 1.** Model dari lapisan fluida tipis pada bidang inklinasi.

Bilangan kapiler,  $Ca$  didefinisikan sebagai  $Ca = \mu U / \gamma$ , dimana  $\mu$  dan  $\gamma$  adalah viskositas dan tegangan permukaan, sedangkan  $U$  adalah skala kecepatan, yaitu  $U = \rho g h_c^2 \sin(\alpha) / 3\mu$ , dengan  $h_c$  adalah

skala untuk ketinggian fluida, yaitu ketinggian fluida jauh di belakang garis kontak. Adapun koordinat bidang, diskalakan oleh  $x_c = (a^2 h_c / \sin \alpha)^{1/3}$ , dengan  $a = \sqrt{\gamma / \rho g}$  adalah bilangan kapiler,  $\rho$  adalah densitas fluida, dan  $g$  adalah gravitasi; sedangkan skala untuk waktu adalah  $t_c = x_c / U$ .

Perhatikan bahwa dalam hampiran lubrikasi yang digunakan dalam penurunan persamaan lapisan fluida tipis, mensyaratkan bahwa kemiringan dari permukaan bebas adalah kecil. Syarat ini mengakibatkan

$$[(h_c/a)\sqrt{\sin \alpha}]^{2/3} \ll 1.$$

Dengan demikian, ketebalan maksimum dari lapisan fluida yang masih memenuhi syarat hampiran lubrikasi tergantung kepada  $\alpha$ . Jika  $\alpha$  kecil maka syarat ini selalu dipenuhi, tetapi untuk  $\alpha$  yang besar maka syarat ini hanya dipenuhi untuk lapisan fluida yang sangat tipis.

### 3 Solusi Gelombang Berjalan

Keadaan dasar dari aliran fluida sebelum terjadinya ketidakstabilan adalah suatu solusi gelombang berjalan  $h(x, y, t) = h_0(x - Ut)$  dari (1). Definisikan  $h_0(\xi) = h(x, t)$ , maka fungsi  $h_0(\xi)$  memenuhi

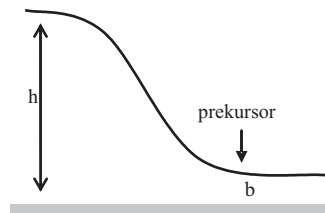
$$-Uh_0 + h_0^3 h_{0\xi\xi\xi} - D(\alpha)h_0^3 h_{0\xi} + h_0^3 = d, \quad (2)$$

dengan  $d$  adalah suatu konstanta. Untuk memperoleh konstanta  $d$  dan  $U$ , maka harus dilakukan *matching*, yaitu jika  $x \rightarrow -\infty$  maka haruslah  $h_0 \rightarrow 1$ , sedangkan jika  $x \rightarrow \infty$  maka haruslah  $h_0$  bersesuaian dengan ketebalan fluida pada garis kontak. Untuk mencegah singularitas pada garis kontak, maka digunakan prekursor pada model, dengan ketinggian  $b$ .

Dengan demikian, diperoleh konstanta integrasi  $d$  dan kecepatan translasi  $U$ , yaitu:

$$U = \frac{1 - b^3}{1 - b} \quad \text{dan} \quad d = -b(1 + b).$$

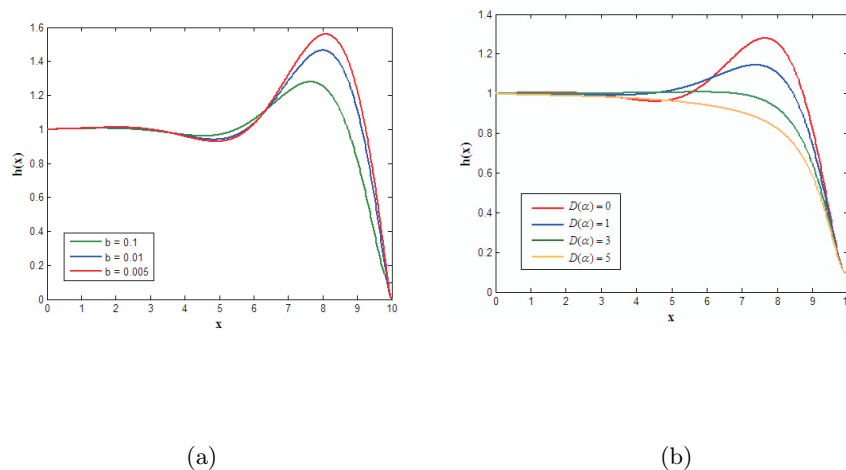
Jika  $b$  dan  $D(\alpha)$  diberikan, maka solusi dari Persamaan (2) dapat diperoleh melalui pendekatan numerik. Metode numerik yang digu-



**Fig. 2.** Model dengan prekursor

nakan adalah metode beda hingga, yaitu diskritisasi dengan menggunakan empat titik.

