

Bagan Kendali Rasio Likelihood dan Aplikasinya pada Data Kurs Mata Uang dan Industri

Andi Fitri Ayu¹, Erna Tri Herdiani¹, M. Saleh AF¹, Anisa¹, Nasrah Sirajang¹

Abstrak

Pengendalian kualitas dispersi *multivariate* dapat dilakukan melalui statistik W_i . Statistik W_i diturunkan melalui metode log rasio likelihood, dimana statistik W_i dibentuk berdasarkan matriks variansi kovariansi. Dengan adanya hubungan antara matriks variansi kovariansi dan korelasi maka dapat dibentuklah statistik W_R . Dalam pengkajian statistik W_i dan W_R memiliki distribusi asimptotik yang sama, yaitu $\chi_{\frac{p(p+1)}{2}}^2$. Ketika statistik ini digunakan pada data real kurs mata uang dan industry, ternyata kedua statistik sangat cocok untuk data yang memiliki nilai variansi kovariansi yang kecil dibandingkan yang besar.

Kata Kunci: Dispersi, matriks variansi kovariansi, matriks korelasi, Log Rasio Likelihood, distribusi Chi-Square.

Abstract

Dispersion Multivariate quality control can be performed through W_i and W_R statistical. W_i Statistics derived through the log likelihood ratio method, W_i statistics formed by variance covariance matrix. With the relationship between the variance covariance and correlation matrices that can be statistically established W_R . In statistical assessment W_i and W_R have the same asymptotic distribution, which is $\chi_{\frac{p(p+1)}{2}}^2$. When these statistics are used it turns out that both of statistics very suitable for data that has smaller variance covariance value than the large one.

Keywords: Dispersion, the variance covariance matrix, correlation matrix, the Log Likelihood Ratio, Chi-Square distribution.

1. Pendahuluan

Pengendalian proses statistik atau *Statistical Processing Control* (SPC) merupakan sebuah teknik statistik yang digunakan secara luas untuk memastikan bahwa proses memenuhi standar. Dengan kata lain, selain SPC merupakan sebuah proses yang digunakan untuk mengawasi standar, membuat pengukuran dan mengambil tindakan perbaikan selagi sebuah produk atau jasa sedang diproduksi [4]. Salah satu alat SPC yang sering digunakan adalah Bagan Kendali. Bagan kendali yang akan dikaji dalam paper ini adalah bagan kendali variabilitas untuk kasus data multivariable. Adapun bagan kendali yang akan diamati adalah bagan kendali W_i dan W_R . Pada paper ini akan diselidiki kondisi yang terbaik untuk menggunakan kedua statistik tersebut, selanjutnya sebagai aplikasi akan diolah data kurs mata uang rupiah dan industry.

¹Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin, email: andifitriayu@yahoo.co.id, herdiani.erna@gmail.com, afsaleh54@yahoo.co.id, nkalondeng@gmail.com

2. Metode Penelitian

Pada bagian ini ada beberapa hal penting yang harus diketahui dalam pembentukan bagan kendali, dalam hal ini adalah bagan kendali W_i .

Bagan Kendali W_i

Dengan mengasumsikan bahwa matriks variansi kovariansi sebenarnya, Σ , tidak diketahui (atau diestimasi dari sampel *in control* yang besar), perbandingan dibuat antara matriks variansi kovariansi sampel dari proses dan matriks variansi kovariansi yang tidak diketahui. Perbandingan tersebut adalah serangkaian uji signifikansi dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H_0: \Sigma &= \Sigma_0 \\ H_1: \Sigma &\neq \Sigma_0 \end{aligned}$$

dimana Σ dan Σ_0 adalah matriks variansi kovariansi populasi dan matriks variansi kovariansi *in control*. Statistik tersebut adalah rasio dari estimator maksimum likelihood untuk distribusi $N_p(\mu, \Sigma)$ dalam bentuk sebagai berikut:

$$\Omega = \{(\mu, \Sigma): -\infty < \mu < \infty\}, \Sigma \text{ adalah definit positif}$$

$$\omega = \{(\mu, \Sigma): -\infty < \mu < \infty, \Sigma = \Sigma_0\}$$

Hal ini telah dijelaskan oleh Anderson [1] bahwa estimator maksimum likelihood untuk kasus *multivariate* normal adalah sebagai berikut:

$$\hat{\mu}_\Omega = \bar{x} \hat{\Sigma}_\Omega = \frac{1}{n} A_i \quad (1)$$

$$\hat{\mu}_\omega = \bar{x} \hat{\Sigma}_\omega = \Sigma_0 \quad (2)$$

dimana \bar{x} adalah vektor *mean*, n adalah ukuran sampel, dan $A_i = (n-1)S_i$ sehingga fungsi likelihood berdasar pada distribusi normal *multivariate* adalah

$$L(\hat{\Omega}) = \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{-pn/2} |A_i|^{-n/2} e^{-pn/2}, \quad (3)$$

$$L(\hat{\omega}) = (2\pi)^{-pn/2} |\Sigma_0|^{-n/2} e^{-\frac{1}{2}tr(\Sigma_0^{-1}A_i)}, \quad (4)$$

