

# Analisis Kestabilan Model Logistik Satu Populasi Dengan Tundaan Waktu

Syamsuddin Toaha<sup>†</sup>

## Abstrak

Dalam tulisan ini dibahas model logistik satu populasi dengan tundaan waktu. Tundaan waktu dipertimbangkan dalam model karena laju perubahan suatu populasi tidak hanya bergantung pada jumlah populasi pada saat sekarang tetapi juga bergantung pada jumlah populasi pada waktu lampau. Pada tulisan ini pengaruh tundaan waktu terhadap kestabilan titik keseimbangan model dianalisis dengan menggunakan pendekatan deret Taylor di sekitar titik keseimbangan. Dengan pendekatan itu diperoleh suatu model tanpa bentuk jumlah populasi yang bergantung pada tundaan waktu tetapi model tersebut tetap bergantung pada tundaan waktu. Penyelesaian analitik untuk model tersebut diberikan. Dari penyelesaian analitik itu diketahui bahwa titik keseimbangan positif stabil untuk suatu kondisi tundaan waktu dan jumlah awal populasi tertentu..

**Keywords:** Model logistik, kestabilan, tundaan waktu.

## 1. Pendahuluan

Dalam bidang matematika biologi, matematika digunakan untuk menjelaskan berbagai fenomena biologi. Salah satu aplikasi matematika dalam biologi adalah untuk memodel perubahan jumlah berbagai populasi. Model populasi Malthus digunakan untuk memprediksi apakah populasi bertumbuh tanpa batas atau populasi akan cenderung punah untuk waktu yang panjang. Hal ini sangat dipengaruhi oleh laju pertumbuhan populasi tersebut.

Model logistik adalah modifikasi dari model Malthus. Model logistik pertama tama dikaji oleh P.F Verhulst pada akhir tahun 1830-an dan selanjutnya dikaji kembali oleh Pear dan Reed pada tahun 1920-an (Haberman, 1998). Model logistik mempertimbangkan faktor pertumbuhan intrinsik (*intrinsic growth*) dan kapasitas batas (*carrying capacity*) oleh lingkungan tempat dimana populasi tersebut hidup. P.F. Verhulst mengkaji ide ini dengan menggunakan data dari penduduk Amerika Serikat untuk memprediksi jumlah populasi (Lipkin & Smith, 2006). Asumsi-asumsi dan alasan-alasan biologis untuk model ini dapat dilihat, sebagai contoh, pada Haberman (1998) dan Ganter (2006).

Model logistik dapat digunakan untuk memodel laju pertumbuhan populasi, populasi hewan, ikan dalam suatu danau atau populasi suatu pohon dalam suatu hutan. Model logistik digunakan oleh Schaefer dalam Agnew (1979) untuk menganalisis industri perikanan. Sementara itu Haberman (1998) menulis bahwa dalam laboratorium, pertumbuhan *yis* dan pertumbuhan *paramecium* memberikan indikasi yang baik bahwa pertumbuhan tersebut sangat sesuai dengan model logistik.

Tundaan waktu penting untuk dipertimbangkan dalam pemodelan karena keputusan umumnya dibuat berdasarkan informasi yang terjadi sebelumnya. Tundaan waktu penting untuk dipertimbangkan dalam pemodelan laju pertumbuhan populasi karena laju pertumbuhan populasi tidak hanya bergantung pada jumlah populasi pada saat  $t$ , tetapi juga bergantung

<sup>†</sup> Staf Pengajar pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar

pada jumlah populasi pada waktu  $(t - \tau)$  dengan  $\tau$  adalah tundaan waktu (Haberman, 1998). Sebagai contoh, laju perubahan populasi manusia bergantung pada jumlah populasi pada  $\tau = 9$  bulan sebelumnya; telur-telur ikan memerlukan beberapa waktu, ada suatu tundaan waktu, untuk menetas dan untuk menjadi ikan dewasa.

Nicholson dalam Barnes dan Fulford (2002) telah melakukan suatu eksperimen pada populasi *Australian sheep-blowly*. Hasil yang diperoleh sangat mirip dengan model logistik dengan tundaan waktu. Forys dan Czochra (2003) menggunakan model logistik dengan tundaan waktu yang telah dimodifikasi untuk memodel pertumbuhan tumor.