Gambar 3 memperlihatkan profil solusi  $h(x)$  dengan parameter  $D(\alpha)$  dan  $b$ . Hal yang menonjol dari profil solusi ini adalah terbentuknya suatu gundukan (*bump*) di dekat garis kontak, yang mengindikasikan terjadinya ketidakstabilan dari solusi. Gambar 3(a) memperlihatkan bahwa semakin kecil nilai  $b$ , maka ketinggian gundukan makin besar. Hal ini merupakan akibat dari kekekalan massa, karena volume fluida yang mengalir adalah konstan. Sedangkan Gambar 3(b) memperlihatkan bahwa untuk  $D(\alpha)$  yang semakin besar maka ketinggian gundukan semakin turun, bahkan hilang sama sekali.



**Fig. 3.** Solusi  $h(x)$  untuk: (a)  $D(\alpha) = 0$  dan  $b$  yang bervariasi, (b)  $b$  yang tetap dan  $D(\alpha)$  yang bervariasi.

Kedua gambar menunjukkan bahwa ketinggian dari solusi  $h(x)$  (ketinggian gundukan) adalah suatu fungsi dari parameter  $b$  dan  $D(\alpha)$ . Ketinggian gundukan ini merupakan parameter yang penting dalam menentukan profil stabil atau tidak. Gambar 4 adalah gambar dari ketinggian maksimum  $h(x)$  sebagai fungsi dari parameter  $b$  dan  $D(\alpha)$ . Untuk setiap nilai  $b$  terdapat suatu nilai kritis  $D(\alpha)$  dimana gundukan hilang. Gundukan yang hilang menunjukkan bahwa profil stabil linier. Hal ini berarti parameter  $D(\alpha)$  memegang peranan penting dalam mengontrol kestabilan dari solusi  $h(x)$ . Dengan kata lain, kestabilan solusi sangat tergantung kepada sudut inklinasi  $\alpha$ . Semakin besar  $\alpha$ , maka  $D(\alpha)$  semakin kecil, yang berarti  $h$ -maks makin besar. Nilai  $D(\alpha) = 0$  bersesuaian dengan sudut inklinasi  $90^\circ$ , dimana kondisi ini merupakan kondisi paling tidak stabil dari solusi  $h(x)$ .

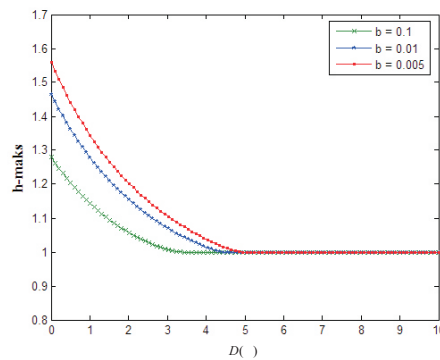


Fig. 4. Ketinggian maksimum dari  $h(x)$  sebagai fungsi dari  $D(\alpha)$ .

## 4 Analisis Kestabilan Linier

Sebagai langkah untuk mengetahui aliran fluida stabil atau tidak, maka dilakukan analisis kestabilan linier yaitu dengan melibatkan arah melintang (variabel  $y$ ) dari persamaan lapisan fluida tipis yang digunakan. Pandang suatu perturbasi  $\epsilon h_1(\xi, y, t)$  terhadap solusi

$h_0$ , dengan  $\epsilon \ll 1$  dan  $h_1 = O(1)$ . Substitusi  $h(\xi, y, t) = h_0(\xi) + \epsilon h_1(\xi, y, t)$  ke Persamaan (1), diperoleh :

$$\begin{aligned} \partial_t(h_1) = & -\nabla \cdot [h_0^3 \nabla \nabla^2 h_1 + 3h_0^2 h_1 \nabla \nabla^2 h_0] \\ & + D(\alpha) \nabla \cdot [h_0^3 \nabla h_1 + 3h_0^2 h_1 \nabla h_0] - (3h_0^2 h_1)_\xi + U h_{1\xi} \end{aligned} \quad (3)$$

