ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 9, No.1, 49-56, Juli 2012

Himpunan Ω-Stabil Sebagai Daerah Faktorisasi Tunggal

Nur Erawaty[1], Andi Kresna Jaya[1], Nirwana[1]

Abstrak

Misalkan *D* adalah daerah integral. Unsur tak nol yang bukan unit dapat ditulis dalam hasil kali berhingga dari unsur-unsur tak tereduksi. Suatu unsur tak nol *x* dari *D* yang bukan unit dapat ditulis dalam bentuk :

$p_1 p_2 \dots p_r$

dimana $p_1 p_2 \dots p_r$ adalah unsur-unsur tak tereduksi. Maka *D* dikatakan daerah faktorisasi tunggal (DFT).Himpunan Ω merupakan sub himpunan dari $\mathbb{C}$, lapangan bilangan kompleks yang memenuhi :

1. $\Omega \neq \mathbb{C}$, khususnya terdapat suatu bilangan real di luar Ω
2. $\mathbb{C}^+ \subseteq \Omega$, dengan $\mathbb{C}^+ = \{\, x + iy \in \mathbb{C} \,|\, x \geq 0 \}$.
3. Simetris terhadap sumbu real.

Tulisan ini akan menyatakan unsur-unsur dalam himpunan Ω-stabil, yang bukan unit, yaitu bentuk rasional sejati yang tidak mempunyai pole di $\overline{\Omega}$, ke dalam hasil kali unsur-unsur tak tereduksi.

Kata kunci: Tak tereduksi, daerah integral, faktorisasi, himpunan Ω-stabil.

1. Pendahuluan

Faktorisasi suatu unsur dalam Daerah Integral ke dalam unsur-unsur yang tak dapat difaktorkan lagi, tidaklah selalu dalam satu bentuk faktorisasi saja. Misalkan pada Daerah Integral $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$, unsur

$$8 = \left(1 + \sqrt{-7}\right)\left(1 - \sqrt{-7}\right)$$

dan juga 8 = 2.2.2. Di sini dapat dilihat sebuah unsur dapat difaktorisasikan ke dalam 2 bentuk, di mana unsur-unsurnya tak dapat lagi difaktorkan ke dalam unsur yang lebih sederhana. Jika Daerah Integral tersebut semua unsurnya terfaktorisasi hanya dalam satu bentuk saja, dalam artian jika ada dua bentuk maka keduanya berbeda dalam hal urutan saja, maka daerah tersebut dinamakan Daerah Faktorisasi Tunggal.

Salah satu contoh sederhana dari daerah faktorisasi tunggal adalah himpunan bilangan bulat atau $\mathbb{Z}$ dimana terdapat faktorisasi tunggal dalam bentuk bilangan-bilangan prima, yaitu unsur yang tak dapat difaktorkan lagi. Dengan menggunakan teorema-teorema yang berkaitan dengan daerah faktorisasi tunggal, dapat ditunjukkan bahwa himpunan Ω-stabil merupakan Daerah Faktorisasi Tunggal.

---

[1] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin, email : nurerawaty@yahoo.com, andikresna@yahoo.com*

2. Pembahasan

Berikut beberapa hal yang berkaitan dengan sifat-sifat yang berlaku pada daerah integral. Definisi dan bukti teorema dapat dilihat lebih detail di buku [1] dan [3].

Misalkan R adalah daerah Integral.

Definisi 1.
Jika $r, s \in R$, dan $s = rt$ untuk setiap $t \in R$. Maka r membagi s. Ditulis $r \mid s$.

Definisi 2.
$Jika\ a \in R\ maka\ aR = \{ar|r \in R\}$.
Bentuk berikut ekuivalen:

(1) $a|b$, maka $b = ar, r \in R$. Karena $aR = \{ar|r \in R\}$ sehingga berlaku (2)
(2) $b \in aR$, maka berlaku (3)
(3) $bR \subset aR$

Definisi 3.
Unsur $u \in R$ disebut unit (unsur yang mempunyai invers terhadap perkalian) pada R jika dan hanya jika $\exists\ u^{-1} \in R$ sedemikian hingga

$$u \cdot u^{-1} = u^{-1} \cdot u = 1.$$

Catatan 1.
Jika R adalah gelanggang, himpunan unit-unit pada R dinotasikan dengan R^*. Secara umum, R^* tidak sama dengan $R - \{0\}$.