Rasio likelihoodnya adalah sebagai berikut:

$$\Lambda(x) = \left(\frac{1}{n}\right)^{pn/2} e^{pn/2} |\Sigma_0^{-1}A_i|^{n/2} e^{-\frac{1}{2}tr(\Sigma_0^{-1}A_i)}, \quad (5)$$

Log rasio likelihoodnya adalah sebagai berikut:

$$W_i = -2 \ln(\Lambda)$$

$$= -pn + pn \ln n - n \ln \left(\frac{|A_i|}{|\Sigma_0|} \right) + \text{tr}(\Sigma_0^{-1} A_i), \quad (6)$$

Jika dilihat pada persamaan dari statistik W_i , maka rasio $\frac{|A_i|}{|\Sigma_0|}$ ekuivalen dengan $\frac{|(n-1)S|}{|\Sigma_0|}$, atau $(n-1)^p \frac{|S|}{|\Sigma_0|}$. Sehingga

$$W_i = -pn + pn \ln n - n \ln \left((n-1)^p \frac{|S|}{|\Sigma_0|} \right) + (n-1)^p \text{tr}(\Sigma_0^{-1} S) \quad (7)$$

Statistik uji tersebut dihitung dan digambarkan untuk setiap sampel ke- i , dimana $i = 1, 2, \dots, n$, yang akan ditolak jika nilainya lebih dari $\chi_{(\alpha, p(p+1)/2)}^2$. Jika plot nilai W_i lebih dari UCL $\chi_{(\alpha, p(p+1)/2)}^2$, maka proses dapat dikatakan tidak terkendali.

$$\begin{cases} UCL = \chi_{\left(\frac{p(p+1)}{2}, \alpha\right)}^2 \\ LCL = 0 \end{cases} \quad (8)$$

3. Hasil dan Pembahasan

Hasil dan pembahasan dimulai dari kajian tentang bagan kendali W_R , keterkaitan dari R dan S serta pengolahan data nilai yang memiliki nilai variansi besar dan kecil.

Bagan Kendali W_R

Korelasi adalah kasus khusus dari kovariansi, sehingga matriks yang digunakan dalam SPC untuk memonitor kovariansi akan diaplikasikan untuk memonitor korelasi. Dengan begitu batas kendali untuk kasus berkorelasi secara umum akan sama dengan statistik untuk kovariansi. Untuk pendekatan statistik W_R ini dari sudut pandang hubungan akan dilakukan uji hipotesis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H_0: \rho &= \rho_0 \\ H_1: \rho &\neq \rho_0 \end{aligned}$$

dimana ρ dan ρ_0 adalah matriks korelasi populasi dan matriks korelasi *in control*. Dapat dihitung salah satu rasio maksimum likelihood yang baru untuk Ω dan ω yang didefinisikan dalam hal korelasi.

Syarat ketiga dan keempat dari statistik W_i merupakan rasio $\frac{|A_i|}{|\Sigma_0|}$. Untuk mengubah rasio ini dalam matriks korelasi *in control* dengan rasio determinan matriks korelasi sampel, $\frac{|R|}{|\rho_0|}$, maka dibutuhkan asumsi bahwa faktor skala untuk kedua kasus adalah ekuivalen.

Log rasio likelihoodnya adalah sebagai berikut:

$$W_R = -pn + pn \ln n - n \ln \left((n-1)^p \frac{|R|}{|\rho_0|} \right) + (n-1) \text{tr}(\rho_0^{-1} R) \quad (9)$$

Bagan kendali dapat dibangun untuk matriks korelasi W_R , berdasarkan pada bagan kendali matriks variansi kovariansi W_i .