Pada tulisan ini dibahas model populasi logistik dengan tundaan waktu. Selanjutnya bentuk jumlah populasi pada saat sebelumnya dieliminasi dari model dengan menggunakan deret Taylor di sekitar titik keseimbangan yang stabil. Model yang dihasilkan yang masih bergantung pada tundaan waktu diselesaikan secara implisit.

## 2. Model Populasi Logistik Kontinu

Model logistik (model Verhulst) atau kurva pertumbuhan logistik, adalah suatu model pertumbuhan populasi. Model tersebut kontinu terhadap waktu yang dinyatakan oleh persamaan diferensial

$$\frac{dx(t)}{dt} = rx(t) \left( 1 - \frac{x(t)}{K} \right) \quad (1)$$

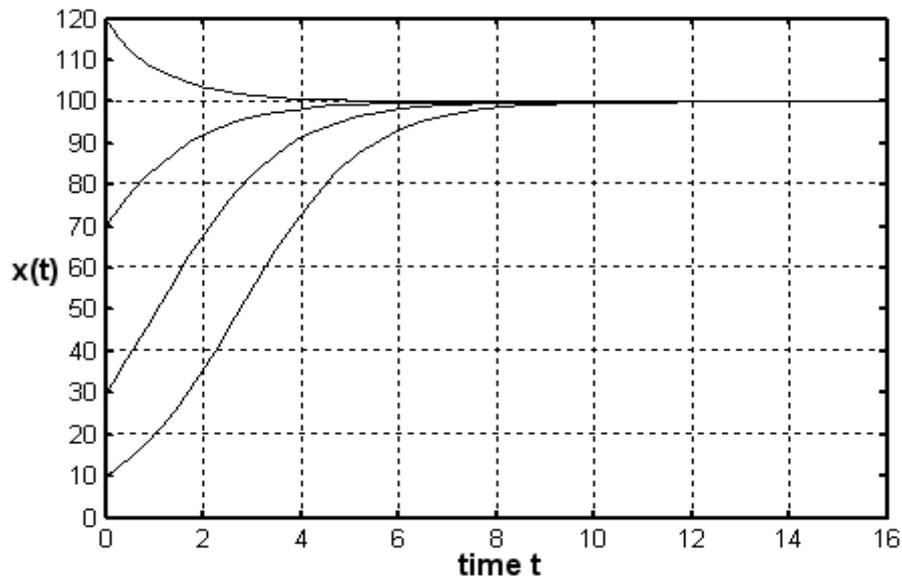
Konstanta  $r$  yang diasumsikan positif adalah suatu laju pertumbuhan intrinsik karena laju pertumbuhan populasi untuk  $x$  yang kecil hampir sama dengan  $r$ . Konstanta positif  $K$  biasa dirujuk sebagai kapasitas batas lingkungan, yaitu jumlah maksimum populasi yang dapat bertahan hidup pada lingkungan tersebut, atau tingkat jenuh (*saturation level*) karena untuk jumlah populasi yang besar jumlah kematian lebih besar daripada jumlah kelahiran. Penyelesaian dari model logistik dengan syarat awal  $x(0) = x_0 > 0$  adalah

$$x(t) = \frac{x_0 K}{x_0 + (K - x_0) e^{-rt}}$$

Nilai  $x(t)$  dengan angka pertumbuhan populasi sama dengan nol, yaitu  $\frac{dx}{dt} = 0$  disebut titik

keseimbangan atau populasi keseimbangan (*equilibrium population*) dan dari persamaan (1) hal ini terjadi jika  $x = 0$  dan  $x = K$ . Titik keseimbangan  $x = 0$  kurang menarik untuk dibicarakan lebih lanjut karena jumlah populasi pada saat itu dan seterusnya sama dengan nol yang bermakna bahwa tidak ada lagi kehidupan pada populasi tersebut. Sedangkan titik keseimbangan  $x = K$  sangat menarik untuk dikaji lebih jauh. Titik keseimbangan tak nol ini terjadi karena jumlah kelahiran dan kematian sama besar. Apa yang terjadi selanjutnya jika jumlah kelahiran dan kematian tidak sama? Apakah jumlah populasi akan cenderung mencapai kapasitas batas atau malah populasi akan punah untuk waktu yang panjang? Bagaimana perilaku perubahan populasi jika  $x_0 < K$  atau  $x_0 > K$  untuk waktu  $t$  membesar?