Definisi 4.
Suatu unsur r dalam daerah integral R dikatakan tak tereduksi jika

(1) $r \notin R^*$,
(2) Jika $r = ab$, maka a atau b adalah suatu unit

Catatan 2.
Unsur $r \in R$ tereduksi jika $r = st$ untuk setiap $s, t \in R$ dimana baik s maupun t bukan unit. Oleh karena itu, $r \in R$ tak tereduksi jika tidak dapat difaktorkan dan bukan suatu unit.

Teorema 1. [6]
Unsur a dan b sekawan dalam daerah integral R jika memenuhi:

(1) $a = bu$ untuk suatu $u \in R^*$
(2) $b = av$ untuk suatu $v \in R^*$
(3) $a|b$ dan $b|a$,
(4) $aR = bR$

Daerah Faktorisasi Tunggal memenuhi kriteria di bawah ini,

Definisi 5.
Suatu daerah integral R dikatakan daerah faktorisasi tunggal (DFT) jika memenuhi*:*

(1) Setiap unsur tak nol pada R merupakan unit atau hasil kali berhingga unsur-unsur tak tereduksi.
(2) Jika $a_1 \ldots a_m = b_1 \ldots b_n$, dimana a_i, b_j unsur tak tereduksi, maka $n = m$ dan setelah diurutkan kembali faktor-faktotnya, a_i dan b_j sekawan untuk $1 \leq i \leq n$.

Hasil kali unsur tak tereduksi dan unit merupakan unsur tak tereduksi. Misalkan $u \in R^*$ dan p unsur tak tereduksi. Klaim bahwa up bukan unit. Andaikan up unit, berarti terdapat $(up)^{-1} \in R$ sedemikian sehingga $(up)(up)^{-1} = 1$. Yang artinya bahwa p unit. Ini kontradiksi dengan p unsur tak tereduksi.

Jika $up = ab$, dengan $a, b \in R$ dan a, b unsur tak tereduksi. Karena u unit, maka $p = u^{-1}(ab)$, $p = (u^{-1}a)b$. Karena p unsur tak terduksi maka $u^{-1}a$ unit atau b unit (maka p tak tereduksi), dan mengakibatkan a atau b adalah unit. Jadi up unsur tak tereduksi

Contoh 1. (DFT)

1. Daerah $\mathbb{Z}$, berdasarkan teorema fundamental aritmetika.
2. Daerah $\mathbb{C}[x]$. Setiap polinomial yang tunggal ditulis sebagai hasil kali faktor-faktor linier, dan perkalian bilangan-bilangan tak nol. Misalnya $x^2 + 1 = (x - i)(x + i) = 2(x + i)\frac{1}{2}(x - i)$.

Definisi 6.
Suatu unsur membagi sempurna b jika $a|b$ serta a dan b tidak sekawan.

Teorema2.
Misalkan R adalah DFT. Maka tidak terdapat barisan tak berhingga pada unsur $r_1, r_2, \ldots$ pada R sehingga r_{n+1} pembagi sempurna r_n untuk setiap $n \geq 1$.

Teorema 3. [5]
Misalkan R adalah DFT. Jika p unsur tak tereduksi dan $p|ab$ maka $p|a$ atau $p|b$.

Teorema 4. [6]
Misalkan R adalah suatu daerah integral. R adalah suatu daerah faktorisasi tunggal jika dan hanya jika memenuhi:

(1) Tidak terdapat barisan tak hingga $r_1, r_2, \ldots$elemen pada R sehingga r_{n+1} habis membagi r_n untuk setiap $n \geq 1$
(2) Untuk setiap elemen tak tereduksi $p \in R$, jika $p|ab$, maka $p|a$ atau $p|b$

Bilangan bulat $p > 1$ dikatakan tak tereduksi jika p hanya dapat ditulis dalam bentuk $p = ab$ pada bilangan bulat positif a dan b dimana $a = 1$ atau $b = 1$. Polinomial tereduksi adalah polinomial tak konstan yang memuat faktorisasi tak trivial.

Misalkan F adalah suatu lapangan. Suatu polinomial tak konstan $f(x) \in F[x]$, dikatakan tak tereduksi jika $f(x) = g(x)h(x)$ dengan syarat (derajat $g(x) \neq 0$ atau derajat $h(x) \neq 0$ untuk polinomial $g(x)$ dan $g(x)$ dalam $F[x]$.

Definisi 7. Daerah Faktorisasi Tunggal (DFT)
Misalkan *D daerah integral*. *D* dinamakan daerah faktorisasi tunggal apabila memenuhi [4]:

1. Setiap $p \in$ *D-{0}*, p bukan unit dapat dinyatakan sebagai hasil kali sejumlah berhingga elemen tak tereduksi.
2. Jika $p_1p_2 \ldots p_r$ dan $q_1q_2 \ldots q_s$ dua macam faktorisasi dari suatu elemen $p \in D$ dengan $p_{i,}q_i$ elemen tak terduksi maka $r = s$ dan apabila perlu dengan mengubah urutan, diperoleh p_i berasosiasi dengan q_i

Daerah integral Z adalah contoh sederhana daerah integral yang merupakan daerah faktorisasi tunggal dalam bentuk prima.