Distribusi statistik W_R akan ekuivalen dengan distribusi statistik W_i , karena statistik W_R ekuivalen dengan statistik W_i . Oleh karena itu, distribusi statistik W_i akan ditunjukkan sebagai berikut:

$$W_i = -2 \ln(\Lambda)$$

dimana

$$\Lambda(x) = \left(\frac{1}{n} \right)^{pn/2} e^{pn/2} |\Sigma_0^{-1} A_i|^{n/2} e^{-\frac{1}{2} \text{tr}(\Sigma_0^{-1} A_i)} \sim \chi_{1/2p(p+1)}^2 \quad (10)$$

Statistik W_R telah dijelaskan bahwa memiliki distribusi asimptotik $\chi_{\frac{1}{2}p(p+1)}^2$. Dengan demikian bagan kendali dari W_R adalah sebagai berikut:

$$UCL = \chi_{\alpha/2}^2; \frac{p(p+1)}{2} \quad (11)$$

$$LCL = \chi_{1-\alpha/2}^2; \frac{p(p+1)}{2} \quad (12)$$

W_R dikatakan *out-of-control* apabila $W_R > \chi_{\alpha/2}^2; \frac{p(p+1)}{2}$.

Keterkaitan Antara S dan R

Misalkan X_1, X_2, \dots, X_n dan Y_1, Y_2, \dots, Y_n merupakan vektor acak dari p -variate dengan n sebagai ukuran sampel. Nilai kovariansi dari variabel X dan Y adalah

$$s_{ik} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i) (Y_{kj} - \bar{Y}_k), \quad (13)$$

Koefisien korelasi sampel, r_{ik} , didefinisikan sebagai:

$$r_{ik} = \frac{s_{ik}}{\sqrt{s_{ii} s_{kk}}} \quad (14)$$

dimana $i = 1, 2, \dots, p$ dan $k = 1, 2, \dots, p$.

Hubungan antara \mathbf{S} dan \mathbf{R} ini, dimisalkan $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ vektor acak yang berdistribusi $\mathbf{X}_i \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, untuk setiap i , dimana $\mathbf{S}_{p \times p}$ serta $\mathbf{R}_{p \times p}$ merupakan matriks variansi kovariansi dan matriks korelasi yang dihitung pada sampel. Maka, jika kita mempunyai notasi, $D_{\mathbf{S}}^{\alpha} = \text{diag}(s_{11}^{\alpha}, \dots, s_{pp}^{\alpha})$, dimana \mathbf{X} adalah sebuah matriks berukuran $p \times 1$, maka matriks korelasi sampelnya dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{R} = D_{\mathbf{S}}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{S} D_{\mathbf{S}}^{-\frac{1}{2}} \quad (15)$$

dengan matriks korelasi untuk populasinya diberikan dengan

$$\boldsymbol{\rho} = D_{\boldsymbol{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\Sigma} D_{\boldsymbol{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}} \quad (16)$$

Perhatikan bahwa jika didefinisikan $Y_i = D_{\boldsymbol{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{X}_i$, kemudian $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots, \mathbf{Y}_n$ adalah vektor acak yang berdistribusi $Y_i \sim N_p\left(D_{\boldsymbol{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\rho}\right)$. Jika \mathbf{S}_* adalah matriks variansi kovariansi sampel yang dihitung dari \mathbf{Y}_i , maka

$$\mathbf{S}_* = D_{\mathbf{S}}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{S} D_{\mathbf{S}}^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{R} \quad (17)$$

dimana

$D_{\mathbf{S}}$: matriks diagonal dari matriks variansi kovariansi sampel \mathbf{S} .

$D_{\mathbf{S}}^{-\frac{1}{2}}$: matriks diagonal dari standar deviasi matriks variansi kovariansi sampel \mathbf{S} .

\mathbf{S} : matriks variansi kovariansi.

\mathbf{R} : matriks korelasi

Analisa Data

Pengolahan data akan menggunakan statistik W_R pada data nilai tukar rupiah terhadap *dollar* Amerika, *yuan renmimbi* Cina, *ringgit* Malaysia dan data Piston Ring. Analisis data ini dibagi menjadi tiga kasus, yaitu:

Kasus I untuk nilai variansi kovariansi yang besar (data nilai tukar rupiah) dengan $p = 3$,

Kasus II untuk nilai variansi kovariansi yang besar dengan $p = 2$, dan

Kasus III untuk nilai variansi kovariansi yang kecil (data piston ring) dengan $p = 2$.

