ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 7, No.2, 62-70, Januari 2011

Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Model Perilaku Jumlah Pelaku Narkoba dengan Faktor Rehabilitasi

Syamsuddin Toaha*

Abstrak

Tulisan ini membahas suatu model laju perubahan jumlah pelaku narkoba yang dinyatakan dalam suatu sistem persamaan differensial autonomus. Kewujudan dan kestabilan titik keseimbangan model tersebut diberikan secara detail, termasuk analisis nilai dan titik bifurkasi. Tes kestabilan Hurwitz digunakan untuk menentukan kestabilan titik keseimbangan model. Dari hasil analisis diperoleh bahwa kewujudan dan kestabilan titik keseimbangan endemik dan tak endemik bergantung pada nilai *basic reproduction number,* R_0 .

Kata Kunci: *Titik keseimbangan, kestabilan, basic reproduction number, bifurkasi transkritikal.*

1. Pendahuluan

Matematika terapan, yang bermakna penggunaan matematika dalam menyelesaikan fenomena alam, baik fenomena fisis maupun fenomena non fisis. Matematika terapan dapat digunakan dalam berbagai bidang, misalnya dalam bidang kedokteran, ekologi, biologi, ekonomi dan bidang-bidang lainnya. Pemodelan matematika sebagai suatu pendekatan dalam merumuskan fenomena digunakan untuk meramalkan perilaku sistem. Perilaku sistem ini kemudian ditafsirkan sehingga kita dapat mengetahui perilaku situasi yang sebenarnya.

Salah satu fenomena yang dapat diformulasikan dalam model matematika adalah perilaku jumlah pelaku narkoba dalam masalah penyalahgunaan narkoba. Laju perubahan jumlah manusia yang rentan menjadi pecandu, jumlah pecandu, jumlah pecandu yang direhabilitasi dan jumlah pecandu yang sembuh dinyatakan dalam suatu sistem persamaan diferensial autonomus. Model yang terbentuk merupakan model kontinu dan bersifat deterministik. Model laju perubahan jumlah pelaku narkoba ini dan analisisnya menjadi penting karena masalah penyebaran narkoba sudah sangat memprihatinkan. Ini disebabkan karena menyangkut perilaku sebagian generasi muda serta sasaran peredarannya sudah merambah segmen-segmen masyarakat, seperti mahasiswa, kaum eksekutif, bisnisman, dan sebagainya.

Beberapa cara yang dapat untuk mengatasi masalah sosial ini adalah dengan mengetahui bagaimana pola penyebaran narkoba dan memaksimalkan upaya untuk meredam penyebarannya, yaitu dengan memberikan hukuman yang seberat-beratnya kepada pengedar dan pecandu narkoba serta melakukan upaya maksimal dalam merehabilitasi para pecandu narkoba.

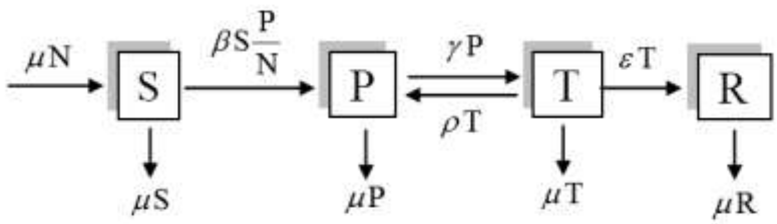
Pada tulisan ini hanya dibahas sepintas tentang bagaimana model perubahan jumlah manusia yang rentan dan terlibat dalam narkoba itu terbentuk, karena model yang dianalisis sudah pernah dibahas oleh beberapa penulis sebelumnya. Tulisan ini fokus dalam menganalisis

* *Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10 , Tamalanrea Makassar, email: syamsuddint@yahoo.com*

kestabilan titik endemik dan titik tak endemik secara analitik, termasuk nilai dan titik bifurkasi yang terjadi pada model tersebut. Hasil dari analisis ini dapat digunakan sebagai referensi dalam menangani masalah penyebaran narkoba.

2. Model Matematika Masalah Kecanduan Narkoba dengan Faktor Rehabilitasi

Model yang dibahas pada tulisan ini adalah model dengan asumsi-asumsinya telah diperkenalkan oleh Kasbawati (2010), dan Kasbawati dan Toaha, S. (2010).



Gambar 1. Diagram Skematik Model Kecanduan Narkoba dengan Faktor Rehabilitasi.

