ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 10, No. 1, 66-74, Juli 2013

Kestabilan Parsial Untuk Sistem Linear Melalui Konsep Sistem Auxiliary

Firman[†]

Abstrak

Tulisan ini membahas kestabilan parsial untuk sistem linear dengan koefisien konstan. Berkenaan dengan itu akan dikonstruksi suatu sistem auxiliary dari persamaan diferensial. Dari sistem auxliliary akan dianalisis kestabilan dari sistem yang berkenaan dengan bagian variabel.

Keywords: Kestabilan, kestabilan parsial, sistem auxiliary.

1. Pendahuluan

Pandang *unperturbed motion*

$$\dot{x} = f(t,x), \qquad f(t,0) = 0,$$
$$x^T = (y_1,\ldots,y_m, z_1,\ldots,z_p) = (y^T, z^T),$$
$$m > 0, \qquad p \geq 0, \qquad n = m + p$$

Stabilitas pada titik kesetimbangan $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ dari *perturbed motion system* dalam kaitannya dengan semua variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ telah banyak dibahas dalam literatur yakni mengenai teori kestabilan Lyapunov.

Namun demikian suatu masalah yang lebih umum dapat dipandang sebagai masalah kestabilan dari gerakan yang sama, akan tetapi bukan dalam kaitannya dengan semua kuantitas yang menentukan masalah gerakan tersebut. Hal ini berarti masalah kestabilan pada titik keseimbangan $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ relatif hanya terhadap sebagian dari variabel-variabel $x_1, x_2, \ldots, x_m$ $(m < n)$. Nilai dari variabel-variabel $x_i(t), \quad (i = 1,\ldots,n)$ dan bukan dari nilai semua variabel $x_i(t,(1,\ldots,n)$ yang harus tetap kecil, apabila nilai-nilai awal dari $x_i(t), \quad (i = 1,\ldots,n)$ dipilih cukup kecil.

Masalah kestabilan dalam kaitannya dengan bagian dari variabel-variabel sering disebut dengan istilah masalah stabilitas parsial.

2. Rumusan Masalah

Pandang sistem persamaan diferensial linear *pertubed motion* dengan koefisien konstan berikut :

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} A_{ij} x_j \qquad (i = 1,\ldots,n)$$
$$x^T = (x_1,\ldots,x_n) = (y_1,\ldots,y_m, z_1,\ldots,z_p) = (y^T, z^T),$$

[†] *Staf Pengajar pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar*

$$m > 0, \qquad p \geq 0, \qquad n = m + p$$

Sistem tersebut punya bentuk dalam variabel *y*, *z* sebagai berikut:

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k + \sum_{l=1}^{p} b_{il} z_l \, (i = 1,\ldots,m),$$

$$\frac{dz_j}{dt} = \sum_{k=1}^{m} c_{jk} y_k + \sum_{l=1}^{p} d_{jl} z_l \, (j = 1,\ldots,p)$$

(1)

dengan $a_{ik}, b_{il}, c_{jk}, d_{jl}$ adalah konstanta-konstanta. Akan dibahas masalah kestabilan (stabil asimtotik) dari sistem *unperturbed motion* (1) $y_i = 0, z_j = 0 (i = 1,\ldots,m; j = 1,\ldots,p)$ berkenaan dengan $y_i,\ldots,y_m$. Berkenaan dengan itu akan dikonstuksi suatu sistem auxiliary dari persamaan diferensial. Dari sistem auxiliary akan dianalisis kestabilan Lyapunovnya untuk sampai pada kesimpulan tentang kestabilan dari sistem (1) berkenaan dengan bagian variabel.

3. Sistem Persamaan Auxiliary

Pandang vektor $b_i = (b_{i1},\ldots,b_{ip})^T \ (i = 1,\ldots,m)$, dengan b_i seperti pada sistem (1). Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $b_1,\ldots,b_{m_1} (m_1 \leq m)$ adalah vektor-vektor bebas linear, maka vektor-vektor $b_{m_1+1},\ldots,b_m$ diekspresikan linear dalam bentuk sistem (1). Untuk membentuk sistem persamaan auxiliary, dimisalkan variabel baru sebagai berikut:

$$\mu_i = \sum_{i=1}^{p} b_{il} z_i \quad (i = 1,2,\ldots,m_1)$$

(2)

dengan koefisien $b_{il} (i = 1,\ldots,m_1; l = 1,\ldots,p)$ merupakan Himpunan bebas linear dari kolom $b_1,\ldots,b_{m1}$. Dengan variabel baru tersebut diperoleh sistem auxiliary dari sistem (1)