Teorema 5.
Jika $P(x)$ adalah polinomial berderajat positif dengan koefisien bilangan kompleks maka $P(x)$ mempunyai paling banyak *n* akar-akar bilangan kompleks.

Berdasarkan teorema dasar aljabar, setiap polinomial berderajat positif yang mempunyai koefisien bilangan kompleks dapat difaktorkan ke bentuk $x - r$ dan sebuah konstanta.
Definisi dan teorema yang digunakan buktinya dapat dilihat pada Erawaty [2].

Definisi 8.
Misalkan $\mathbb{C}$ lapangan bilangan kompleks dan$t(s) \in \mathbb{R}(s)$ dengan $t(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$,$n(s), d(s) \in \mathbb{R}[s], d(s) \neq 0$ maka akar dari $t(s)$ didefinisikan sebagai akar dari polinomial $n(s)$ di $\mathbb{C}$. Dan pole dari $t(s)$ didefinisikan sebagai akar dari polinomial $d(s)$ di $\mathbb{C}$.
Misal $t(s) \in \mathbb{R}(s)$, $t(s) \neq 0$, $t(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$, $n(s), d(s) \in \mathbb{R}(s), d(s) \neq 0$.

1. Jika $der\ n(s) = der\ d(s), t(s)$ disebut bentuk rasional biproper.
2. Jika $der\ n(s) > der\ d(s)$, $t(s)$ disebut bentuk rasional non proper.
3. Jika $der\ n(s) < der\ d(s), t(s)$ disebut bentuk rasional strictly proper

Berikut akan ditinjau suatu himpunan yaitu himpunan dari semua bentuk rasional sejati. Himpunan ini ditulis

$$\mathbb{R}_{pr}(s) = \{\frac{n(s)}{d(s)} | \text{der } n(s) \leq \text{der } n(s)\}.$$

Dan akan didefinisikan pula subhimpunan dari himpunan bentuk rasional sejati yaitu himpunan Ω-stabil. Sebelumnya dilihat dahulu apa yang disebut himpunan Ω.

Definisi 9.
Himpunan Ω adalah subhimpunan dari $\mathbb{C}$ lapangan bilangan kompleks yang memenuhi [2]:

1. $\Omega \neq \mathbb{C}$, khususnya terdapat suatu bilangan real di luar Ω
2. $\mathbb{C}^+ \subseteq \Omega$, dengan $\mathbb{C}^+ = \{ x + iy \in \mathbb{C} \,|x \geq 0\}$.
3. Simetris terhadap sumbu real, yaitu $x + iy \in \Omega \Rightarrow x - iy \in \Omega$

Setiap $t(s) \in \mathbb{R}(s)$ dapat difaktorkan menjadi$t \quad (s) = t_\Omega(s)\hat{t}(s)$
Dengan $t_\Omega(s) = \frac{n_\Omega(s)}{d_\Omega(s)}$ dan $\hat{t}(s) = \frac{\hat{n}(s)}{\hat{d}(s)}$, $n_\Omega(s)$, $d_\Omega(s)$, $\hat{n}(s)$dan $\hat{d}(s) \in \mathbb{R}[s]$, $n_\Omega(s)$, $d_\Omega(s)$ semua akarnya di Ω, $\hat{n}(s), \hat{d}(s)$ semua akarnya di Ω^c.

Definisi 10.
Suatu $t(s) \in \mathbb{R}(s)$ disebut unsur Ω-stabil jika $t(s)$ adalah rasional sejati dan tidak mempunyai pole di Ω