Model itu berbentuk sistem persamaan differensial non linier autonomus sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\frac{dS(t)}{dt} &= \mu_0 N - \beta_0 S(t)\frac{P(t)}{N} - \mu_0 S(t) \\
\frac{dP(t)}{dt} &= \beta_0 S(t)\frac{P(t)}{N} + \rho_0\, T(t) - \gamma_0\, P(t) - \mu_0\, P(t) \\
\frac{dT(t)}{dt} &= \gamma_0 P(t) - \rho_0\, T(t) - \varepsilon_0 T(t) - \mu_0\, T(t) \\
\frac{dR(t)}{dt} &= \varepsilon_0\, T(t) - \mu\, R(t)\,,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

dimana semua parameter diasumsikan bernilai positif. Berikut diberikan keterangan dari semua variabel dan parameter model dalam (1), yaitu:

N : total jumlah populasi manusia,
$S(t)$: jumlah manusia sehat yang rentan untuk menjadi pecandu narkoba pada saat t,
$P(t)$: jumlah pecandu narkoba dan mempunyai peluang untuk mempengaruhi manusia yang sehat untuk menjadi pecandu narkoba,
$T(t)$: jumlah pecandu narkoba yang mengikuti program terapi rehabilitasi pada saat t,
$R(t)$: jumlah pecandu narkoba yang sembuh akibat adanya rehabilitasi,
μ_0 : rata-rata banyaknya manusia yang masuk dan keluar dalam sistem per satuan waktu,
β_0 : rata-rata banyaknya kontak yang dilakukan antara manusia pecandu dengan manusia sehat per satuan waktu,
γ_0 : rata-rata banyaknya pecandu yang akan direhabilitasi per satuan waktu,
ρ_0 : rata-rata banyaknya pecandu yang telah direhabilitasi tetapi kembali menjadi pecandu per satuan waktu,

ε_0 : rata-rata banyaknya pecandu yang telah direhabilitasi dan sembuh per satuan waktu.

3. Tes Kestabilan Hurwitz

Teorema fundamental dalam aljabar menyatakan bahwa sebarang polinomial

$$f(\lambda) = \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0 \ ,$$

dimana koefisien p_0, p_1, ... , p_{n-1} adalah bilangan real, selalu mempunyai *n* akar. Didefinisikan matriks Hurwitz dengan unsur-unsur yang menggunakan bilangan 1, p_0, p_1, ... , p_{n-1},

$$H_1 = (p_{n-1}), \qquad H_2 = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-3} \\ 1 & p_{n-2} \end{pmatrix}, \qquad H_3 = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-3} & p_{n-5} \\ 1 & p_{n-2} & p_{n-4} \\ 0 & p_{n-1} & p_{n-3} \end{pmatrix},$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-3} & p_{n-5} & p_{n-7} \\ 1 & p_{n-2} & p_{n-4} & p_{n-6} \\ 0 & p_{n-1} & p_{n-3} & p_{n-5} \\ 0 & 1 & p_{n-2} & p_{n-4} \end{pmatrix}$$, dan seterusnya sampai H_n, dengan $p_j = 0$, $j < 0$.

Tes Kestabilan Hurwitz (Jeffries, 1989).
Misalkan $\dot{x} = Ax$ menyatakan suatu sistem dinamik linear dengan titik keseimbangan 0. Setiap matriks Hurwitz mempunyai determinan positif jika dan hanya jika setiap nilai eigen dari matriks A mempunyai bagian real negatif dan titik keseimbangan 0 stabil asimtotik untuk $\dot{x} = Ax$.

Untuk beberapa nilai *n*, tes Hurwitz dapat dinyatakan sebagai berikut. Setiap matriks Hurwitz mempunyai determinan positif jika dan hanya jika; $p_0 > 0$ untuk $n = 1$; $p_0 > 0$, $p_1 > 0$ untuk $n = 2$; $p_0 > 0$, $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, dan $p_2 p_1 - p_0 > 0$ untuk $n = 3$.

4. Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Model

Tinjau model perubahan jumlah manusia yang rentan dan pelaku terhadap narkoba dengan faktor rehabilitasi, model (1), dengan asumsi $N = S(t) + P(t) + T(t) + R(t)$. Untuk mempermudah analisis selanjutnya, model (1) dinormalkan dengan memperkenalkan variabel baru yang dapat mereduksi dimensi dari masing-masing variabel. Misalkan

$$\mathrm{X} = \frac{\mathrm{S(t)}}{\mathrm{N}},\ \mathrm{Y} = \frac{\mathrm{P(t)}}{\mathrm{N}},\ Z = \frac{T(t)}{N},\ W = \frac{R(t)}{N}, \text{ dan } \tau = \mu_0\, t\,. \tag{2}$$

Jika varibel baru pada (2) disusbtitusi ke sistem persamaan (1) maka diperoleh model yang tidak berdimensi lagi, yaitu:

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{d\tau} &= 1 - \beta\, X\, Y \;-\; X \\
\frac{dY}{d\tau} &= \beta X\, Y \;+\; \rho Z - \gamma Y - Y \\
\frac{dZ}{d\tau} &= \gamma Y - \;\rho\, Z - \varepsilon\, Z - Z \\
\frac{dW}{d\tau} &= \varepsilon\, Z - W,
\end{aligned} \tag{3}$$

dengan $\beta = \dfrac{\beta_0}{\mu_0}$, $\rho = \dfrac{\rho_0}{\mu_0}$, $\gamma = \dfrac{\gamma_0}{\mu_0}$, dan $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}$ merupakan parameter yang tidak berdimensi. Titik keseimbangan tak endemik merupakan salah satu solusi keseimbangan sistem yang memberikan makna bahwa populasi pecandu akan hilang sama sekali dari sistem. Kestabilan titik keseimbangan tak endemik dapat ditentukan melalui nilai eigen dari matriks Jacobian yang diperoleh dari model dengan melakukan linearisasi di sekitar titik keseimbangan. Dengan membuat sistem persamaan (3) sama dengan nol, yaitu

$$\frac{dX}{d\tau} = \frac{dY}{d\tau} = \frac{dZ}{d\tau} = \frac{dW}{d\tau} = 0\ , \tag{4}$$

diperoleh titik keseimbangan $T_1 = \left(X_*, Y_0, Z_0, W_0\right) = (1, 0, 0, 0)$ dan $T_2 = \left(X_\oplus, Y_\oplus, Z_\oplus, W_\oplus\right)$, dimana $X_\oplus = \dfrac{1}{R_0}$, $Y_\oplus = \dfrac{(R_0 - 1)}{\beta}$, $Z_\oplus = \dfrac{\gamma(R_0 - 1)}{\beta(\rho + 1 + \varepsilon)}$, dan $W_\oplus = \dfrac{\varepsilon\gamma(R_0 - 1)}{\beta(\rho + 1 + \varepsilon)}$ dengan $R_0 = \dfrac{\beta(\varepsilon + \rho + 1)}{\gamma\varepsilon + \gamma + \rho + \varepsilon + 1}$.

Besaran *basic reproduction number* atau R_0 didefinisikan sebagai nilai ekspektasi banyaknya kasus sekunder yang timbul akibat dari kasus primer dalam populasi yang bebas penyakit. Dalam hal ini penyakit yang dimaksud adalah penyakit karena kecanduan narkoba. Jika nilai $R_0 > 1$ artinya pada populasi terjadi kasus endemik atau terjadi pertambahan jumlah pecandu aktif, sedangkan nilai $R_0 < 1$ artinya pada populasi tidak terjadi kasus endemik atau tidak terjadi pertambahan jumlah pecandu aktif (Diekmann dan Heesterbeek, 2000).

Teorema 1. *Titik keseimbangan* $T_1 = \left(X_*, Y_0, Z_0, W_0\right) = (1, 0, 0, 0)$ *yang merupakan titik keseimbangan tak endemik dari model (3) stabil asimtotik secara lokal jika* $R_0 < 1$.