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} y_k + \sum_{l=1}^{m_1} a_{il} \mu_l \, (i = 1,\ldots,m)$$

$$\frac{d\mu_j}{dt} = \sum_{k=1}^{m} a^*_{jk} y_k + \sum_{l=1}^{m_1} a^*_{jl} \mu_l \, (j = 1,\ldots,m_1)$$

Tipe sistem persamaan tersebut dinamai μ-sistem auxiliary terhadap sistem (1).

Lemma 1. *Suatu* μ*-sistem auxiliary untuk sistem* (1) *selalu dapat dikonstruksi dengan pengenalan himpunan variabel baru* $R \leq p$. *Dimensi dari* μ*-sistem tidak akan melebihi dari sistem asli* (*sistem* (1)).

Bukti. Misalkan $b_1,\ldots,b_p$ adalah vektor-vektor bebas linear.

Definisikan: $\mu_j = \sum_{l=1}^{p} b_{jl}^{v} z_l \ (j=1,...,p); \quad b_{jl}^{v} = b_{jl}(j=1,...,m_1)$. Misalkan $\mu_{p+r} = \sum_{l=1}^{p} b_{p+r}^{v} z_l$ (r =1,2,...,). Claim : μ_{p+r} adalah kombinasi linear dari $\mu_1,...,\mu_p$.

Bukti Claim. Misal $B^v = (b_{il}^v) \ (i,l=1,...,p)$. Perhatikan det $B^v \neq 0$.

Juga

$$\begin{array}{l} b_{11}^{v}\lambda_{1r} + ... + b_{p1}^{v}\lambda_{pr} = b_{p+r,1}^{v},... \\ b_{1p}^{v}\lambda_{1r} + ... + b_{pp}^{v}\lambda_{pr} = b_{p+r,p}^{v},... \end{array} \quad \forall r = 1,2,...$$

Dari

$$\begin{aligned} \mu_{p+r} &= \sum_{l=1}^{p} b_{p+r,l}^{v} z_l = b_{p+l,p}^{v} z_1 + ... + b_{p+r,p}^{v} z_p) \\ &= (b_{11}^{v}\lambda_{1r} + ... + b_{p1}^{v}\lambda_{pr}) z_1 + ... + (b_{1p}^{v}\lambda_{1r} + ... + b_{pp}^{v}\lambda_{pr}) z_p \\ &= \lambda_{1r}(b_{11}^{v} z_1 + ... + (b_{1p}^{v}\lambda_p)) + ... + \lambda_{pr}(b_{p1}^{v} z_1 + ... + (b_{pp}^{v}\lambda_p)) \\ &= \lambda_{1r}\mu_1 + ... + \lambda_{pr}\mu_p \end{aligned}$$

Jadi μ_{p+r} adalah kombinasi linear dari $\mu_1,...,\mu_p$. Dengan demikian dimensi maksimum dari μ-sistem adalah $n = m + p$.

Dimensi dari Suatu Sistem Auxiliary

Sistem (1) yang dinyatakan dalam bentuk vektor

$$\dot{y} = Ay + Bz, \qquad \dot{Z} = Cy + Dz \qquad (\dot{x} = A^* x) \tag{3}$$

dengan A^*, A, B, C, D adalah matriks konstan.

Masalahnya adalah mencari syarat untuk menentukan dimensi sistem auxiliary. Misalkan variabel baru $\mu_i, 1 \leq i \leq p,$ yang diperlukan untuk membentuk μ-sistem, adalah dipilih dari variabel $\mu = BZ$ dan juga dari variabel

$$\mu^{(1)} = B\dot{Z} = BDZ, \mu^{(2)} = BZ^{(2)} = BD^{(2)}Z,..., \mu^{(k)} = BZ^{(k)} = BD^{k}Z(1 \leq k \leq p-1)$$

dimana $\mu^{(k)}$ adalah diferensial μ kali.

