ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 10, No. 1, 14-25, Juli 2013

Dekomposisi Graf Hasil Kali Tiga Lintasan ke Dalam Sub Graf Perentang Reguler

Hasmawati[1]

Abstrak

Dekomposisi graf G adalah himpunan $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ dengan $H_i$merupakan subgraf dari Gyang memenuhi $E(G) = \bigcup_{i=1}^{n} E(H_i), E(H_i) \neq \emptyset, V(H_i) = V(H_j)$, dan $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$ untuk setiap $i \neq j$. Jika H_i merupakan subgraf perentang reguler, maka himpunan $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$disebut faktorisasi dari G. Dalam tulisan ini, disajikan dekomposisi dan faktorisasi graf hasil kali tiga lintasan $P_n x P_m x P_k$ untuk $n, m, k \geq 2$.

Kata Kunci:Dekomposisi, graf, sub graf, faktorisasi.

1. Pendahuluan

Graf *G(V, E)* adalah suatu sistem yang terdiri dari himpunan berhingga tak kosong *V* = *V* (*G*)dan himpunan *E* = *E*(*G*) dengan $E \subseteq [V]^{2.}$ Himpunan *V* disebut **himpunan titik**dari *G* dan himpunan *E* disebut **himpunan sisi**dari *G*. Setiap u atau v di *V* (*G*) disebut **titik** dan setiap $e = \{u, v\}$ di *E*(*G*) disebut **sisi**. Selanjutnya, sisi $e = \{u, v\}$ ditulis uv. Titik u disebut tetangga (neighbor) dari titik v jika $e = uv$. Lebih lanjut, titik u dan v dikatakan **titik-titik bertetangga**(*adjacent*), sedangkan sisi e dikatakan terkait (incident) dengan titik u dan v. Dua sisi e_1 dan e_2 pada *G* disebut **sisi-sisi bertetangga** jika e_1 dan e_2 terkait pada satu titik yang sama. Dua graf *G* dan *H* disebut**isomorf**jika terdapat pemetaaan satu-satu dan pada $\phi : V(G) \to V(H)$ sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in V$ (*G*) berlaku $xy \in V$ (*G*) jika hanya jika $\phi(x)\phi$ (y) $\in E$ (*H*).

Kardinalitashimpunan S dinotasikan dengan $|S|$, adalah banyaknya anggota dari *S*. Ordegraf *G* adalah $|V(G)|$, dan ukurangraf *G* adalah $|E(G)|$. Graf *G* berorde$m$dinotasikan dengan G_m.Derajattitik v_i, dinotasikan dengan $d_G(v_i)$, adalah $|N_G(v_i)|$. Derajat maksimum dari*G* adalah $\Delta(G) = maks\{d_G(v_i) : v_i \in V(G)\}$, dan derajat minimum dari *G* adalah $\delta(G) = \min\{d_G(v_i) : v_i \in V(G)\}$. Graf *G* disebut graf $\{r - reguler\}$ jika $\{\Delta(G) = \delta(G) = r\}$. Graf F disebut komplemendari graf *G*, jika *V(F)* = *V*(*G*) dan $uv \in E(F)$ jika dan hanya jika $uv \notin E(G)$. Komplemen dari graf *G* dinotasikan dengan $\bar{G}$. Dua graf *G* dan *H* disebut isomorfik jika terdapat pemetaaan satu-satu dan pada $\phi : V(G) \to V(H)$sedemikian sehingga untuk setiap $x, y \in V(G)$ berlaku $xy \in V$ (*G*) jika hanya jika $\phi(x)\phi$ (y) $\in E(H)$.

Graf *H(V', E')* disebut subgraf dari *G* jika $V' \subseteq$ V (G) dan $E' \subset E(G)$. selanjutnya, subgraf *H* dari *G* ditulis $H \subseteq$ G. Sufgraf *H* dikatakan subgraf maksimal dari *G* jika *H* memuat semua sisi $xy \in E(G)$ untuk semua $x, y \in V'$.Misalkan $H \subseteq$G, *H* disebut subgraf perentang dari *G* jika *V*(*H*) =*V*(*G*). Subgraf perentang yang setiap titiknya berderajat sama katakanlah *r* disebut subgraf perentang reguler-*r* atau faktor-*r*. Jadi subgraf perentang reguler berderajat 1 disebut faktor-1, derajat 2 disebut faktor-2, dan seterusnya.

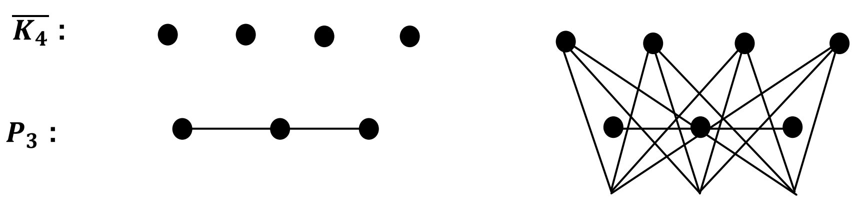
[1]*Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin*

2. Amalgamasi Graf

Amalgamasi graf adalah suatu operasi pada graf. Beberapa operasi pada graf yang telah dikenal sebelumnya diantaranya: operasi jumlah, gabung, kali dan corona.

2.1. Operasi Gabung, Jumlah, dan Kali

Misalkan G_i adalah graf dengan himpunan titik $V_i$dan himpunan sisi X_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Graf gabung$G = \cup_{i=1}^{k} G_i$ adalah suatu graf dengan himpunan titik $V = \cup_{i=1}^{k} V_i$dan himpunan sisi $X = \cup_{i=1}^{k} X_i$. Definisi graf jumlah secara umum belum ada. Namun untuk jumlah dua graf, Zykov telah mendefinisikannya pada tahun 1952 seperti berikut : Graf jumlah (*join*) $G = G_1 + G_2$ adalah suatu graf dengan $V(G) = V_1 \cup V_2$ dan $E(G) = X_1 \cup X_2 \cup \{uv: u \in V_1, v \in V_2\}$. Contoh grafjumlah $P_3 + \overline{K_4}$ dapat dilihat pada Gambar 1b.



Gambar 1. (a) Graf $P_3 \cup \overline{K_4}$ dan (b) Graf $P_3 + \overline{K_4}$.