Bukti: Dari model (3) diperoleh matriks Jacobian yang dievaluasi pada titik keseimbangan T_1, yaitu

$$J_1 = \begin{pmatrix} -1 & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta - \gamma - 1 & \rho & 0 \\ 0 & \gamma & -\rho - \varepsilon - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & -1 \end{pmatrix},$$

dengan persamaan karakteristik

$$f(\lambda)=\left|J_1-\lambda I\right|=\begin{vmatrix} -1-\lambda & -\beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta-\gamma-1-\lambda & \rho & 0 \\ 0 & \gamma & -\rho-\varepsilon-1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & -1-\lambda \end{vmatrix}=0. \qquad (5)$$

Dari persamaan (5) diperoleh nilai-nilai eigen $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-1$ dan akar-akar dari persamaan kuadrat $\lambda^2+a_1\lambda+a_0=0$, dengan $a_1=2+\varepsilon+\rho+\gamma-\beta$ dan $a_0=\left(\gamma\varepsilon+\gamma+\rho+\varepsilon+1\right)\left(1-R_0\right)$. Untuk menunjukkan bahwa titik keseimbangan T_1 stabil secara asimtot, kita gunakan tes kestabilan Hurwitz. Dengan itu akan ditunjukkan bahwa $a_0>0$ dan $a_1>0$.

Diketahui bahwa $R_0<1$, dengan $R_0=\dfrac{\beta(\varepsilon+\rho+1)}{\gamma\varepsilon+\gamma+\rho+\varepsilon+1}$ yang ekivalen dengan $\beta<\dfrac{\gamma\varepsilon+\gamma+\rho+\varepsilon+1}{\rho+\varepsilon+1}$, akan dibuktikan bahwa $a_0>0$ dan $a_1>0$. Karena $R_0<1$, maka jelas $a_0>0$. Untuk menunjukkan bahwa $a_1>0$, akan ditunjukkan

$$\frac{\gamma\varepsilon+\gamma+\rho+\varepsilon+1}{\rho+\varepsilon+1}<2+\varepsilon+\rho+\gamma .$$

Ketidaksamaan di atas dapat ditulis $\gamma\varepsilon+\gamma+\rho+\varepsilon+1<\left(2+\varepsilon+\rho+\gamma\right)\left(\rho+\varepsilon+1\right)$ yang dengan mudah dapat di lihat bahwa ketidaksamaan tersebut benar. Karena $\beta<\dfrac{\gamma\varepsilon+\gamma+\rho+\varepsilon+1}{\rho+\varepsilon+1}$ dan $\dfrac{\gamma\varepsilon+\gamma+\rho+\varepsilon+1}{\rho+\varepsilon+1}<2+\varepsilon+\rho+\gamma$, maka diperoleh $\beta<2+\varepsilon+\rho+\gamma$ atau $2+\varepsilon+\rho+\gamma-\beta>0$ atau $a_1>0$. Dengan itu terbukti bahwa titik keseimbangan tak endemik T_1 stabil asimtotik secara lokal. ■

Teorema 2. *Titik keseimbangan* $T_2=\left(X_\oplus,Y_\oplus,Z_\oplus,W_\oplus\right)$ *yang merupakan titik keseimbangan endemik dari model (3) stabil asimtotik secara lokal jika* $R_0>1$.

Bukti: Dari model (3) diperoleh matriks Jacobian yang dievaluasi pada titik keseimbangan T_2, yaitu

$$J_2=\begin{pmatrix} -R_0 & -\dfrac{\beta}{R_0} & 0 & 0 \\ \left(R_0-1\right) & \dfrac{\beta}{R_0}-\gamma-1 & \rho & 0 \\ 0 & \gamma & -\rho-\varepsilon-1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & -1 \end{pmatrix},$$

dengan persamaan karakteristik

$$f(\lambda) = \left| J_{T_2} - \lambda I \right| = \begin{vmatrix} -R_0 - \lambda & -\dfrac{\beta}{R_0} & 0 & 0 \\ (R_0 - 1) & \dfrac{\beta}{R_0} - \gamma - 1 - \lambda & \rho & 0 \\ 0 & \gamma & -\rho - \varepsilon - 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 , \qquad (6)$$

yang dapat dinyatakan sebagai

$$f(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0) = 0 , \qquad (7)$$

dengan

$$p_2 = \left(\frac{R_0^{\ 2} + (\varepsilon + \gamma + \rho + 2)R_0 - \beta}{R_0} \right),$$

$$p_1 = \left(\frac{(\varepsilon + \gamma + \rho + 2)R_0^{\ 2} + (\gamma\varepsilon + \varepsilon + \gamma + \rho + 1)R_0 - \beta\varepsilon - 2\beta - \beta\rho}{R_0} \right) ,$$

$$p_0 = \left(\frac{\beta(\varepsilon + \rho + 1)(R_0 - 1)}{R_0} \right) .$$

Salah satu nilai eigen dari persamaan karakteristik (7) adalah $\lambda = -1$. Untuk membuktikan bahwa titik keseimbangan T_2 stabil asimtotik, akan digunakan tes kestabilan Hurwitz, yaitu dengan menunjukkan bahwa $p_0 > 0$, $p_1 > 0$, $p_2 > 0$ dan $p_2 p_1 - p_0 > 0$.