Himpunan unsur Ω-stabil ditulis dengan
$S = \{t(s) \in \mathbb{R} | t(s)$ tidak mempunyai pole di $\overline{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}\}$
Misal $t(s)$ tidak mempunyai pole di Ω, $t(s)$ dapat ditulis sebagai

$$t(s) = n_\Omega(s)\frac{\hat{n}(s)}{\hat{d}(s)}$$

Untuk suatu $n_\Omega(s)$, $\hat{n}(s)$ dan $\hat{d}(s) \in \mathbb{R}[s]$ dengan $n_\Omega(s)$ semua akarnya di Ω. $\hat{n}(s)$, $\hat{d}(s)$ semua akarnya di Ω^c. karena $t(s)$ tidak mempunyai pole di ∞, yakni $t(s) \in \mathbb{R}_{pr}(s)$ maka der $n_\Omega(s)\hat{n}(s) \leq$ der $\hat{d}(s)$ yaitu:

$$\text{der } (n_\Omega(s) + \hat{n}(s)) \leq \text{der } \hat{d}(s),$$

Karena der $(n_\Omega(s)) \geq 0$ sehingga der $\hat{n}(s) \leq$ der $\hat{d}(s)$.
Dengan demikian untuk setiap $t(s) \in S$, $t(s) \neq 0$

$$\text{der } \hat{d}(s) - \text{der } \hat{n}(s) \geq 0$$

Diketahui bahwa S dengan operasi tambah dan kali membentuk gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan (bilangan real 1) dan tidak memuat pembagi nol.
Misal $t(s) \in S$, berarti $t(s) = n_\Omega(s)\frac{\hat{n}(s)}{\hat{d}(s)} n_\Omega(s), \hat{n}(s), \hat{d}(s) \in \mathbb{R}[s]$ dan der $\hat{d}(s) =$ der $\hat{n}(s)$. Karena $S \subseteq \mathbb{R}_{pr}(s)$ maka $der\ \hat{d}(s) - der\ \hat{n}(s) - der\ n_\Omega(s) \geq 0$, sedangkan der $\hat{d}(s) = der\ \hat{n}(s)$ dan der $n_\Omega(s)$ ≥0.

Sehingga der $n_\Omega(s) = 0$ dan $t(s) = \frac{\hat{n}(s)}{\hat{d}(s)}$ dengan $\hat{n}(s), \hat{d}(s) \in \mathbb{R}[s]$, kemudian pilih $\hat{t}(s) = \frac{\hat{n}(s)}{\hat{d}(s)} \in S$.

Sehingga

$$t(s)\hat{t}(s) = \frac{\hat{n}(s)}{\hat{d}(s)}\frac{\hat{d}(s)}{\hat{n}(s)} = 1$$

Jadi $t(s)$ unit di S jika dan hanya jika $(s) = \frac{\hat{n}(s)}{\hat{d}(s)}$, $\hat{n}(s), \hat{d}(s) \in \hat{d}(s)$.

Contoh 2.
Misalkan $t(s) = \frac{s-1}{(s+1)^3}\frac{(s+1)^3}{(s+2)^3}$,
yang merupakan unit pada $t(s)$ adalah $\frac{(s+1)^3}{(s+2)^3}$.

Untuk selanjutnya $-\alpha$ menyatakan suatu bilangan real di Ω^c (atau $-\alpha \in \mathbb{R} \cap \Omega^c$) yang tertentu/tetap.

Teorema 6. [2]

Setiap $t(s) \in \mathbb{R}(s)$ dapat ditulis dengan *:*

$$\begin{aligned} t(s) &= \frac{n_\Omega(s)}{d_\Omega(s)} \cdot \frac{1}{(s+\alpha)^q} \cdot \frac{\hat{n}(s)}{\hat{d}(s)} (s+\alpha)^q \\ &= \frac{n_\Omega(s)}{d_\Omega(s)(s+\alpha)^q} \ u(s) \end{aligned}$$

dimana

$q = der\ \hat{d}(s) - der\ \hat{n}(s)$

$u(s) = \frac{\hat{n}_\Omega(s)}{\hat{d}_\Omega(s)} (s+\alpha)^q$ suatu unit di S

Akibat 1.

Setiap $t(s) \in S$ dapat difaktorkan menjadi

$$\begin{aligned} t(s) &= \frac{n_\Omega(s)}{(s+\alpha)^q} \ u(s) \\ &= \frac{n_\Omega(s)}{(s+\alpha)^v} \frac{1}{(s+\alpha)^q} \ u(s) \end{aligned}$$

dimana

$n_\Omega(s)$ tak punya zero *di* Ω^c
$v = der\ n_\Omega(s)$
$u(s) = \frac{\hat{n}(s)}{\hat{d}(s)} (s+\alpha)^q$ suatu unit di *S*.