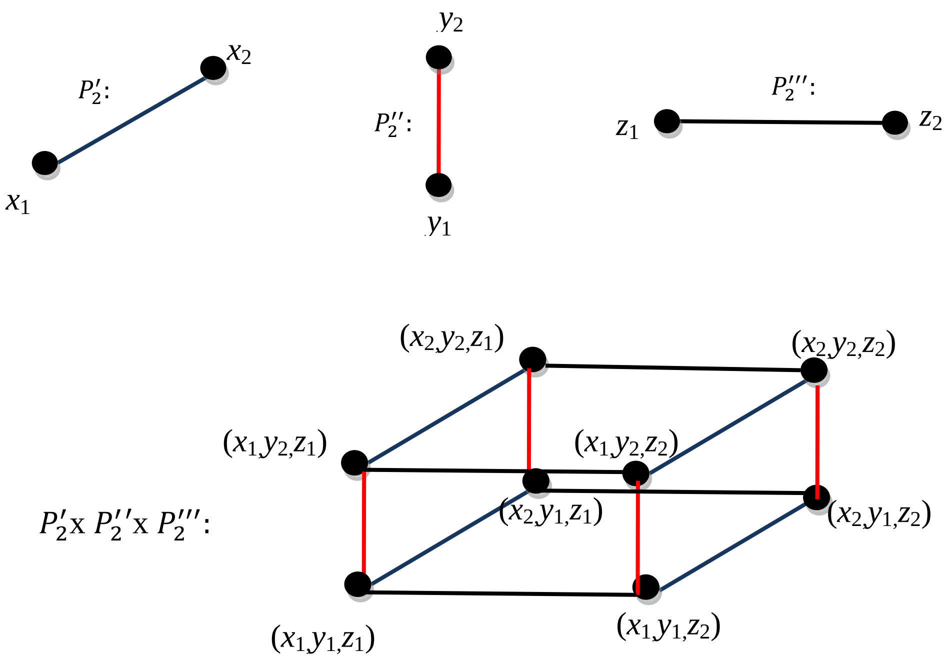
Di sini disajikan Graf kali dua graf dan tiga graf. Graf kali $G = G_1$ x G_2 adalah graf dengan himpunan titik $V(G) = V_1$ x V_2 dan himpunan sisi $E(G) = \{uv : u=(u_1,u_2), v=(v_1,v_2) \in V(G)$ dengan $u_1=v_1$dan $u_2v_2 \in E(G_2)$ atau $u_2=v_2$dan $u_1v_1 \in E(G_1)\}$. Definisi graf kali dari dua graf dapat dikembangkan menjadi graf kali dari tiga graf atau empat graf dan seterusnya. Graf kali dari tiga graf ditulis $G = G_1$ x G_2 xG_3 adalah graf dengan himpunan titik $V(G) = V_1$ x V_2 x V_3 dan himpunan sisi $E(G) = \{uv$: jika $u=(u_1,u_2,u_3)$, $v=(v_1,v_2,v_3) \in V(G)$ dengan $u_1=v_1, u_2=v_2$ dan $u_3v_3 \in E(G_3)$ atau $u_1=v_1$, $u_3=v_3$dan $u_2v_2 \in E(G_2)$ atau $u_2=v_2$, $u_3=v_3$dan $u_1v_1 \in E(G_1)\}$.

Sebagai contoh, misalkan himpunan titik 3 lintasan berorde 2 berturut-turut : $V(P_2')=\{x_1,x_2\}$, $V(P_2'') =\{y_1,y_2\}$ dan $V(P_2''')=\{z_1,z_2\}$ dengan himpunan sisi berturut-turut: $E(P_2')=\{e_{11}=x_1x_2\}$, $E(P_2'') =\{e_{21}= y_1y_2\}$ dan $E(P_2''')=\{e_{31} = z_1z_2\}$. Graf hasil kali dari tiga lintasan berode 2: P_2'xP_2''xP_2''' adalah graf dengan himpunan titik

$V(P_2'$xP_2''x$P_2''')=\{(x_1,y_1, z_1),),(x_1,y_1, z_2), (x_1,y_2, z_1), (x_1,y_2, z_2), (x_2y_1,z_1),(x_2, y_1,z_2), (x_2,y_2,z_1), (x_2,y_2,z_2\}$ dan

himpunan sisi $E(P_2'$xP_2''x$P_2''')=\{(x_1,y_1, z_1)(x_1,y_1, z_2), (x_1,y_1, z_1) (x_1,y_2, z_1), (x_1,y_1, z_1)(x_2y_1,z_1),(x_1,y_1, z_2)(x_1y_2,z_2), (x_1,y_1, z_2)(x_2, y_1,z_2), (x_1,y_2, z_1)(x_1,y_2, z_2), (x_1,y_2, z_1)(x_2,y_2,z_1), (x_1,y_2, z_1)(x_1,y_2,z_2), (x_1,y_2, z_2)(x_2,y_2,z_2), (x_2y_1,z_1)(x_2,y_2,z_1), (x_2 ,y_1,z_1)(x_2,y_1,z_2), (x_2,y_2,z_1) (x_2,y_2,z_2)\}$.

(1)

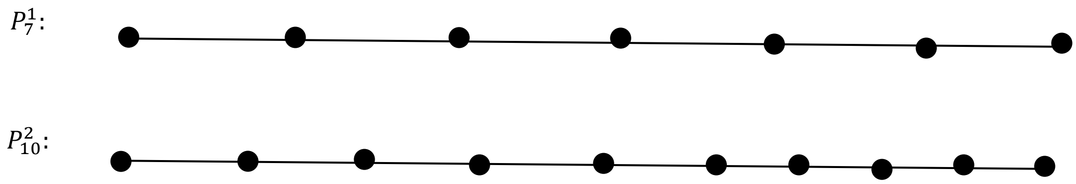


Gambar 2. Graf P_2'x P_2''x P_2'''.

2.2. Operasi Amalgamasi Graf

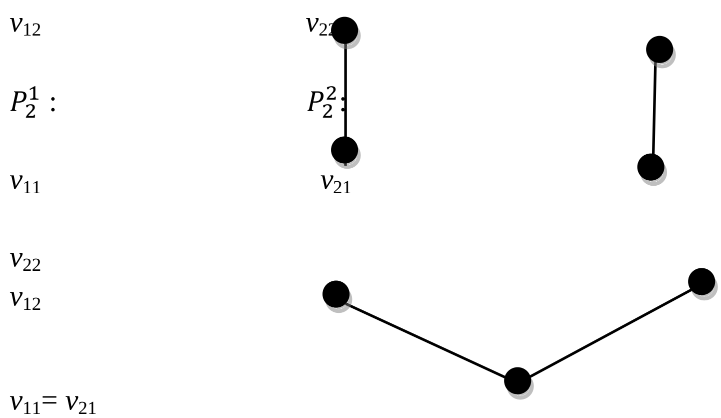
Penggunaan induksi matematika dalam pembuktian faktor pada graf hasil kali linasan diperlukan operasi amalgamasi. Olehnya itu, penyajian berikut lebih rinci menguraikan pengertian amalgamasi graf, khususnya untuk amalgamasi sisi. Amalgamasi graf terdiri atas dua yakni amalgamasi titik dan amalgamasi sisi.