Lemma 2. *Misalkan* $K_p = (B^T, D^T B^T, ..., (D^T)^{p-1} B^T)$. *Misalkan* μ*-sistem auxiliary dari sistem original (1), maka* μ*-sistem berdimensi* $m+h$ *jika dan hanya bisa jika rank* $K_p = h$.

Bukti. (i)$\Rightarrow$

Misalkan dimensi dari μ-sistem adalah $m+h$. Akan ditunjukkan Rank $K_p = h$.

Terlebih dahulu ditunjukkan claim sebagai berikut :

Jika setiap kolom dari matriks $(D^T)^s B^T$ adalah kombinasi linear dari kolom-kolom matriks K_s, maka untuk setiap $i(i > s)$, sebarang kolom dari matriks $(D^T)^i B^T$ juga merupakan kombinasi linear dari kolom-kolom matriks K_s.

Bukti Claim. Misal $b_i = (i = 1,\ldots, m)$ adalah kolom-kolom dari matriks B^T. Maka $(D^T)^s B^T = (D^T)^s b_1,\ldots,(D^T)^s b_m).$ Karena $(D^T)^s b_j$ adalah kombinasi linear dari kolom-kolom matriks K_s, maka $(D^T)^s b_j$ dapat ditulis sebagai :

$$(D^T)^s b_j = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}^{(0)} b_k + \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}^{1} D^T b_k + \ldots + \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}^{(s-1)} b_k$$

dengan $\lambda_{jk}^{(0)},\ldots,\lambda_{jk}^{(s-1)}$ adalah konstanta-konstanta. Maka:

$$\begin{aligned}(D^T)^{s+1} b_j &= (D^T)((D^T)^s b_j) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}^{(0)} D^T b_k + \ldots + \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk}^{(s-1)} (D^T)^s b_k\end{aligned}$$

Dalam hal ini setiap kolom dari matriks $(D^T)^{s+1} B^T$ adalah kombinasi linear dari kolom-kolom matriks K_s. Dari claim di atas, akan ditunjukkan bahwa rank $K_p = h$.

Andaikan rank $K_p = r \neq h$.

(1) Misalkan $r > h$.
Karena dimensi dari μ-sistem adalah $m + h$ dan variabel baru yang dibutuhkan untuk membentuk μ-sistem dipilih $\mu^{(k)} = BD^k Z, (k = 1,\ldots, p-1), \mu = BZ$, maka terdapat $s(s \leq p)$ sedemikian hingga matriks K_s mempunyai kolom bebas linear sebanyak *h*. Perhatikan bahwa setiap kolom matriks $(D^T)^i B^T (i > s)$ adalah kombinasi linear dari kolom-kolom matriks K_s. Jadi hanya terdapat *h* kolom matriks di K_p yang bebas linear. Hal ini bertentangan dengan asumsi diatas.

(2) Misalkan $r<h$.
Maka dimensi dari μ-sistem tidak akan pernah sama dengan $m+h$. Dengan demikian haruslah rank $K_p = h$.

(ii) $\Leftarrow$

Jika rank $K_p = h$, akan ditunjukkan dimensi dari μ-sistem adalah $m+h$.

Karena rank $K_p = h$, maka terdapat *h* kolom matriks K_p yang bebas linear. Sementara itu dipihak lain variabel y_i (i=1,2,...,m). Jadi dimensi dari μ-sistem adalah $m+h$

Akibat 1. *Suatu μ-sistem yang dimensinya lebih kecil dari sistem (1) jika dan hanya jika rank* $K_p = h < p$.

Bukti. (i)$\Rightarrow$

Karena dimensi dari μ-sistem adalah $m+h$, juga dimensi dari sistem (1) adalah $m+p$, maka rank $K_p = h < p$

(ii)$\Leftarrow$

Perhatikan dimensi dari μ-sistem adalah $m + rank K_p$. Karena rank $K_p < p$ dan $m + rank K_p < m + p$. Dengan demikian dimensi μ-sistem lebih kecil dari dimensi sistem (1).