Kemudian $n_\Omega(s)$ dapat difaktorkan lagi menjadi faktor-faktor sederhana terhadap $\mathbb{R}$.

$$n_\Omega(s) = c(s+\lambda_1)^{v1} \dots (s+\lambda_n)^{vn} (s^2 + a_1 s + b_1)^{w1} \dots (s^2 + a_k s + b_k)^{wk}$$

dimana

$c_i, a_i, b_i \in \mathbb{R}$ untuk $i = 1, 2, \dots, k$

$-\lambda_j \in \Omega \cap \mathbb{R}$ untuk $j = 1, 2, \dots, n$

$v_j \omega_i \in \mathbb{Z}^+ \forall_\mathrm{i} \forall_\mathrm{j}$

$$\begin{aligned} t(s) = c \left[\frac{s+\lambda_1}{s+\alpha}\right]^{v1} \dots \left[\frac{s+\lambda_n}{s+\alpha}\right]^{vn} \left[\frac{s^2 + a_1 s + b_1}{(s+\alpha)^2}\right]^{\omega 1} \dots \left[\frac{s^2 + a_1 s + b_k}{(s+\alpha)^2}\right]^{\omega k} \frac{1}{(s+\alpha)^q} \ u(s) \\ = c.\, p_1(s)^{v1} \dots p_n\,(s)^{vn} {p'}_i(s)^{\omega 1} \dots \ {p'}_k(s)^{\omega k} p^*(s)^q \ u(s).\, (*) \end{aligned}$$

dengan

$p_i(s) \quad = \frac{s+\lambda}{s+\alpha}\ , \lambda \in \mathbb{R} \cap \ \Omega$

$p'_j(s) \quad = \frac{as^2+bs+c}{s+\alpha}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, dengan $as^2 + bs + c$ tak dapat difaktorkan menjadi suku banyak linear di $\mathbb{R}[s]$

$p^*(s) \quad = \frac{1}{s+\alpha}$

Ketunggalan faktorisasi $n_\Omega(s)$ mengakibatkan ketunggalan faktorisasi $t(s) \epsilon S$. Faktorisasi $t(s)$dalam bentukdi atas disebut faktorisasi $t(s)$ modulo α.

Contoh 3.
Misal $\Omega = \mathbb{C}^+$

$$t_1(s) = \frac{(s-1)(s-2)^2}{(s+1)^4} \quad \text{dan} \quad t_2(s) = \frac{(s-1)^2(s-2)^4(s^2+2s+2)}{(s+1)^4}$$

maka

$$t_1(s) = \left(\frac{s-1}{s+1}\right)\left(\frac{s-2}{s+1}\right)^2\left(\frac{1}{s+1}\right) = p_{11}(s)p_{12}(s)^2 p_1^*(s)$$

$$t_2(s) = \left(\frac{s-1}{s+2}\right)^2\left(\frac{s-2}{s+1}\right)^4\left(\frac{s^2+2s+2}{(s+1)^2}\right)\frac{1}{(s+1)^2}$$

$$= p_{21}(s)^2 p_{22}(s)^4 p'_{21}(s) p_2^*(s)$$

3. Kesimpulan

Adapun kesimpulan dalam tulisan ini adalah:

1. Unit pada himpunan fungsi rasional sejati dan stabil adalah:
   $u(s) = \frac{\hat{n}_\Omega(s)}{\hat{d}_\Omega(s)}(s+\alpha)^q$
2. Unsur $r \in R$ tereduksi jika $r = st$ untuk setiap $s, t \in R$ dimana baik s maupun t bukan unit.
3. Unsur tak tereduksi pada himpunan fungsi rasional sejati dan stabil adalah:

   $p_i(s) \quad = \frac{s+\lambda}{s+\alpha}$, $\lambda \epsilon \mathbb{R} \cap \Omega$

   $p'_j(s) \quad = \frac{as^2+bs+c}{s+\alpha}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, dengan $as^2 + bs + c$ tak dapat difaktorkan menjadi suku banyak linear di $\mathbb{R}[s]$

   $p^*(s) \quad = \frac{1}{s+\alpha}$
4. Himpunan fungsi rasional sejati dan stabil merupakan daerah faktorisasi tunggal

Daftar Pustaka

[1] Charles C.S, 1984. *Abstract Algebra A Computational Approach*. John Wiley & Sons. New York.

[2] Erawaty N., 2000. *Pemanfaatan Bentuk Smith-McMillan untuk Parameterisasi Kompensator yang Menstabilkan Plant Poper*. Bidang Khusus Aljabar Program Studi Matematika Program Pascasarjana Institut Teknologi Bandung. Bandung.

[3] Fraleigh B.J., 1989. *A First Course in Abstract Algebra. Fifth Edition*. Addison-Wesley Publishing Company, New York.

[4] Isnarto, 2008. *Pengantar Struktur Aljabar 2*. Universitas Negeri Semarang. Semarang.

[5] Niven I., and Herbert S.Z., 1984. An *Introduction to The Theory of Numbers*. John Wiley & Sons. New York.