Misalkan G_i, i=1,2,..., $n$adalah graf dengan titik tetap v_{ij} dan sisi tetap $e_{ij} = v_{ij}v_{ik}: i, j, k$ ∈ N. Amalgamasi titik graf $G_i$pada titik v_{ij} untuk suatu j dinotasikan $(G_i: v_{ij})$ adalah graf yang terdiri atas semua graf G_i dengan $v_{1j} = v_{2j} = \cdots = v_{nj}$. Sebagai contoh, himpunan titik dan sisi graf G_1= P_3^1 adalah graf lintasan berorde 3 dengan himpunan titik $V(P_3^1)$=$\{v_{11}, v_{12}, v_{13}\}$ dan himpunan sisi $E(P_3^1)$=$\{e_{11}, e_{12}: e_{11} = v_{11}v_{12}, e_{12} = v_{12}v_{13}\}$. Secara umum dapat ditulis G_i = P_n^i adalah lintasan ke-i berorde $n$dengan himpunan titik $V(P_n^i)$=$\{v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in}\}$ dan himpunan sisi $E(P_n^i)$=$\{e_{ij}: e_{ij} = v_{ij}v_{ij+1}, j = 1,2, \ldots, n-1\}$. Lihat Gambar 3.



Gambar 3. Graf Lintasan.

Menurut definisi di atas, Amalgamasi titik dari dua graf lintasan berorde dua dinotasikan $\left(P_2^i : v_{i1}; i = 1{,}2\right) = (P_2^1, P_2^2 : v_{11}, v_{21})$ adalah graf dengan himpunan titik $\{v_{11}=v_{21}, v_{12}, v_{22}\}$ dan himpunan sisi $\{e_{11}=v_{11}v_{12}=v_{21}v_{12}, e_{21}=v_{21}v_{22}\}$ atau $\{e_{11}=v_{11}v_{12}, e_{21}=v_{11}v_{22}\}$, karena $v_{11}=v_{21}$. Jadi amalgamasi titik graf-graf adalah penggabungan graf-graf tersebut dengan mennyatukan setiap titiknya menjadi hanya satu titik. Dapat dilihat dengan jelas pada amalgamasi $(P_2^1, P_2^2 : v_{11}, v_{21})$ yakni penggabungan graf P_2^1danP_2^2 dengan mennyatukan titik v_{11} dan v_{21} . Lebih jelasnya lihat Gambar 4.



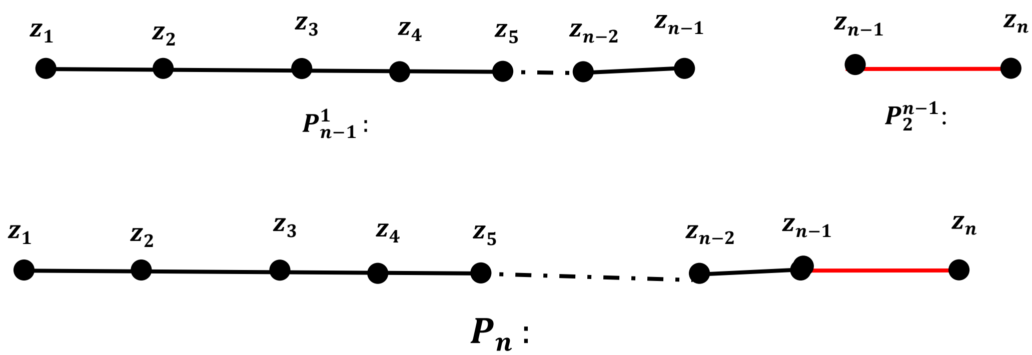
$P_3 = (P_2^1, P_2^2 : v_{11}, v_{21})$

Gambar 4. Graf Lintasan P_2^1 dan P_2^2,Serta Graf Amalgamasinya $(P_2^1, P_2^2 : v_{11}, v_{21})$.

Lebih jauh, notasikan

$$V(P_n^1) = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\} \text{ dan } V(P_2^{n-1}) = \{z_{n-1}, z_n\}. \qquad (2)$$

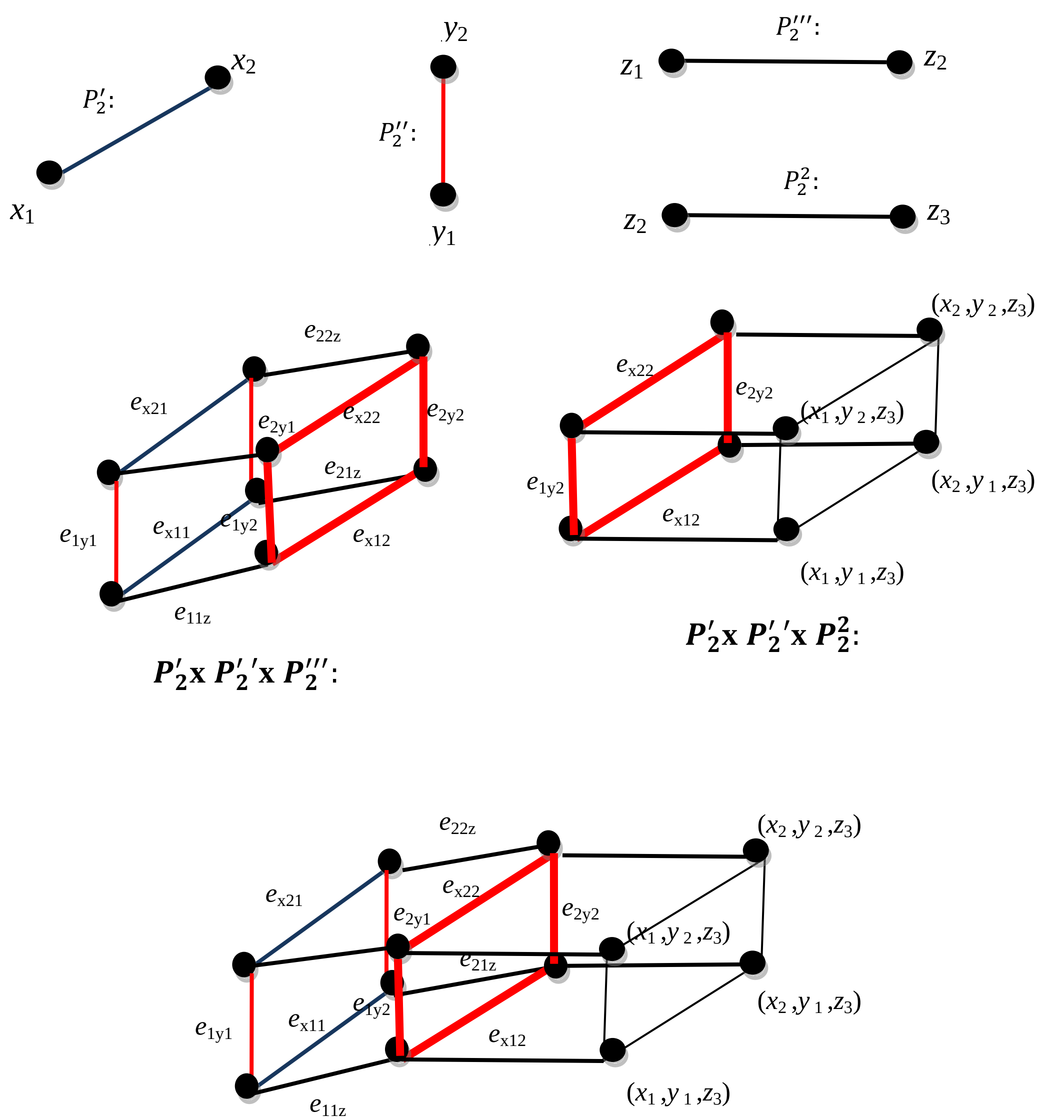
Maka amalgamasi titik $(P_{n-1}^1, P_2^{n-1} : z_{n-1}, z_{n-1}) = P_n^1 = P_n$. Jelasnya perhatikan Gambar 5.