Struktur, Spektrum dan Matriks Fundamental dari Sistem Auxiliary

Misalkan *s* adalah bilangan minimum sedemikian hingga rank $K_{s-1} =$ rank K_s. Definisikan matriks $L_i\,(i = 1,2,...,5)$ sebagai berikut:

a. Baris dari matriks L_1 ukuran hxp adalah kolom dari matriks K_{s-1} yang bebas linear.
b. Kolom dari matriks L_2 ukuran *h x h* adalah kolom *h* pertama dari matriks L_1.
c. Baris *h* pertama dari matriks L_3 ukuran *p x h* adalah baris dari matriks L_2^{-1}. Sisa baris-baris matriks L_3 adalah vektor baris nol.
d. $L_4 = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & L_1 \end{pmatrix}$, $L_5 = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & L_3 \end{pmatrix}$, dengan I_m adalah Matriks identitas orde-*m*.

Lemma 3.

1. *Suatu sistem auxliary dari sistem (1) diperoleh persamaan :* $\dot{\xi} = L_4 A^* L_5 \xi$
2. *Himpunan akar persamaan karakteristik dari* μ*-sistem adalah subset dari himpunan akar persamaan karakteristik dari sistem* (*1*).
3. *Misalkan* $X(t)$ *adalah matriks fundamental dari sistem* (*1*), *kemudian G(t) adalah matriks fundamental dari* μ *-sistem, maka* $G(t) = L_4 X(t),\quad t \ge t_0$

Bukti.

1. Dari sistem (1) ekivalen dengan variabel vektor $w = Lx,$ dimana

$$L = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & L^* \end{pmatrix}, \quad L^* = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_* \end{pmatrix}$$

Dengan L_* adalah matriks sebarang dengan ukuran $(n-m-h)xp$ sedemikian hingga matriks *L* nonsingulir. Perhatikan bahwa

$$\dot{w} = L\dot{x} = L(A^* x) = L(A^*(L^{-1}w) = LA^* L^{-1} w$$

Misalkan l_{kr} adalah unsur-unsur matriks L. Maka diperoleh:

$$l_{kr} = \begin{cases} 1, & k = r, k = r = 1,...,m \\ 0, & k = 1,...,m; r = 1,...,m; k \ne r \\ 0, & k = 1,...,m; r = m+1,...,m+p \\ 0, & k = m+1,...,m; r = 1,...,m \\ l_{1,ij,} & k = m+1,...,m+h; r = m+1,...,m+p \\ l_{*,ij,} & k = m+h+1,...,n; r = m+1,...,m+p \end{cases}$$

Jadi $L_4 = (l_{ij}) \quad (i = 1,2,...,m+h; j = 1,...,m, m+1,...,m+p)$.

Misalkan $l_{kr}^{-}(k, r = 1,2,...,n)$ adalah unsur-unsur matriks L^{-1}. Karena kolom *h* pertama dari L_1 adalah bebas linear, kita dapat ambil kolom nol sebagai kolom *h* pertama L unsur-unsur dari matriks L^{-1} dirumuskan sebagai berikut:

$$l_{kr}^{-} = \frac{(-1)^{k+r} \det L_{rk}}{\det L} \quad (k = r = 1,...,n)$$

dengan matriks L_{rk} diperoleh dari matriks *L* dengan menghapus baris ke-*r* dan kolom ke-*k*.

Karena det Matriks L_2 tidak nol, dapat dipilih $L_* = (0, I_{p-h}).$ Jadi

$$l_{kr}^{-} = \begin{cases} 1, \ k = r \\ 0, k \neq r, \quad k, r = 1, \ldots, m; \end{cases}$$

$$l_{kr}^{-} = 0 \qquad \text{untuk} \qquad \begin{cases} \quad k = 1, \ldots, m; \qquad r = m+1, \ldots, m+h \\ k = m+1, \ldots, m+h; \qquad r = 1, \ldots, m \\ k = m+h+1, \ldots, n; \quad r = 1, \ldots, m+h \end{cases}$$

Kemudian

$$l_{m+s,m+p}^{-} = \frac{(-1)^{s+v} \det L_{2vs}}{\det L} = \frac{(-1)^{s+v} \det \det L_{2vs}}{\det L_2} \qquad (v, s = 1, \ldots, h)$$

dimana matriks L_{2vs} diperoleh dari matriks L_2 dengan menghilangkan baris ke-*v* dan kolom ke-*s*. Jadi $L_5 = (l_{ij}^{-}) \quad (i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m+h)$. Akibatnya unsur-unsur dari matriks $L_4 A^* L_5$ adalah unsur-unsur dari matriks $L_4 A^* L^{-1}$ untuk $i, j = 1, \ldots, m+h$. Jadi untuk μ -sistem auxiliary diperoleh persamaan $\dot{\xi} = L_4 A^* L_5 \xi.$