Adapun sebagai variabel untuk kasus I dan kasus II adalah sebagai berikut:

X_1 : Mata uang *dollar* Amerika,

X_2 : Mata uang *yuan renmimbi* Cina, dan

X_3 : Mata uang *ringgit* Malaysia

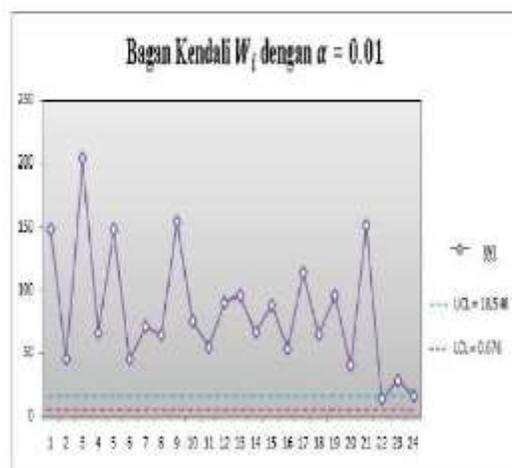
Untuk kasus III digunakan data Piston Ring.

Adapun bagan kendali dari statistik W_I dan W_R untuk kasus I, II dan III adalah sebagai berikut :

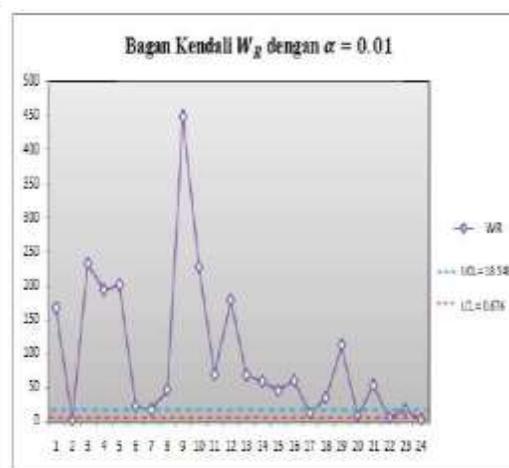
Untuk kasus I, dengan $p=3$, maka nilai W_I dan W_R adalah sebagai berikut:

No.	W_I	W_R	No.	W_I	W_R
1	149.304	168.154	13	96.619	69.08
2	45.566	3.327	14	67.377	59.835
3	203.449	234.006	15	88.988	46.28
4	66.745	194.909	16	53.906	60.842
5	149.306	202.398	17	114.985	13.087
6	45.57	23.078	18	65.358	35.772
7	71.849	18.409	19	96.586	113.819
8	64.802	47.637	20	40.839	8.525
9	155.523	450.415	21	152.447	54.249
10	75.967	228.454	22	13.866	6.194
11	55.202	70.211	23	28.385	18.358
12	90.797	179.988	24	16.175	4.098

Adapun bagan kendali kedua statistik tersebut adalah sebagai berikut.



Gambar 1a. Bagan Kendali dari Statistik W_I untuk Kasus I, $p = 3$ dengan $\alpha = 0.01$.



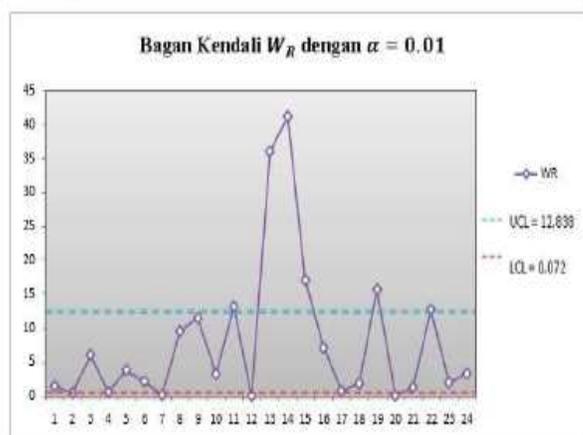
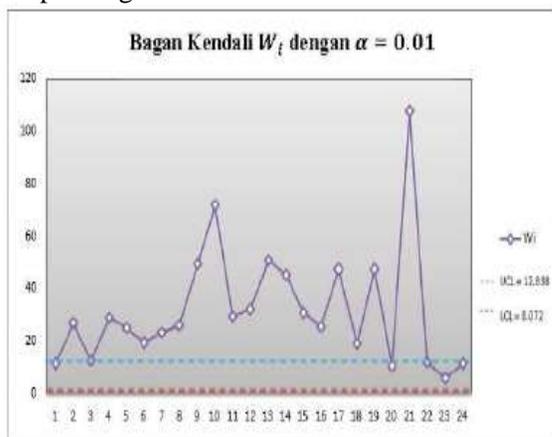
Gambar 1b. Bagan Kendali dari Statistik W_R untuk Kasus I, $p = 3$ dengan $\alpha = 0.01$.