Persamaan (3) dapat dinyatakan dalam bentuk Fourier dalam  $y$ , yaitu dengan mengekspresikan  $h_1(\xi, y, t) = \phi(\xi, t) e^{iqy + \sigma t}$ , dimana  $q$  adalah bilangan gelombang, yang berkaitan dengan periode dari perturbasi ( $q = 2\pi/\lambda$ ), sedangkan  $\sigma$  adalah derajat ketidakstabilan solusi.

Dengan demikian, jika diberikan suatu  $q$  maka diperoleh suatu masalah nilai eigen:

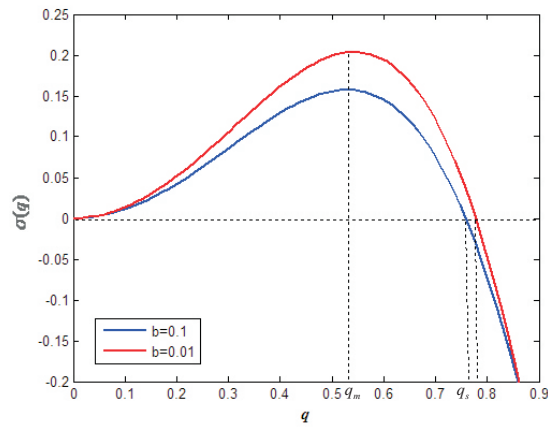
$$\mathcal{L}\phi = -\sigma\phi, \quad (4)$$

dengan  $\mathcal{L}$  adalah operator linier yang memenuhi :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & h_0^3 \frac{d^4}{d\xi^4} + (h_0^3)_\xi \frac{d^3}{d\xi^3} - (D(\alpha) + 2q^2) h_0^3 \frac{d^2}{d\xi^2} \\ & + \left( 3h_0^2 (h_{0\xi\xi\xi} - D(\alpha)h_{0\xi} + 1) - (h_0^3)_\xi (D(\alpha) + q^2) - U_p \right) \frac{d}{d\xi} \\ & + h_0^3 q^2 (D(\alpha) + q^2) + (3h_0^2 (h_{0\xi\xi\xi} - D(\alpha)h_{0\xi} + 1))_\xi. \end{aligned}$$

Analisis kestabilan solusi diperoleh dengan menyelesaikan Persamaan (4). Oleh karena (4) melibatkan  $h_0$  yang tidak bisa diselesaikan secara analitik, maka secara umum Persamaan (4) harus diselesaikan secara numerik. Prosedur numeriknya adalah dengan mencari  $\sigma$  (nilai eigen) terbesar dari setiap  $q$  yang diberikan, sehingga diperoleh grafik fungsi  $\sigma(q)$ .

Gambar 5 adalah grafik fungsi  $\sigma(q)$  untuk  $D(\alpha) = 0$  dan  $b = 0.1$  dan  $0.01$ . Gambar ini mewakili grafik fungsi  $\sigma(q)$  untuk suatu nilai  $D(\alpha)$  yang tetap dengan nilai  $b$  yang berbeda. Dari gambar terlihat adanya  $\sigma(q)$  bernilai positif di atas suatu daerah dari domain  $q$ , yaitu daerah yang dibatasi oleh  $q = 0$  dan  $q_s = 2\pi/\lambda_s$ . Hal ini mengindikasikan terjadinya ketidakstabilan aliran fluida terhadap perturbasi yang diberikan. Derajat ketidakstabilan maksimum dari ketidakstabilan solusi terjadi pada  $q_m \approx 0.5$  atau bersesuaian dengan panjang gelombang  $\lambda \approx 12.6$ . Hal yang menarik dari dua grafik dengan ketebalan prekursor yang berbeda ini yaitu bahwa bilangan