Gambar 5. Graf Amalgamasi Titik $P_n = (P^1_{n-1}, P^{n-1}_2 : z_{n-1}, z_{n-1})$.

Misalkan $G_i$dengan himpunan sisi $E(G_i)=\{e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{ij}\}$ dan $G_r$dengan himpunan sisi $E(G_r)=\{e_{r1}, e_{r2}, ..., e_{rj}\}$. Amalgamasi sisi $G_i$terhadap G_r adalah mengambil semua $G_i$dan G_r dengan $e_{i1}=e_{r1}$, $e_{i2} = e_{r2}$, ..., $e_{rj} = e_{ij}$ untuk suatu i dan r, dinotasikan dengan (G_i ; $e_{i1}, e_{i2}, ..., e_{ij}$; G_r ; $e_{r1}, e_{r2}, ..., e_{rj}$).

Sebagai contoh akan dikontruksi amalgamasi sisi $P'_2 \text{x} P''_2 \text{x} P^1_2$ terhadap $P'_2 \text{x} P''_2 \text{x} P^2_2$.
Dengan mengikuti notasi (1) dan (2), maka himpunan titik $V(P'_2 \text{x} P''_2 \text{x} P^1_2) = V(P'_2 \text{x} P''_2 \text{x} P'''_2)$ $=\{(x_1,y_1, z_1),),(x_1,y_1, z_2), (x_1,y_2, z_1), (x_1,y_2, z_2), (x_2y_1,z_1),(x_2, y_1,z_2), (x_2,y_2,z_1), (x_2,y_2,z_2\}$, dan himpunan titik $V(P'_2 \text{x} P''_2 \text{x} P^2_2)=\{(x_1,y_1, z_2),),(x_1,y_1, z_3), (x_1,y_2, z_2), (x_1,y_2, z_3), (x_2y_1,z_2),(x_2, y_1,z_3), (x_2,y_2,z_2), (x_2,y_2,z_3\}$.
Notasikan $e_{ijz}=(x_i,y_j, z_r)(x_i,y_j, z_{r+1})$, $e_{xij}=(x_r,y_1, z_1)(x_{r+1},y_i, z_j)$, dan $e_{iyj}=(x_i,y_rz_j)(x_i,y_{r+1}, z_j)$, Maka himpunan sisi $E(P'_2 \text{x} P''_2 \text{x} P^1_2) = E(P'_2 \text{x} P''_2 \text{x} P'''_2)$ = $\{e_{11z}=(x_1,y_1, z_1)(x_1,y_1, z_2)$, $e_{1y1}= (x_1,y_1, z_1) (x_1,y_2, z_1)$, $e_{x11}= (x_1,y_1, z_1)(x_2y_1,z_1)$, $e_{1y2}=(x_1,y_1, z_2)(x_1y_2,z_2)$,$e_{x12}=(x_1,y_1, z_2)(x_2, y_1,z_2)$, $e_{12z}=(x_1,y_2, z_1)(x_1,y_2, z_2)$, $e_{x21}=(x_1,y_2, z_1)(x_2,y_2,z_1)$, $e_{12z}=(x_1,y_2, z_1)(x_1,y_2,z_2)$, $e_{x22}=(x_1,y_2, z_2)(x_2,y_2,z_2)$,$e_{2y1}=(x_2y_1,z_1)(x_2,y_2,z_1)$, $e_{21z}= (x_2 ,y_1,z_1)(x_2,y_1,z_2)$, $e_{22z}= (x_2,y_2,z_1) (x_2,y_2,z_2)$, dan himpunan sisi titik $E(P'_2 \text{x} P''_2 \text{x} P^2_2)=\{(x_1,y_1, z_2)(x_1,y_1, z_3)=e_{11z}$, $(x_1,y_1, z_2) (x_1,y_2, z_2)=e_{1y2}$, $(x_1,y_1, z_2)(x_2y_1,z_2)=e_{x12}$,$(x_1,y_1, z_3)(x_1y_2,z_3)=e_{1y3}$,$(x_1,y_1, z_3)(x_2, y_1,z_3)=e_{x13}$, $(x_1,y_2, z_2)(x_1,y_2, z_3)=e_{12z}$, $(x_1,y_2, z_2)(x_2,y_2,z_2)=e_{x22}$, $(x_2,y_1, z_2)(x_2,y_1,z_3)=e_{21z}$, $(x_1,y_2, z_3)(x_2,y_2,z_3)=e_{x23}$,$(x_2y_1,z_2)(x_2,y_2,z_2)=e_{2y2}$, $(x_2 ,y_1,z_2)(x_2,y_1,z_3)=e_{21z}$, $(x_2,y_2,z_2) (x_2,y_2,z_3)=e_{22z}\}$.
Amalgamasi sisi $P'_2 \text{x} P''_2 \text{x} P^1_2$ terhadap $P'_2 \text{x} P''_2 \text{x} P^2_2$ dinotasikan dengan(P'_2x P''_2x P^1_2 ; $e_{x22}, e_{2y2}, e_{x12}, e_{1y2}$: P'_2x P''_2x P^2_2; $\boldsymbol{e_{x22}, e_{2y2}, e_{x12}, e_{1y2}}$**)** dapat disingkat menjadi(P'_2x P''_2x P^1_2: P'_2x P''_2x P^2_2; $\boldsymbol{e_{x22}, e_{2y2}, e_{x12}, e_{1y2}}$**)** adalah graf dengan himpunan titik titik $\{(x_1,y_1, z_1),),(x_1,y_1, z_2), (x_1,y_2, z_1), (x_1,y_2, z_2), (x_2y_1,z_1),(x_2, y_1,z_2), (x_2,y_2,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_1,y_1, z_3), (x_1,y_2, z_3),(x_2, y_1,z_3), (x_2,y_2,z_3\}$, dan himpunan sisi $\{e_{11z}=(x_1,y_1, z_1)(x_1,y_1, z_2)$, $e_{1y1}= (x_1,y_1, z_1) (x_1,y_2, z_1)$, $e_{x11}= (x_1,y_1, z_1)(x_2y_1,z_1)$, $e_{1y2}=(x_1,y_1, z_2)(x_1y_2,z_2)$,$e_{x12}=(x_1,y_1, z_2)(x_2, y_1,z_2)$, $e_{12z}=(x_1,y_2, z_1)(x_1,y_2, z_2)$, $e_{x21}=(x_1,y_2, z_1)(x_2,y_2,z_1)$, $e_{12z}=(x_1,y_2, z_1)(x_1,y_2,z_2)$, $e_{x22}=(x_1,y_2, z_2)(x_2,y_2,z_2)$,$e_{2y1}=(x_2y_1,z_1)(x_2,y_2,z_1)$, $e_{21z}= (x_2 ,y_1,z_1)(x_2,y_1,z_2)$, $e_{22z}= (x_2,y_2,z_1) (x_2,y_2,z_2)$, $(x_1,y_1, z_2)(x_1,y_1, z_3)=e_{11z}$, $(x_1,y_1, z_3)(x_1y_2,z_3)=e_{1y3}$,$(x_1,y_1, z_3)(x_2, y_1,z_3)=e_{x13}$, $(x_1,y_2, z_2)(x_1,y_2, z_3)=e_{12z}$, $(x_2,y_1, z_2)(x_2,y_1,z_3)=e_{21z}$, $(x_1,y_2, z_3)(x_2,y_2,z_3)=e_{x23}$, $(x_2 ,y_1,z_2)(x_2,y_1,z_3)=e_{21z}$, $(x_2,y_2,z_2) (x_2,y_2,z_3)=e_{22z}\}$.
Bentuk graf (P'_2x P''_2x P^1_2: P'_2x P''_2x P^2_2; $\boldsymbol{e_{x22}, e_{2y2}, e_{x12}, e_{1y2}}$**)**dapat dilihat pada Gambar 6.