2. Perhatikan bahwa $\det(A^* - \lambda I_m) = 0$ dan $\det(LA^* L^{-1} - \lambda I_m) = 0$ mempunyai akar persamaan karakteristik yang sama. Kemudian $L_4 A^* L_5$ adalah unsur dari $L\ A^* L^{-1}$ untuk $i = j = 1, \ldots, m+h$. Jadi ada akar persamaan karakteristik $\lambda_i (i = 1, \ldots, n)$ dari sistem (1), sedangkan dipihak lain akar persamaan karakteristik $\lambda_{ij} (j = 1, \ldots, m+h)$ dari μ -sistem . Dengan demikian himpunan akar persamaan karakteristik dari μ -sistem adalah subset dari himpunan akar persamaan karakteristik dari sistem (1).
3. Misalkan $X(t)$ dan $X^*(t)$ masing-masing merupakan matriks fundamental dari solusi sistem (1) dan sistem $\dot{w} = LA^* L^{-1} w.$ Perhatikan dengan $w = Lx,$ maka $\dot{w} = L\dot{x}$. Jadi ada $X^*(t) = LX(t), \quad t \geq t_0$. Karena sistem persamaan *(m+h)* pertama:

$$\dot{w} = LA^* L^{-1} w = L_4 A^* L_5 w$$

adalah bentuk μ -sistem, maka $G(t) = L_4 X(t), \quad t \geq t_0$.

4. Kriteria Kestabilan Yang Berkenaan dengan Bagian dari Variabel-Variabel

Pada bahasan ini, akan ditunjukkan bahwa solusi nol dari μ -sistem auxiliary adalah stabil Lyapunov (stabil asimtotik), jika dan hanya jika solusi nol dari sistem (1) yang berkenaan dengan variabel-variabel $y_1, \ldots, y_m$ adalah stabil (stabil asimtotik). Hal ini dapat dilihat dalam teorema berikut ini.

Teorema 1. *Jika solusi nol dari* μ *-sistem* $\dot{\xi} = L_4 A^* L_5 \xi$ *adalah stabil asimtotik Lyapunov maka untuk suatu unpertubed motion* $x = 0$ *dari sistem* (1) *adalah stabil asimtotik berkenaan dengan* $y_1, \ldots, y_m$.

Bukti. Karena sistem (1) adalah stabil asimtotik berkenaan dengan $y_1, \ldots, y_m$, maka dipenuhi asimtotik eksponensial, sepanjang trajektori sistem (1) dipenuhi:

$$\left|\sum_{l=1}^{p} b_{il} z_l(t)\right| \le \alpha_i e^{-\beta_i (t-t_0)} \qquad (i = 1,\ldots,m)$$

dengan α_i, β_i adalah konstanta positif. Jadi dipenuhi $|\mu_j| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.

Teorema 2. *Jika solusi nol dari* μ *-sistem* $\dot{\xi} = L_4 A^* L_5 \xi$ *adalah stabil Lyapunov maka Solusi* $x = 0$ *dari sistem* (*1*) *adalah stabil* (*non asimtotik*) *berkenaan dengan variabel* $y_1,\ldots, y_m$.

Bukti. Misalkan solusi nol dari μ -sistem $\dot{\xi} = L_4 A^* L_5 \xi$ adalah stabil Lyapunov. Maka $|\dot{\xi}(t)| < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad (i,\ldots,m,\ldots,m+h)$. Jadi $|\xi(t)| = |y_i(t)| < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$. Dalam hal ini $|y_i(t)| < \varepsilon \quad (i = 1,2,\ldots,m) \quad \forall \varepsilon > 0$. Dengan demikian *unpertubed motion* $x = 0$ dari sistem (1) adalah stabil berkenaan dengan $y_1,\ldots, y_m$.

Akibat 2.