Dari solusi model logistik diketahui bahwa titik keseimbangan  $x = 0$  tidak stabil dalam pengertian bahwa populasi yang pada awalnya jumlahnya dekat nol pada akhirnya akan menjauhi titik keseimbangan  $x = 0$ . Sedangkan titik keseimbangan  $x = K$  stabil asimtotik dalam pengertian bahwa untuk populasi awal yang positif, jumlah populasi pada akhirnya akan menuju secara asimtot ke jumlah kapasitas batas. Beberapa kurva solusi untuk model logistik dengan populasi awal yang berbeda diberikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Kurva solusi untuk model logistik dengan  $r = 0.8$  dan  $K = 100$

### 3. Model Logistik Kontinu Dengan Tundaan Waktu

Suatu model logistik dengan satu tundaan waktu diberikan oleh

$$\frac{dx(t)}{dt} = r x(t) \left( 1 - \frac{x(t - \tau)}{K} \right) \tag{3}$$

dimana  $\tau$  adalah tundaan waktu dan diasumsikan positif. Titik keseimbangan yang positif untuk model (2) adalah  $x = K$ . Hutchinson dalam Gopalsamy (1992) mengusulkan bahwa model (2) dapat digunakan untuk memodel dinamika pertumbuhan populasi ke arah tingkat jenuh  $K$  dengan laju pertumbuhan intrinsik konstan  $r$ . Bentuk  $\left( 1 - \frac{x(t - \tau)}{K} \right)$  pada model (2)

menyatakan suatu mekanisme kepadatan populasi yang bergantung pada keadaan sebelumnya yang memerlukan waktu  $\tau$  untuk merespon perubahan kepadatan populasi yang dinyatakan oleh model (2). Model logistik dengan tundaan waktu (2) dikenal juga sebagai persamaan Verhulst atau persamaan Hutchinson. Persamaan Hutchinson telah dikaji dalam banyak paper dan buku-buku teks, sebagai contoh, lihat Hale (1977) dan Kuang (1993).

#### Linearisasi Model

Analisis kestabilan lokal dari titik keseimbangan untuk model logistik dengan tundaan waktu (2) akan dilakukan. Untuk itu, metode linearisasi model di sekitar titik keseimbangan  $x = K$  akan digunakan. Misalkan  $u(t) = x(t) - K$  dengan nilai  $x(t)$  cukup dekat nilai  $K$ . Substitusi  $x(t) = u(t) + K$  ke dalam model (2) selanjutnya diperoleh

$$\frac{du(t)}{dt} = r(u(t) + K) \left( 1 - \frac{u(t - \tau) + K}{K} \right)$$

atau

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{-r}{K} u(t)u(t-\tau) - ru(t-\tau)$$

Karena nilai  $x(t)$  cukup dekat dengan nilai  $K$ , maka bentuk  $u(t)u(t-\tau)$  dapat diabaikan. Dengan itu kita peroleh model linear

$$\frac{du(t)}{dt} = -ru(t-\tau) \tag{3}$$

Untuk memahami kestabilan titik keseimbangan nol pada model (3), kita pertimbangkan persamaan karakteristik untuk model (3). Dengan mensubstitusikan fungsi  $x(t) = e^{\lambda t}$  ke dalam model (3) diperoleh persamaan  $\lambda e^{\lambda t} = -r e^{\lambda(t-\tau)}$ . Karena  $e^{\lambda t} \neq 0$ , selanjutnya diperoleh persamaan karakteristik

$$\lambda + r e^{-\lambda\tau} = 0 \tag{4}$$

**Lemma 1.** (Toaha, 2006). Misalkan  $r > 0$  dan  $\tau > 0$ . Akar-akar dari persamaan karakteristik (4) bernilai negatif jika  $\tau \leq \frac{1}{re}$ .

**Lemma 2.** (Toaha, 2006). Misalkan  $r > 0$  dan  $\tau > 0$ . Akar-akar dari persamaan karakteristik (4) adalah bilangan kompleks dengan bagian real negatif jika  $\frac{1}{re} < \tau < \frac{\pi}{2r}$ .