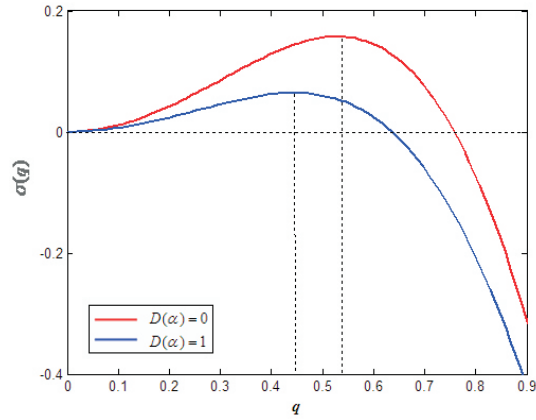


**Fig. 5.** Derajat ketidakstabilan  $\sigma(q)$  dengan  $D(\alpha) = 0$ .

gelombang  $q$  yang menghasilkan derajat ketidakstabilan,  $q_m$ , tidaklah sensitif terhadap ketebalan prekursor,  $b$ .

Gambar 5 juga memperlihatkan bahwa derajat ketidakstabilan,  $\sigma(q)$ , memiliki suatu ketergantungan terhadap ketebalan prekursor,  $b$ . Penurunan ketebalan prekursor bersesuaian dengan kenaikan derajat ketidakstabilan. Hal ini sesuai dengan hasil dari solusi dasar, yaitu ketinggian maksimum dari solusi dasar naik jika ketebalan prekursor turun. Akan tetapi, sejalan pula dengan solusi dasar diperoleh bahwa perubahan ketebalan prekursor tidaklah menyebabkan solusi menjadi stabil, yaitu selalu ada daerah domain dari  $q$  dimana  $\sigma(q)$  bernilai positif.

Selanjutnya, kita akan menyelidiki peranan parameter  $D(\alpha)$  terhadap kestabilan solusi. Gambar 6 adalah grafik fungsi  $\sigma(q)$  untuk suatu nilai  $b$  yang tetap dengan dua nilai  $D(\alpha)$  yang berbeda. Gambar 6 menunjukkan bahwa kenaikan nilai  $D(\alpha)$  menyebabkan penurunan derajat ketidakstabilan  $\sigma(q)$ , serta pergeseran posisi dari  $\sigma(q_m)$  dan  $\sigma(q_s)$ . Jadi, kenaikan nilai  $D(\alpha)$  menyebabkan aliran fluida menjadi lebih stabil.



**Fig. 6.** Derajat ketidakstabilan  $\sigma(q)$  dengan  $b = 0.1$  dan parameter  $D(\alpha) = 0$  dan 1.

## 5 Kesimpulan

Tulisan ini membahas masalah ketidakstabilan dari lapisan fluida tipis yang mengalir di atas suatu bidang inklinasi.

Simulasi numerik menunjukkan bahwa penurunan ketebalan prekursor menyebabkan solusi dasar menjadi lebih tidak stabil, sedangkan kenaikan parameter  $D(\alpha)$  akan menyebabkan solusi dasar lebih stabil. Hasil yang sama akan diperoleh jika kestabilan mengacu pada derajat ketidakstabilan dari solusi. Penurunan ketebalan prekursor menyebabkan naiknya derajat ketidakstabilan, yang mengindikasikan ketidakstabilan yang lebih besar. Sedangkan kenaikan parameter  $D(\alpha)$  menyebabkan penurunan derajat ketidakstabilan  $\sigma(q)$ , serta berkurangnya luas domain  $q$  yang bernilai positif. Jadi kenaikan parameter  $D(\alpha)$  menyebabkan solusi lebih stabil. Simulasi numerik juga menunjukkan bahwa parameter  $D(\alpha)$  yang berkaitan dengan sudut dari bidang inklinasi mempunyai peran yang sangat besar dalam menentukan kondisi kestabilan dari solusi.

## References

1. A. L. Bertozzi and M. P. Brenner, *Linear Stability and Transient Growth in Driven Contact Lines*, Phys. Fluids 9, 530-539, 1997 .



2. A. L. Bertozzi, *The Mathematics of Moving Contact Lines in Thin Liquid Films*, Notices Amer. Math. Soc., 45, 689-697, 1998.
3. J. D. Hoffman, *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, McGraw-Hill, Inc. New-York, 1992 .
4. L. Kondic, *Instabilities in Gravity Driven Flow of Thin Fluid Films*, SIAM Review, Vol. 45, 95-115, 2003.
5. M. A. Spaid and G. M. Homsy, *Stability of Newtonian and Viscoelastic Dynamic Contact Lines*, Phys. Fluids 8, No. 2, 1996.