Pada data nilai tukar mata uang rupiah, hasilnya menunjukkan bahwa dalam bagan kendali W_I hanya data ke-22 dan 24 yang berada di dalam batas kendali. Sedangkan pada bagan kendali W_R sebagian besar data berada di luar batas kendali dan data yang ke-2, 7, 17, 20, 22, 23, 24 yang berada dalam batas kendali dari batas yang berasal dari statistik W_R , lihat Gambar 1a dan 1b di atas.

Begitu pula halnya untuk kasus II, dengan $p=2$ yaitu X_1 dan X_3 , maka nilai W_I dan W_R adalah sebagai berikut :

No.	W_I	W_R	No.	W_I	W_R
1	11.431	1.469	13	50.930	36.086
2	27.175	0.489	14	45.246	41.222
3	12.695	6.106	15	30.657	17.082
4	29.145	0.608	16	25.807	7.123
5	25.381	3.870	17	47.486	0.737
6	19.399	2.194	18	19.323	1.876
7	23.344	0.189	19	47.573	15.707
8	26.356	9.567	20	10.516	0.053
9	49.585	11.511	21	107.942	1.330
10	71.815	3.276	22	12.250	12.746
11	29.557	13.216	23	5.835	1.993
12	31.994	0.070	24	11.440	3.323

Adapun bagan kendali kedua statistik tersebut adalah sebagai berikut.



Sedangkan untuk kasus II, hampir sama dengan kasus I sebagian besar data yang berada di luar batas kendali. Pada bagan kendali W_I , terdapat enam data yang berada dalam bagan kendali yaitu data ke-

1, 3, 20, 22, 23 dan 24. Pada batas kendali W_R sebagian besar berada dalam bagan kendali kecuali ada sebelas data berada di luar yaitu data ke-2, 4, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 19, 20 dan 22, lihat Gambar 2a dan 2b. Kedua kasus ini berasal dari satu sumber data yaitu nilai tukar mata uang rupiah dimana nilai variansi kovariansi memiliki nilai yang besar.

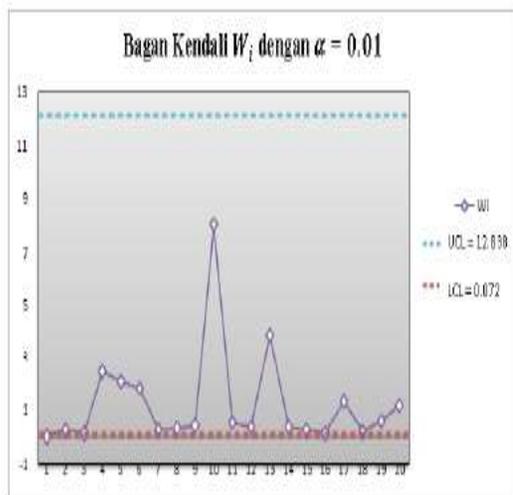
Gambar 2a. Bagan Kendali dari Statistik W_I untuk Kasus II, $p = 2$ dengan $\alpha = 0.01$.

Gambar 2b. Bagan Kendali dari Statistik W_R untuk Kasus II, $p = 2$ dengan $\alpha = 0.01$.

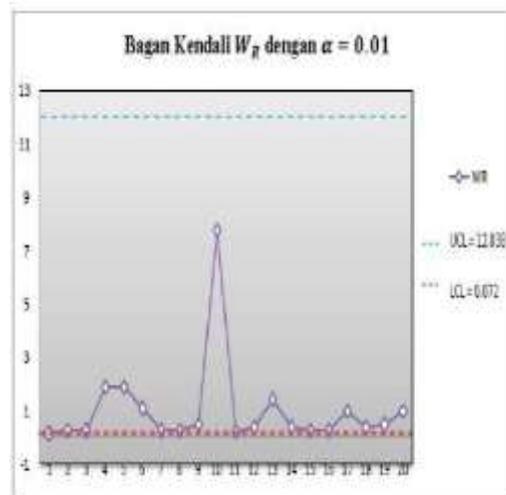
Untuk kasus III, dengan $p=2$, maka nilai W_I dan W_R adalah sebagai berikut.