Lemma 1 dan 2 di atas memberikan suatu kondisi untuk nilai  $\tau$  supaya titik keseimbangan  $x = 0$  untuk model linear (3) menjadi stabil dan seterusnya titik keseimbangan  $x = K$  untuk model (2) menjadi stabil, dalam hal ini kestabilan lokal. Jenis kestabilan titik keseimbangan  $x = 0$  untuk model linear serupa dengan jenis kestabilan untuk titik keseimbangan  $x = K$  untuk model tak linear.

**Contoh 1.** Pertimbangkan kasus *Australian blowflies* (semacam serangga dari family *Calliphoridae* di Australia). Nicholson dalam Barnes dan Fulford (2002) telah melakukan penelitian terhadap satu spesies dari populasi *Australian sheep-blowfly* (*Lucilia cuprina*). Hasil penelitiannya dapat didekati dengan sangat baik oleh model yang dinyatakan sebagai persamaan diferensial-diferensi, yang dapat didekati oleh persamaan diferensi

$$x_{n+1} = x_n + rx_n \left( 1 - \frac{x_{n-\tau}}{K} \right),$$

dan oleh persamaan diferensial dengan tundaan waktu seperti model (2). Di sini  $x$  menyatakan jumlah populasi,  $r$  adalah laju reproduksi dan  $K$  adalah kapasitas batas. Parameter  $r = 0.106$  per hari,  $K = 2800$  serangga, dan  $\tau = 17$  hari.

Dari syarat kestabilan, Lemma 1 dan 2, syarat kestabilan untuk tundaan waktu harus berada pada interval  $(0, 14.8188)$ . Karena tundaan waktunya adalah  $\tau = 17$  hari, yang tidak berada pada interval tersebut, maka titik keseimbangan  $K = 2800$  tidak stabil.

**Teorema 3.** (Kuang 1993, halaman 66). Misalkan  $f(\lambda, \tau) = \lambda^n + g(\lambda, \tau)$ , dengan  $g(\lambda, \tau)$  adalah suatu fungsi analitik. Anggap  $\alpha = \limsup_{\substack{\text{Re } \lambda > 0 \\ |\lambda| \rightarrow \infty}} |\lambda^{-n} g(\lambda, \tau)| < 1$ . Maka, jika  $\tau$

berubah, jumlah multiplisiti akar-akar dari  $f(\lambda, \tau) = 0$  dalam setengah bidang sebelah kanan buka hanya dapat berubah jika suatu akar muncul pada sumbu imajiner atau menyeberangi sumbu imajiner.

Teorema 3 menyediakan suatu analisis untuk menentukan apakah semua nilai eigen dari persamaan karakteristik untuk model linear menyeberangi sumbu imajiner dari sebelah kanan ke sebelah kiri atau dari sebelah kiri ke sebelah kanan. Dengan Teorema 3, kita juga dapat menentukan apakah bifurkasi Hopf dan perubahan-perubahan kestabilan muncul atau tidak.

Dengan Teorema 3 diketahui bahwa jika kestabilan solusi trivial  $u(t) = 0$  untuk model (3) berubah pada nilai  $\tau = \bar{\tau}$ , maka persamaan karakteristik (4) harus mempunyai sepasang akar-akar kompleks konjugat murni ketika  $\tau = \bar{\tau}$ . Pada kenyataannya, dari Teorema 3, kita dapat mempertimbangkan bahwa akar-akar dari persamaan karakteristik (4) merupakan suatu fungsi kontinu terhadap tundaan waktu  $\tau$ , yaitu,  $\lambda(\tau) + r e^{-\lambda(\tau)\tau} = 0$ . Selanjutnya, untuk memahami perubahan kestabilan pada model (3) kita perlu menentukan nilai  $\bar{\tau}$  dimana persamaan karakteristik (4) mungkin mempunyai sepasang akar-akar kompleks konjugat murni.

Anggap  $\lambda = i\omega$ ,  $\omega > 0$  adalah suatu akar dari persamaan karakteristik (4) untuk  $\tau = \bar{\tau}$ ,  $\bar{\tau} \geq 0$ . Substitusi  $\lambda = i\omega$  ke dalam persamaan karakteristik (4) diperoleh

$$\begin{aligned} r \cos \omega\tau &= 0 \\ r \sin \omega\tau &= \omega. \end{aligned} \tag{5}$$

Selanjutnya diperoleh  $\omega = r > 0$ .