$\boldsymbol{(P_2' \text{x } P_2'' \text{x } P_2^1\ ; e_{x22}, e_{2y2}, e_{x12}, e_{1y2} : P_2' \text{x } P_2'' \text{x } P_2^2; e_{x22}, e_{2y2}, e_{x12}, e_{1y2}):}$

Gambar 6. Graf Amalgami Sisi $P_2' \text{x } P_2'' \text{x } P_2$ Terhadap $P_2' \text{x } P_2'' \text{x } P_2^2$.

Dapat diperiksa bahwa amalgamasi sisi $(P_2' \text{x } P_2'' \text{x } P_2^1 : P_2' \text{x } P_2'' \text{x } P_2^2; \boldsymbol{e_{x22}, e_{2y2}, e_{x12}, e_{1y2}})$ sama dengan $P_2' \text{x } P_2'' \text{x } P_3$ dengan $P_3 = (P_2^1, P_2^2 : z_2, z_2)$.

(3)

Teorema 1.

Amalgamasi sisi $(P_2' \text{x } P_2'' \text{x } P_{n-1}^1 : P_2' \text{x } P_2'' \text{x } P_2^{n-1}; \boldsymbol{e_{x2n-1}, e_{2yn-1}, e_{x1n-1}, e_{1yn-1}})$ *sama dengan graf kali dari tiga lintasan* $P_2' \text{x } P_2'' \text{x } P_n$ *dengan* $P_n = (P_{n-1}^1, P_2^{n-1} : z_{n-1}, z_{n-1})$.

Bukti.

Akan dibuktikan dengan pembuktian induksi matematika dengan $n \geq 3$. Untuk $n = 3$, $(P_2'$x P_2''x $P_2^1 : P_2'$x P_2''x $P_2^2; \boldsymbol{e_{x22}, e_{2y2}, e_{x12}, e_{1y2}})$ sama dengan P_2'x P_2''x P_3 dengan $P_3 = (P_2^1, P_2^2 : z_2, z_2)$. Hal ini benar sesuai dengan persamaan (3).

Asumsikan Teorema 1 benar untuk setiap $n \leq k$, yakni$(P_2'$x P_2''x $P_{k-1}^1 : P_2'$x P_2''x $P_2^{k-1}; \boldsymbol{e_{x2k-1}, e_{2yk-1}, e_{x1k-1}, e_{1yk-1}})$ sama dengan graf kali dari tiga lintasan P_2'x P_2''x P_k^1dengan $P_k = \left(P_{k-1}^1, P_2^{k-1} : z_{k-1}, z_{k-1}\right)$.

Akan ditunjukkan bahwa$(P_2'$x P_2''x $P_k^1 : P_2'$x P_2''x $P_2^k; \boldsymbol{e_{x2k}, e_{2yk}, e_{x1k}, e_{1yk}})$ sama dengan graf kali dari tiga lintasan P_2'x P_2''x P_{k+1}^1 dengan $P_{k+1} = \left(P_k^1, P_2^k : z_k, z_k\right)$.

Dari (2) diketahui bahwa apabila $P_{k+1} = \left(P_k^1, P_2^k : z_k, z_k\right)$, maka $V\left(P_k^1\right) = z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ dan $V\left(P_2^k\right) = \{z_k, z_{k+1}\}$. Sehingga P_2'x P_2''x P_k^1 adalah graf dengan

himpunan titik {(x_1, y_1, z_1), (x_1, y_2, z_1), (x_2,y_2,z_1),), (x_2, y_1, z_1), (x_1, y_1, z_2), ($x_1$$y_2$,$z_2$), ($x_2$, y_2,z_2), (x_2,y_1,z_2), (x_1, y_1, z_3), (x_1, y_2, z_3),(x_2, y_2,z_3), (x_2,y_1,z_3), ..., (x_1, y_1, z_{k-1}), (x_1, y_2, z_{k-1}),(x_2, y_2,z_{k-1}), (x_2,y_1,z_{k-1}), (x_1, y_1, z_k), (x_1, y_2, z_k),(x_2, y_2,z_k), (x_2,y_1,z_k)},

dan

himpunan sisi $\{\boldsymbol{e_{1y1}, e_{x21}, e_{2y1}, e_{x11}, e_{11z}, e_{12z}, e_{22z}, e_{21z}, e_{1y2}, e_{x22}, e_{2y2}, e_{x12}}, \ldots, \boldsymbol{e_{1yk}, e_{x2k}, e_{2yk}, e_{x1k}}\}$.

Demikian pula dengan P_2'x P_2''x P_2^k adalah graf dengan

himpunan titik {(x_1, y_1, z_k), (x_1, y_2, z_k),(x_2, y_2,z_k), (x_2,y_1,z_k), (x_1, y_1, z_{k+1}), (x_1, y_2, z_{k+1}),(x_2, y_2,z_{k+1}), (x_2,y_1,z_{k+1})}

dan

himpunan sisi$\{\boldsymbol{e_{1yk}, e_{x2k}, e_{2yk}, e_{x1k}, e_{11z}, e_{12z}, e_{22z}, e_{21z}, e_{1y(k+1)}, e_{x2(k+1)}, e_{2y(k+1)}, e_{x1(k+1)}}\}$.