Pertama, akan dibuktikan bahwa $p_2 = \left(\dfrac{R_0^{\ 2} + (\varepsilon + \gamma + \rho + 2)R_0 - \beta}{R_0} \right) > 0$. Untuk itu akan dibuktikan $R_0^{\ 2} + (\gamma + 2 + \varepsilon + \rho)R_0 - \beta > 0$. Perhatikan bahwa

$$(\rho + \varepsilon + 1)(R_0 + \gamma + \rho + \varepsilon + 2) > (\gamma\varepsilon + \gamma + \varepsilon + \rho + 1),$$

$$\frac{(\rho + \varepsilon + 1)}{(\gamma\varepsilon + \gamma + \varepsilon + \rho + 1)}(R_0 + \gamma + \rho + \varepsilon + 2) > 1 .$$

Kalikan masing-masing ruas dengan β, diperoleh

$$\frac{\beta(\rho + \varepsilon + 1)}{(\gamma\varepsilon + \gamma + \varepsilon + \rho + 1)}(R_0 + \gamma + \rho + \varepsilon + 2) > \beta .$$

Karena $R_0 = \dfrac{\beta(\rho + \varepsilon + 1)}{(\gamma\varepsilon + \gamma + \varepsilon + \rho + 1)}$, maka ketidaksamaan dapat ditulis sebagai

$$R_0(R_0 + \gamma + \rho + \varepsilon + 2) > \beta ,$$

$$R_0^{\ 2} + R_0(\gamma + \rho + \varepsilon + 2) > \beta ,$$

$$R_0^{\ 2} + R_0(\gamma + \rho + \varepsilon + 2) - \beta > 0.$$

Ketidaksamaan ini menunjukkan bahwa $p_2 > 0$.

Kedua, akan dibuktikan bahwa $p_0 = \left(\frac{\beta(\varepsilon+\rho+1)(R_0-1)}{R_0}\right) > 0$. Karena $R_0 > 1$, maka jelas bahwa $p_0 > 0$.

Ketiga, akan dibuktikan bahwa $p_2 p_1 - p_0 > 0$. Setelah melakukan penyederhanaan diperoleh $p_2 p_1 - p_0 = \frac{1}{R_0^2} B$, dengan

$$\begin{aligned} B &= (\alpha+\delta+2+\rho)R_0^4 + \left(2\gamma\rho+3\gamma\varepsilon+2\varepsilon\rho+5+\rho^2+5\varepsilon+\varepsilon^2+5\rho+\gamma^2+5\gamma\right)R_0^3 \\ &\quad + \left(3\rho-3\beta\varepsilon+2+3\gamma-3\beta\rho+4\gamma\varepsilon+\rho\gamma\varepsilon-5\beta+\varepsilon^2\gamma+\gamma^2\varepsilon+\rho^2+\gamma^2+2\gamma\rho-\gamma\beta+\varepsilon^2 \right. \\ &\quad \left. +2\varepsilon\rho+3\varepsilon\right)R_0^2 - \left(\rho\beta\gamma+2\varepsilon\beta\rho+\varepsilon^2\beta+2\gamma\beta\varepsilon+4\beta\rho+4\beta+\beta\rho^2+3\beta\gamma\right)R_0 + (\rho+\varepsilon+2)\beta^2. \end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $B > 0$ jika $R_0 > 1$ yang ekivalen dengan menyatakan $B > 0$ jika $\beta > \frac{(\gamma\varepsilon+\gamma+\varepsilon+\rho+1)}{(\rho+\varepsilon+1)}$. Substitusi $R_0 = \frac{\beta(\rho+\varepsilon+1)}{(\gamma\varepsilon+\gamma+\varepsilon+\rho+1)}$ pada *B*, diperoleh $B = b_4\beta^4 + b_3\beta^3 + b_2\beta^2$, dimana