Dari persamaan karakteristik (4) diperoleh  $\frac{d\lambda}{d\tau} - r e^{-\lambda\tau} \left( \frac{d\lambda}{d\tau} \tau + \lambda \right) = 0$  dan juga diketahui

bahwa  $-r e^{\lambda\tau} = \lambda$ , maka diperoleh  $\frac{d\lambda}{d\tau} + \lambda \left( \frac{d\lambda}{d\tau} \tau + \lambda \right) = 0$  atau  $\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{-\lambda^2}{1 + \lambda\tau}$ . Dengan itu diperoleh,

$$\begin{aligned} \text{sign} \left\{ \frac{d(\text{Re } \lambda)}{d\tau} \right\}_{\lambda=i\omega} &= \text{sign} \left\{ \text{Re} \frac{\omega^2}{1 + i\omega\tau} \right\} \\ &= \text{sign} \left\{ \text{Re} \frac{\omega^2 - i\omega^3\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \right\} \\ &= \text{sign} \left\{ \frac{\omega^2}{1 + \omega^2\tau^2} \right\} > 0 \end{aligned}$$

Hal ini mengakibatkan bahwa semua akar-akar yang menyeberangi sumbu imajiner pada  $i\omega$  menyeberang dari sebelah kiri ke sebelah kanan bilamana nilai  $\tau$  meningkat, Kuang (1993).

Untuk  $\tau = 0$ , diperoleh  $\lambda(0) = -r < 0$ . Hal ini menyatakan bahwa populasi keseimbangan nol untuk model linear adalah stabil asimptotik jika tidak ada tundaan waktu. Dari persamaan (5) dan  $\omega = r$ , diperoleh  $\cos \omega\tau = 0$  dan  $\sin \omega\tau = 1$ . Dengan itu diperoleh  $\omega\tau = \frac{\pi}{2}$  atau  $\tau = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2r}$ . Selanjutnya dari argumen di atas dan bersama dengan bukti

Teorema 3 menunjukkan bahwa jika  $\tau > \tau_0$ , maka populasi keseimbangan nol adalah tidak

stabil. Dalam hal ini wujud suatu perubahan kestabilan pada  $\tau = \frac{\pi}{2r}$ . Bifurkasi Hopf wujud pada saat  $\tau = \frac{\pi}{2r}$  dan titik keseimbangan nol kehilangan kestabilannya pada nilai tersebut.

**Penghapusan Bentuk Tundaan Waktu  $x(t - \tau)$**

Pada bagian ini akan dianalisis perilaku model (2) apabila bentuk  $x(t - \tau)$  dihilangkan dari model (2) dengan menggunakan pendekatan  $x(t - \tau) \cong x(t) - \tau \frac{dx}{dt}$ . Pendekatan ini menggunakan deret Taylor di sekitar titik  $t = \tau$  untuk nilai  $\tau$  cukup dekat dengan nol. Dengan menggantikan  $x(t - \tau) = x(t) - \tau \frac{dx}{dt}$  ke dalam persamaan (2) diperoleh  $\left(1 - \frac{r\tau}{K} x(t)\right) \frac{dx(t)}{dt} = rx(t) - \frac{r}{K} x(t)^2$ . Untuk  $x(t) \neq \frac{K}{r\tau}$ , persamaan tersebut dapat ditulis sebagai

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{rKx(t) - rx(t)^2}{K - r\tau x(t)} \tag{6}$$

Titik keseimbangan untuk model (6) adalah  $x = 0$  dan  $x = K$ . Persamaan diferensial (6) dapat diselesaikan dengan pemisahan variabel dan diperoleh

$$\frac{K - r\tau x}{rx(K - x)} dx = dt \tag{7}$$

Jika  $r\tau = 1$ , maka diperoleh solusi  $x(t) = x_0 e^{rt}$ . Dengan demikian, populasi akan membesar tanpa batas dan trayektori populasi tidak menuju ke titik keseimbangan populasi. Dalam hal  $r\tau < 1$ , untuk mencari solusi dari persamaan diferensial (7), akan ditinjau empat kasus.

**Kasus 1.**  $x \in [0, K)$ . Dengan mengintegrasikan kedua suku pada persamaan (7) bersama-sama dengan syarat awal  $x(0) = x_0 \in [0, K)$  diperoleh solusi implisit

$$\frac{x(t)}{x_0} \left( \frac{K - x_0}{K - x(t)} \right)^{(1-r\tau)} - e^{rt} = 0.$$

Untuk  $t$  menuju ke tak hingga, persamaan solusi di atas dipenuhi jika  $x(t)$  menuju ke  $K$ . Dengan itu, untuk  $x_0 \in [0, K)$  dan  $0 < \tau < \frac{1}{r}$  titik keseimbangan  $K$  stabil.