Amalgamasi sisi$(P_2'$x P_2''x $P_k^1 : P_2'$x P_2''x $P_2^k; \boldsymbol{e_{x2k}, e_{2yk}, e_{x1k}, e_{1yk}})$ adalah graf dengan mengambil semua P_2'x P_2''x P_k^1 danP_2'x P_2''x P_2^k, yakni graf dengan himpunan titik {(x_1, y_1, z_1), (x_1, y_2, z_1), (x_2,y_2,z_1),), (x_2, y_1, z_1), (x_1, y_1, z_2), ($x_1$$y_2$,$z_2$), ($x_2$, y_2,z_2), (x_2,y_1,z_2), (x_1, y_1, z_3), (x_1, y_2, z_3),(x_2, y_2,z_3), (x_2,y_1,z_3), ..., (x_1, y_1, z_{k-1}), (x_1, y_2, z_{k-1}),(x_2, y_2,z_{k-1}), (x_2,y_1,z_{k-1}), (x_1, y_1, z_k), (x_1, y_2, z_k),(x_2, y_2,z_k), (x_2,y_1,z_k),), (x_1, y_1, z_{k+1}), (x_1, y_2, z_{k+1}),(x_2, y_2,z_{k+1}), (x_2,y_1,z_{k+1})} dan himpunan sisi $\{\boldsymbol{e_{1y1}, e_{x21}, e_{2y1}, e_{x11}, e_{11z}, e_{12z}, e_{22z}, e_{21z}, e_{1y2}, e_{x22}, e_{2y2}, e_{x12}}, \ldots, \boldsymbol{e_{1yk}, e_{x2k}, e_{2yk}, e_{x1k}, e_{11z}, e_{12z}, e_{22z}, e_{21z}, e_{1y(k+1)}, e_{x2(k+1)}, e_{2y(k+1)}, e_{x1(k+1)}}\}$.

Dapat diperiksa bahwa graf dengan himpunan titik dan himpunan sisi seperti ini adalah graf P_2'x P_2''x P_{k+1}^1.

Jadi P_2'x P_2''x P_n=$(P_2'$x P_2''x $P_{n-1}^1 : P_2'$x P_2''x $P_2^{n-1}; \boldsymbol{e_{x2n-1}, e_{2yn-1}, e_{x1n-1}, e_{1yn-1}})$ dengan $P_n = (P_{n-1}^1, P_2^{n-1} : z_{n-1}, z_{n-1})$. ★

3. Dekomposisi Graf Hasil Kali Tiga Lintasan

Pada bagian pendahuluan telah didefinisikan tentang subgraf. Himpunan subgraf dengan syarat tertentu akan dibahas pada subbab ini.

Definisi 1.

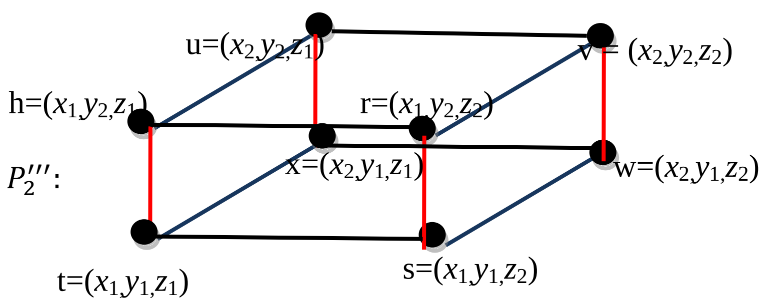
Misalkan G adalah graf dan $H_i \subseteq G$ untuk setiap i. Dekomposisi graf G adalah himpunan $\{H_1, H_2, ..., H_k\}$ sedemikian sehingga $E(G) = \cup_{i=1}^{k} E(H_i), E(H_i) \neq \emptyset, E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$ dan $V(H_i) = V(H_j)$ untuk setiap $i \neq j$. Dekomposisi graf biasanya ditulis $G = H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_k$.

Pada Definisi 1 dapat dilihat bahwa $V(H_i) = V(H_j)$ untuk setiap $i \neq j$. Ini artinya setiap subgraf $H_i$merupakan subgraf perentang dari graf G. Himpunan subgraf-subgraf perentang H_i merupakan dekomposisi graf Gjika setiap sisi pada subgraf perentang tersebut saling bebas satu dengan lainnya.

Contoh 1.

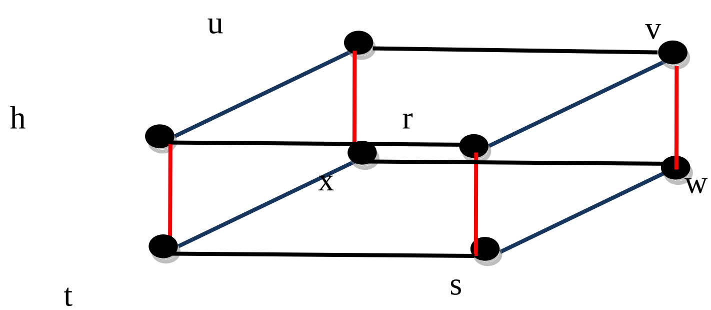
Diberikan tiga lintasan orde dua dengan himpunan titik berturut-turut $V(P_2')=\{x_1,x_2\}$, $V(P_2'') =\{y_1,y_2\}$ dan $V(P_2''')=\{z_1,z_2\}$, dan himpunan sisi berturut-turut: $E(P_2')=\{e_{11}=x_1x_2\}$, $E(P_2'') =\{e_{21}= y_1y_2\}$ dan $E(P_2''')=\{e_{31} = z_1z_2\}$. Graf hasil kali tiga lintasan $P_2' \text{x} P_2'' \text{x} P_2'''$ dapat digambar pada Gambar 7.

$G = P_2' \text{x } P_2'' \text{x } P_2'''$:



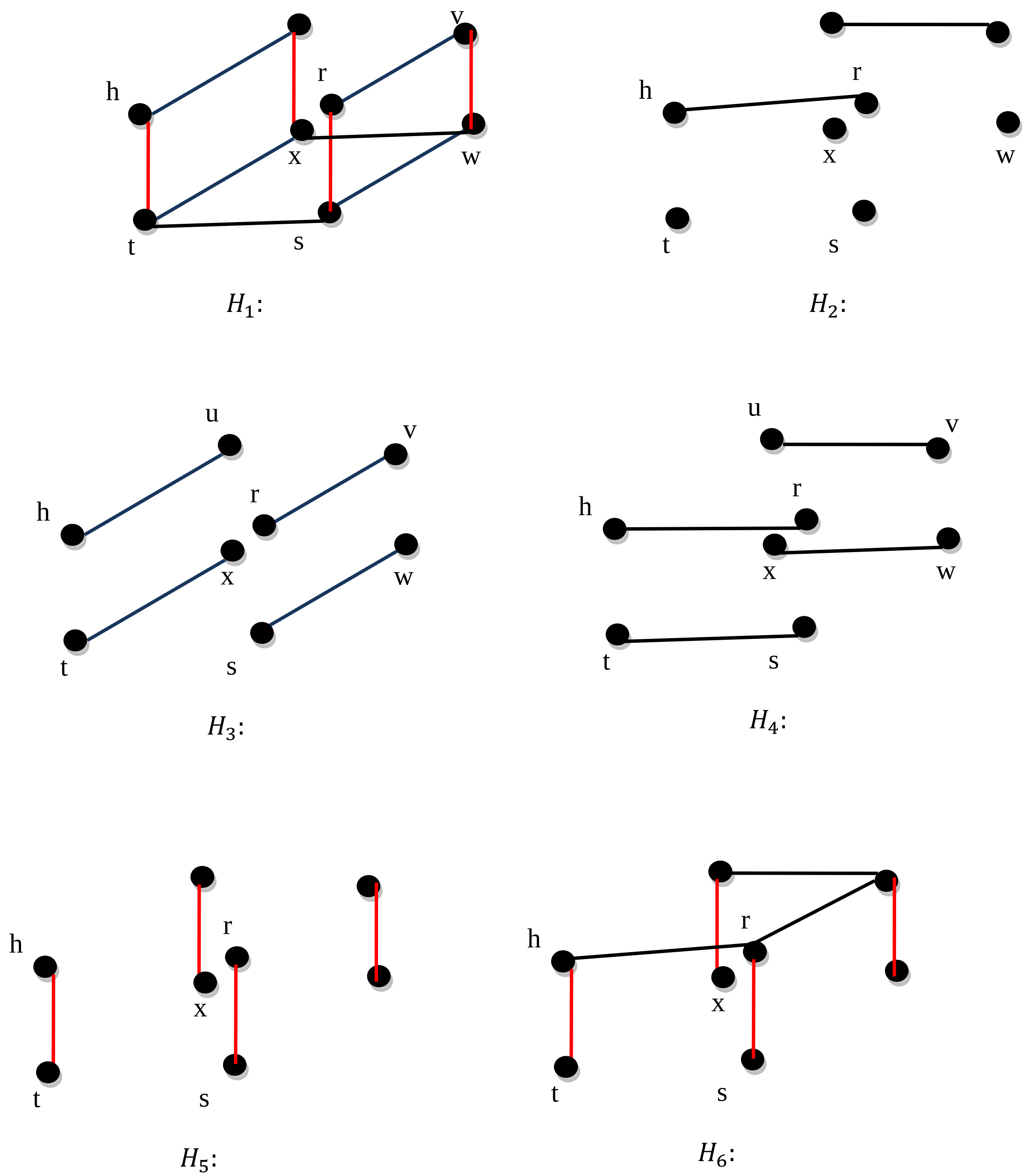
Gambar 7. Graf Hasil Kali Tiga Lintsasan Orde Dua.

Bentuk dan label titik-titik graf G pada Gambar 7 dapat ditulis seperti pada Gambar 8.



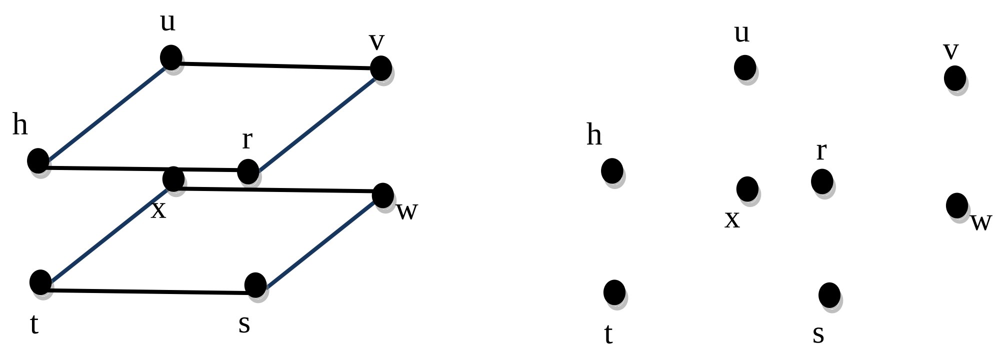
Gambar 8. Bentuk dan Label Titik-Titik Graf.

Beberapa subgraf perentang dari graf hasil kali tiga lintasan $G = P_2' \text{x} P_2'' \text{x} P_2'''$ dapat dilihat pada Gambar 9. Subgraf graf perentang tersebut adalah H_1, H_2, H_3, ..., H_6 .Subgraf perentang reguler adalah subgrafH_3, H_4,dan H_5 .



Gambar 9. Dekomposisi Graf $G = P_2'xP_2''xP_2'''$ adalah $\{H_1, H_2\}$ dan $\{H_3, H_4, H_5\}$.

Subgraf perentang lain dari graf $G = P_2'xP_2''xP_2'''$ dapat dilihat pada Gambar 10.



H_7: H_8:

Gambar 10. Sub Graf Perentang Reguler dari G.

Dekomposisi lain dari graf $G = P_2'\mathrm{x}P_2''\mathrm{x}P_2'''$ adalah {H_5, H_7}, dan {G, H_8}.

Definisi 3.1.
Misalkan himpunan {H_1, H_2, ..., H_k} adalah dekomposisi dari G. Jika subgraf H_1, H_2, ..., H_{k-1} dan H_k adalah subgraf perentang reguler maka dekomposisi {H_1, H_2, ..., H_k} disebut ***faktorisasi*** *dari graf G.*

Perhatikan Gambar 8, 9, dan Gambar 10. Pada Gambar 8, dapat dilihat bahwa graf *G* juga merupakan subgraf perentang dari *G*, yakni subgraf perentang kuasa reguler berderajat 3 atau faktor-3. Pada Gambar 9, subgraf perentang H_3, H_4,dan H_5 juga merupakan subgraf perentang reguler derajat satu.Jadi subgraf H_3, H_4,dan H_5, semuanya adalah faktor-1. Selanjutnya, pada Gambar 10, subgrafH_7 adalah faktor-2, dan subgraf H_8 adalah faktor-0. Dengan demikian, terdapat tiga faktorisasi dari graf *G* yakni dekomposisi {H_3, H_4, H_5}, {H_5, H_7}, dan {G, H_8}.

Pembahasan selanjutnya, adalah melihat apakah graf hasil kali tiga lintasan orde 2 (P_2'x P_2''x P_n) memiliki faktorisasi atau tidak.

Untuk n = 2, graf hasilkali P_2'x P_2''x P_n memiliki faktorisasi seperti yang telah diuraikan.