$$b_4 = (\rho+\varepsilon+1)^4(\varepsilon+\gamma+2+\rho),$$

$$\begin{aligned} b_3 &= (\rho+\varepsilon+1)^2(\rho+\gamma\varepsilon+\gamma+\varepsilon+1)\left(\rho\gamma^2-\gamma\varepsilon+2\rho\gamma\varepsilon+2\gamma\rho^2+3\gamma\rho-\gamma+\varepsilon^3+3\varepsilon^2\right. \\ &\quad \left. +3\rho\varepsilon^2+6\varepsilon\rho+2\varepsilon+3\varepsilon\rho^2+\rho^3+3\rho^2+2\rho\right), \end{aligned}$$

$$b_2 = -\gamma\rho(\rho+\gamma\varepsilon+\gamma+\varepsilon+1)^3.$$

Disini jelas bahwa $b_4 > 0$ dan $b_2 < 0$. Nyatakan $B = \beta^2 B_1$ dimana $B_1(\beta) = b_4\beta^2 + b_3\beta + b_2$, dan selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $B_1(\beta) > 0$ untuk $\beta > \frac{(\gamma\varepsilon+\gamma+\varepsilon+\rho+1)}{(\rho+\varepsilon+1)}$. Karena $b_4 > 0$ dan $b_2 < 0$ maka kedua akar dari $B_1(\beta)$, yaitu $\beta_{1,2}$, benilai real dan berbeda tanda. Tulis $\beta_2 = \frac{-b_3+\sqrt{b_3^2-4b_4b_2}}{2b_4}$. Akan ditunjukkan bahwa $\beta_2 < \beta_*$, dengan $\beta_* = \frac{(\gamma\varepsilon+\gamma+\varepsilon+\rho+1)}{(\rho+\varepsilon+1)}$. Sekarang akan ditunjukkan bahwa

$$\frac{-b_3+\sqrt{b_3^2-4b_4b_2}}{2b_4} < \beta_*,$$

$$-b_3+\sqrt{b_3^2-4b_4b_2} < 2b_4\beta_*,$$

$$\sqrt{b_3^2-4b_4b_2} < 2b_4\beta_* + b_3.$$

Sebelum menunjukkan bahwa ketidaksamaan terakhir ini berlaku, akan ditunjukkan dulu bahwa $2b_4\beta_* + b_3 > 0$. Dengan mensubstitusi $\beta_* = \dfrac{(\gamma\varepsilon + \gamma + \varepsilon + \rho + 1)}{(\rho + \varepsilon + 1)}$ dan dengan melakukan penyederhanaan diperoleh

$$2b_4\beta_* + b_3 = (\rho + \varepsilon + 1)^2(\gamma\varepsilon + \gamma + \varepsilon + \rho + 1)\big(\rho\gamma^2 + \gamma\varepsilon + 2\rho\gamma\varepsilon + 2\gamma\rho^2 + \gamma + 5\gamma\rho + \varepsilon^3 + 3\rho\varepsilon^2 + 5\varepsilon^2 + 3\varepsilon\rho^2 + 10\varepsilon\rho + 8\varepsilon + \rho^3 + 4 + 5\rho^2 + 8\rho\big) > 0.$$

Selanjutnya dengan mengkuadratkan kedua ruas pada ketidaksamaan di atas diperoleh

$$b_3^2 - 4b_4b_2 < 4b_4^2\beta_*^2 + 4b_4b_3\beta_* + b_3^2,$$

$$b_4\beta_*^2 + b_3\beta_* + b_2 > 0.$$

Karena $B_1(\beta) > 0$ untuk $\beta > \beta_2$ dan karena $\beta_* > \beta_2$, maka $B_1(\beta) > 0$ untuk $\beta > \beta_*$. Dengan itu telah ditunjukkan bahwa $p_2 p_1 - p_0 > 0$ untuk $R_0 > 1$. Karena $p_0 > 0$, $p_2 > 0$, dan $p_2 p_1 - p_0 > 0$, maka diketahui bahwa $p_1 > 0$. Berdasarkan tes kestabilan Hurwitz, maka disimpulkan bahwa titik keseimbangan T_2 stabil asimtotik secara lokal jika *basic reproduction number*, $R_0 > 1$. ■

Untuk $R_0 > 1$, nilai eigen yang bersesuaian dengan titik keseimbangan T_1 adalah $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$ dan akar-akar dari persamaan kuadrat $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$. Disini diperoleh $a_1 > 0$ dan $a_0 < 0$. Dengan itu, titik keseimbangan T_1 tidak stabil. Sementara jika $R_0 < 1$ diperoleh titik keseimbangan T_2 dengan $X_\oplus > 0$, $Y_\oplus < 0$, $Z_\oplus < 0$, dan $W_\oplus < 0$. Persamaan karakteristik yang bersesuaian dengan titik keseimbangan T_2 adalah $f(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_1\lambda + p_0) = 0$. Disini diperoleh $p_0 < 0$ dan dengan itu titik keseimbangan T_2 tidak stabil.