**Kasus 2.**  $x = K$ .

Karena  $x = K$  adalah populasi keseimbangan untuk model (6), dan untuk  $x_0 = K$  maka untuk setiap  $t$  solusinya adalah  $x(t) = x_0 = K$ .

**Kasus 3.**  $x \in \left( K, \frac{K}{r\tau} \right)$ .

Dengan syarat awal  $x(0) = x_0 \in \left( K, \frac{K}{r\tau} \right)$  diperoleh solusi implisit untuk model (6) sebagai

$$\frac{x(t)}{x_0} \left( \frac{x_0 - K}{x(t) - K} \right)^{(1-r\tau)} - e^{rt} = 0.$$

**Kasus 4.**  $x > \frac{K}{r\tau}$ .

Untuk kasus ini dan dengan syarat awal  $x(0) = x_0 > \frac{K}{r\tau}$  diperoleh solusi implisit

$$\frac{x(t)}{x_0} \left( \frac{x_0 - K}{x(t) - K} \right)^{(1-r\tau)} - e^{rt} = 0.$$

#### 4. Kesimpulan

Model logistik tanpa tundaan waktu mempunyai dua titik keseimbangan, yaitu titik keseimbangan  $x = 0$  (tidak stabil) dan  $x = K$  (stabil asimptotik). Dengan mempertimbangkan tundaan waktu pada model logistik, titik keseimbangan  $x = K$  mungkin stabil, mungkin juga tidak stabil. Dengan menggunakan metode linearisasi, diketahui bahwa kestabilan titik keseimbangan  $x = K$  di samping bergantung pada nilai tundaan waktu juga bergantung jumlah awal populasi. Untuk  $0 < \tau < \frac{\pi}{2r}$ , titik keseimbangan  $x = K$  stabil.

Untuk  $\tau = \frac{\pi}{2r}$ , wujud suatu bifurkasi Hopf dan untuk  $\tau > \frac{\pi}{2r}$  titik keseimbangan  $x = K$  menjadi tidak stabil. Dengan menggunakan deret Taylor di sekitar titik keseimbangan  $x = K$ , bentuk  $x(t - \tau)$  dapat dihapuskan dan diperoleh suatu model yang tetap bergantung pada tundaan waktu  $\tau$ . Model tersebut dapat diselesaikan secara analitik dan titik keseimbangan  $x = K$  stabil jika  $0 < \tau < \frac{1}{r}$  dengan jumlah populasi awal yang sesuai.

#### Referensi

- [1] Agnew, T.T., 1979, "Optimal exploitation of a fishery employing a non-linear harvesting function". *Ecological Modelling*, 6: 47-57.
- [2] Barnes, B., dan Fulford, G.R., 2002, "*Mathematical Modelling With Case Studies*". Taylor & Francis Inc., New York.
- [3] Forsys, U., dan Czoehra, A.M., 2003, "Logistic equations in tumor growth modeling". *Int. J. Appl. Comp. Sci.* 13(3): 317-325.

- [4] Ganter, P., 2006, "Modeling density-dependent population growth", <http://www.tnstate.edu/ganter/B412%20Extra%20LogisticGrowth.html>. [27 Januari 2006]
- [5] Gopalsamy, K., 1992, "*Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*". Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- [6] Haberman, R., 1998, "*Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow*". SIAM, Philadelphia.
- [7] Hale, J.K., 1977, "*Theory of Functional Differential Equations*". Springer-Verlag, Heidelberg.
- [8] Kuang, Y., 1993, "*Delay Differential Equations with Application in Population Dynamics*". Academic Press, New York.
- [9] Lipkin, L., dan Smith, D., 2006, "Logistic growth model", <http://www.math.duke.edu/education/ccp/materials/diffeq/logistic/logi1.html>. [19 April 2006]
- [10] Toaha, S., 2006, "Stability analysis and maximum profit of logistic population model with time delay and constant effort of harvesting". *Jurnal Matematika, Statistika & Komputasi*. 3(1): Vol. 3. No. 1. 3(1): 9-18.