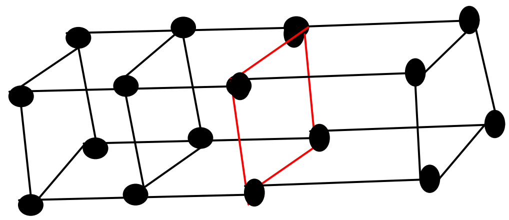
Untuk n = 3, graf hasil kali P_2'x P_2''x P_n adalahP_2'x P_2''x P_3=(P_2'x P_2''x $P_2^1: P_2'$x P_2''x $P_2^2; \boldsymbol{e_{x22}}, \boldsymbol{e_{2y2}}, \boldsymbol{e_{x12}}, \boldsymbol{e_{1y2}}$**)** dengan $P_3 = (P_2^1, P_2^2 : z_2, z_2)$. Bentuk graf P_2'x P_2''x P_3 dapat dilihat pada Gambar 11. Dapat diperiksa bahwa graf hasil kali P_2'x P_2''x P_3 memiliki dekomposisibanyak subgraf perentang sehingga juga memiliki banyak dekomposisi. Namun tidak ada dekomposisi yang merupakan faktorisasi. (4)

Teorema 2.
Graf hasil kali P_2'x P_2''x P_n tidak memiliki faktorisasi untuk $n \geq 3$.

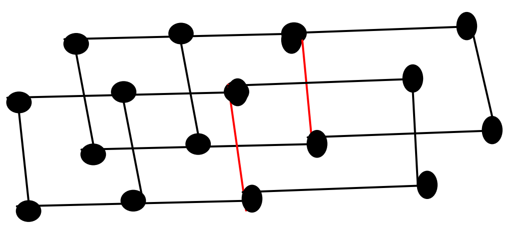
Bukti. Pembuktian dilakukan dengan induksi matematika dengan memulai pada induksi n = 3.

(a) Untuk n = 3, graf hasil kali P_2'x P_2''x P_n tidak memiliki faktorisasi. Dari (4)

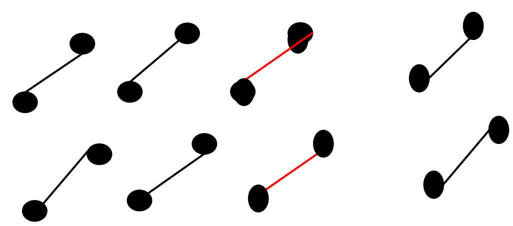
(b) Untuk n = 4, graf hasil kali P_2'x P_2''x P_n adalah seperti berikut:



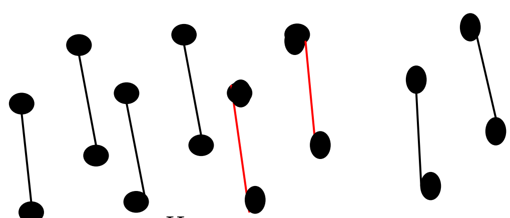
Subgraf perentang dari graf hasil kali P_2'x P_2''x P_4 adalah sebagai berikut



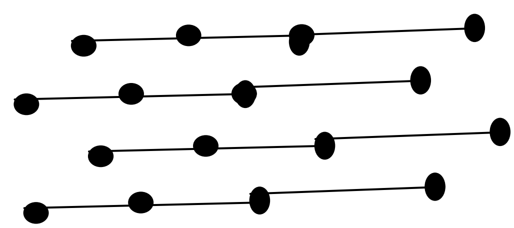
H_1:



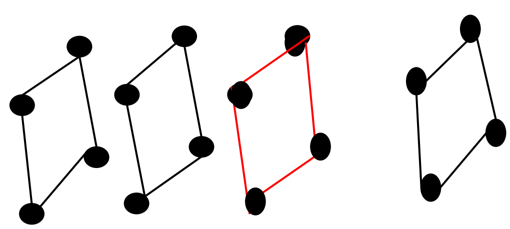
H_2:



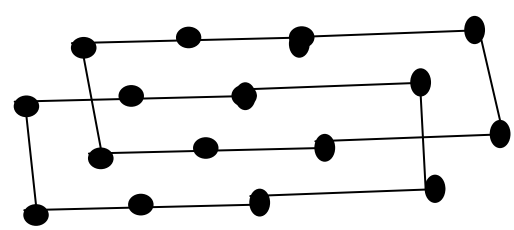
H_3:



H_4:



H_5:



H_6:

Dekomposisi dari graf hasil kaliP_2'x P_2''x P_4 adalah $\{H_1,H_2\}$, $\{H_2,H_3,H_4\}$, dan $\{H_4,H_5\}$. Dapat diperiksa bahwa ke tiga dekomposisi tersebut tidak ada yang merupakan faktorisasi. Selanjutnya, dari Teorema.1 diketahui bahwa P_2'x P_2''x P_4 merupakan amalgamasi sisi P_2'x P_2''x P_3^1 terhadap P_2'x P_2''x P_2^3 dengan $P_4 = (P_3^1, P_2^3 : z_3, z_3)$. Juga telah diketahui bahwa P_2'x P_2''x P_3^1tidak memiliki faktorisasi sedangkan P_2'x P_2''x P_2^3 memiliki faktorisasi. Berarti graf yang tidak memiliki faktorisasi adalah graf yang merupakan amalgamasi sisi dari graf yang tidak memiliki faktorisasi terhadap graf yang memiliki faktorisasi.

(c) Asumsikan P_2'x P_2''x P_r^1= P_2'x P_2''x P_r tidak memiliki faktorisasi untuk setiap $3 \leq r \leq k$. Akan ditunjukkan bahwa P_2'x P_2''x P_{k+1} juga tidak memiliki faktorisasi. Dari Teorema 1 diketahui bahwa P_2'x P_2''x P_{k+1} merupakan amalgamasi sisi P_2'x P_2''x P_k^1 terhadap P_2'x P_2''x P_2^kdengan $P_{k+1} = \left(P_k^1, P_2^k : z_k, z_k\right)$. Menurut asumsi P_2'x P_2''x P_k^1tidak memiliki faktorisasi, sedangkan P_2'x P_2''x P_2^k memiliki faktorisasi. Berdasarkan (2), graf hasil kali P_2'x P_2''x P_{k+1} tidak memiliki faktorisasi.

(d) Berdasarkan (a), (b), dan (c), graf hasil kali P_2'x P_2''x P_n = P_2xP_2x P_n tidak memiliki faktorisasi untuk setiap n, $n \geq 3$. ★

4. Kesimpulan

Beberapa hal yang dapat disimpulkan dalam tulisan ini antaralain:

a. Amalgamasi titik ujung dua lintasan juga merupakan lintasan,
b. Amalgamasi sisi dua graf hasil kali dari tiga lintasan juga merupakan graf hasil kali tiga lintasan.
c. Graf hasil kali tiga lintasan orde dua memiliki faktorisasi.

Graf hasil kali dua lintasan orde dua terhadap lintasan orde lebih dari dua memiliki dekomposisi tetapi tidak memiliki faktorisasi.

Daftar Pustaka

[1] Bariroh A., 2010.*Faktorisasi Graf Beraturan dengan Orde Genap.*UIN Malang.

[2] Chartrand G. dan Zhang P., 2005.*Introduction to Graph Theory*. Mc Graw Hill International Edition.

[3] Hasmawati, 2007.Bilangan Ramsey untuk Graf yang Memuat Bintang. *Disertasi*. Departemen Matematika ITB, Bandung.