No.	W_i	W_R	No.	W_i	W_R
1	0.01	0.14	11	0.52	0.22
2	0.22	0.28	12	0.35	0.37
3	0.12	0.26	13	3.89	1.46
4	2.41	1.90	14	0.32	0.37
5	2.05	1.90	15	0.25	0.28
6	1.77	1.09	16	0.24	0.28
7	0.22	0.26	17	1.28	0.99
8	0.27	0.29	18	0.17	0.37
9	0.36	0.52	19	0.54	0.48
10	8.03	7.77	20	1.14	1.00

Adapun bagan kendali kedua statistik tersebut adalah sebagai berikut.



Gambar 3a. Bagan kendali dari statistik W_i untuk kasus III, $p = 2$ dengan $\alpha = 0.01$.



Gambar 3b. Bagan kendali dari statistik W_R untuk kasus III, $p = 2$ dengan $\alpha = 0.01$.

Adapun untuk kasus III, data yang berada di luar batas kendali hanya satu yaitu data ke-1 dan sebagian besar berada di dalam batas kendali. Kasus ini memiliki perbedaan dengan kasus I dan II, karena untuk kasus ini digunakan nilai dari variansi kovariansi yang cukup kecil dibandingkan sebelumnya, sehingga hasil bagan kendali yang dihasilkan cukup berbeda, sebagaimana yang terlihat pada Gambar 3a dan 3b.

4. Kesimpulan

Kesimpulan yang diperoleh dari penelitian ini adalah bahwa statistik W_i dapat diturunkan melalui metode log rasio likelihood. Distribusi dari W_i adalah *chi-square* dengan derajat kebebasan $\frac{p(p+1)}{2}$. Karena terdapat keterkaitan antara \mathbf{S} dan \mathbf{R} sesuai sifat-sifat yang dibahas oleh Anderson dalam [1] maka W_i dapat digunakan untuk matriks korelasi. Statistik ini selanjutnya disebut statistik W_R dengan distribusi sama dengan W_i . Berdasarkan hasil aplikasi pada data, statistik W_i dan W_R ternyata lebih baik digunakan pada data yang memiliki nilai variansi

kovariansi yang kecil dibandingkan dengan yang besar. Pada data nilai tukar rupiah terhadap *dollar* Amerika, *yuan renmimbi* Cina dan *ringgit* Malaysia yang memiliki nilai variansi kovariansi yang besar dengan $p = 3$ ataupun $p=2$ kurang baik menggunakan statistik statistik W_i dan W_R .

Ucapan Terima Kasih

Penelitian yang terkait dengan tulisan ini dibiayai oleh Universitas Hasanuddin berdasarkan surat perjanjian pelaksanaan riset nomor : 2060/UN4.20/PL.09/2013 tanggal 4 Juni 2013.

Daftar Pustaka

- [1] Anderson T.W., 2003. *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis, 3th edition*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [2] Barbosa E.P., Gneri M.A., dan Meneguetti A., 2009. $|S|$ Control Chart for Multivariate Process Variability Monitoring Based on Cornish-Fisher Correction and Meijer-G Function. *Depto Estatística, IMECC-UNICAMP, Campinas, SP, Brazil*.
- [3] Hogg R.V. dan Craig A.T., 2004. *Introduction to Mathematical Statistics, 5th Edition*. Higher Education Press.
- [4] Ilham M.N., 2012. Analisis Pengendalian Kualitas Produk dengan Menggunakan Statistical Processing Control (SPC) pada PT. Bosowa Media Grafika (Tribun Timur). *Skripsi*. Universitas Hasanuddin, Makassar.
- [5] Johnson R. dan Wichern D., 2007. *Applied Multivariate Statistical Analysis, 6th Edition*. Prentice-Hall.
- [6] Montgomery D. C., 2009. *Introduction to Statistical Quality Control, 6th Edition*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [7] Muirhead R.J., 2005. *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. John Wiley & Sons Inc. Publication, Hoboken New Jersey.
- [8] Rakhmawati D.Y. dan Mashuri M., 2011. Perbandingan Kinerja Diagram Kontrol Multivariat untuk Variabilitas Berdasarkan Matriks Kovariansi dan Matriks Korelasi. *Prosiding Seminar Nasional Statistika*. Universitas Diponegoro, Semarang.
- [9] Schott J. R., 1997. *Matrix Analysis for Statistics*. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [10] Seber G.A.F. dan Lee A. J., 2003. *Linear Regression Analysis, 2th Edition*. John Wiley & Sons, inc., Publication, Hoboken, New Jersey.
- [11] Sindelar M.F., 2007. Multivariate Statistical Process Control for Correlation Matrices. *Tesis Ph.D*. University of Pittsburgh, Pittsburgh.