Di atas telah dilakukan analisis untuk nilai $R_0 < 1$ dan $R_0 > 1$. Sekarang akan dianalisis untuk nilai $R_0 = 1$. Pertimbangkan kembali model (3) sebagai $\dot{x} = f(x, \mu)$, dimana $x \in R^4$ dan $\mu = R_0 - 1 \in R^1$. Lebih lanjut, titik keseimbangan dari $\dot{x} = f(x, \mu)$ diberikan oleh $x = T_1$ dan $x = T_2$. Jelas bahwa $f(T_1, 0) = 0$ dan $\left|\dfrac{\partial f(T_1, 0)}{\partial x}\right| = 0$ yang menyatakan bahwa titik keseimbangan T_1 adalah titik keseimbangan non hiperbolik. Untuk $\mu < 0$, maka terdapat dua titik keseimbangan, $x = T_1$ yang stabil asimtotik dan $x = T_2$ yang tidak stabil. Kedua titik keseimbangan ini bersatu ketika $\mu = 0$. Untuk $\mu > 0$, $x = T_1$ tidak stabil dan $x = T_2$ stabil asimtotik. Jadi pertukaran kestabilan terjadi pada $\mu = 0$. Dengan demikian bifurkasi yang terjadi merupakan bifurkasi transkritikal (*transcritical bifurcation*), Wiggins, S., 1990. Titik $(x, \mu) = (T_1, 0)$ adalah suatu titik bifurkasi dan nilai parameter $\mu = 0$ atau $R_0 = 1$ adalah suatu nilai bifurkasi.

5. Kesimpulan

Kewujudan dan kestabilan titik keseimbangan model (3) bergantung pada nilai *basic reproduction number*, $R_0 = \frac{\beta(\rho+\varepsilon+1)}{(\gamma\varepsilon+\gamma+\varepsilon+\rho+1)}$. Jika $R_0 < 1$, maka hanya terdapat satu titik keseimbangan nonnegatif, yaitu titik keseimbangan T_1 dan titik keseimbangan ini stabil asimtotik. Jika $R_0 > 1$, maka terdapat dua titik keseimbangan nonnegatif, yaitu titik keseimbangan T_1 dan titik keseimbangan T_2. Titik keseimbangan T_1 tidak stabil, sementara titik keseimbangan T_2 stabil asimtotik. Ketika $R_0 = 1$, maka terjadi suatu bifurkasi transkritikal dengan nilai bifurkasi $R_0 = 1$.

Ucapan Terima Kasih

Penulis menyampaikan penghargaan dan terima kasih kepada Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin yang telah memberikan biaya dalam pelaksanaan penelitian ini melalui Hibah Penelitian Fakultas MIPA Universitas Hasanuddin Tahun 2010, dengan Surat Perjanjian Pelaksanaan Pekerjaan hibah penelitian berdasarkan nomor kontrak 5755/H4.2/TU.19/2010 tanggal 1 Juni 2010.

Daftar Pustaka

Diekmann, O., dan Heesterbeek, J.A.P., 2000. *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases*. John Wiley & Sons Ltd., New York.

Jeffries, C., 1989. *Mathematical Modeling in Ecology: A Workbook for Students*. Birkhauser, Boston.

Kasbawati, 2010. Analisis *basic reproduction number* model deterministik kecanduan narkoba dengan faktor rehabilitasi. *Prosiding Seminar Nasional Matematika Tahun 2010*, Dept. Matematika FMIPA UI, hal. 479 – 484.

Kasbawati dan Toaha, S., 2010. Model deterministik masalah kecanduan narkoba dengan faktor kontrol terhadap pemakai dan pengedar narkoba. *Jurnal Matematika, Statistika, dan Komputasi*, Vol. 7 No.1, hal. 75-84.

Wiggins, S., 1990. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer–Verlag, New York.