1. *Misalkan hanya m akar persamaan karakteristik dari sistem* (*1*) *mempunyai bagian real yang negatif. Untuk sistem unpertubed motion* (*1*) *adalah stabil asimtotik berkenaan dengan* $y_1,\ldots, y_m$ *jika dan hanya jika sistem* (*1*) *mempunyai bentuk*

$$\dot{Y} = Ay, \qquad \dot{Z} = Cy + Dz$$

Dan setiap akar persamaan $\det(A - \lambda I_m)$ *mempunyai bagian real yang negatif.*

2. *Jika persamaan karakteristik dari sistem* (*1*) *mempunyai paling sedikit satu akar persamaan karakteristik dengan bagian real positif dan rank* $K_p = p$, *maka unpertubed motion dari sistem* (*1*) *tidak stabil berkenaan dengan* $y_1,\ldots, y_m$.

Bukti.

(1) (i) $\Rightarrow$

Andaikan sistem (1) tidak terbentuk $\dot{Y} = Ay, \quad \dot{Z} = Cy + Dz$. Maka dimensi dari μ -sistem melebihi *m*. Karena himpunan akar persamaan karakteristik dari μ -sistem termuat pada himpunan akar persamaan karakteristik sistem (1), maka terdapat akar persamaan karakteristik dengan bagian real non negatif, maka solusi nol dari μ -sistem tidak stabil asimtotik. Dengan demikian dengan teorema (1), maka *unpertobed motion* dari sistem (1) mempunyai bentuk $\dot{Y} = Ay, \quad \dot{Z} = Cy + Dz$, dan setiap akar persamaan $\det(A - \lambda I_m)$ mempunyai bagian real yang negatif.

(ii) $\Leftarrow$

Karena setiap akar persamaan karakteristik dari $\det(A - \lambda I_m) = 0$ mempunyai bagian real yang negatif, maka solusi $y = 0$ dari sistem $\dot{Y} = Ay$ adalah stabil asimtotik. Jadi *unpertubed motion* sistem (1) adalah stabil asimtotik berkenaan dengan $y_1,\ldots, y_m$.

Akibat 3. *Jika rank* $K_p = p$, *maka untuk unpertubed motion sistem* (*1*) *adalah stabil* (*asimtotik*) *berkenaan dengan* $y_1,\ldots, y_m$ *jika dan hanya jika unpertubed motion sistem* (*1*) *adalah stabil* (*asimtotik*) *Lyapunov*.

Bukti.

(i) $\Rightarrow$

Karena rank $K_p = p$, maka dimensi dari μ-sistem adalah $m + p = n$. Maka terdapat sebanyak *n* akar persamaan karakteristik dengan bagian realnya negatif. Jadi sistem (1) adalah stabil (asimtotik)

(ii) $\Leftarrow$

Karena sistem (1) adalah stabil (asimtotik), maka ada *n* akar karakteristik dengan bagian realnya negatif. Jadi dipenuhi ada m akar karakteristik dengan bagian real negatif. Dengan demikian suatu unpertubed motion sistem (1) adalah stabil (asimtotik) berkenaan dengan $y_1,..., y_m$. Jadi persamaan $\det(L_4 A^* L_5 - \lambda I_2) = 0$ adalah: $(-1-\lambda)^2 = 0$. Dalam hal ini didapat $\lambda_{12} = -1$. Dengan demikian solusi nol dari μ-sistem $\dot{\xi} = L_4 A^* L_5 \xi$ atau $\dot{\xi} = -\xi_1 + \xi_2$, $\dot{\xi}_2 = -\xi_2$ adalah asimtotik.

Akibatnya, dengan Teorema 1 maka *unperturbed motion* $y_1 = z_1 = z_2 = 0$ adalah stabil asimtotik berkenaan dengan y_1.

Contoh Kestabilan Parsial yang Asimtotik

Contoh 1.

Misalkan sistem (1) punya bentuk sebagai berikut :

$$\dot{y} = -y_1 + z_1 - 2z_2, \quad \dot{z}_1 = 4y_1 + z_1, \quad \dot{z}_2 = 2y_1 + z_1 - z_2$$

Perhatikan:

$$B = (1 \quad -2)$$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa rank $K_2 = 1$. Kemudian

$$L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad L_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Jadi persamaan $\det(L_4 A^* L_5 - \lambda I_2) = 0$ adalah: $(-1-\lambda^2) = 0$. Dalam hal ini diperoleh $\lambda_{12} = -1$. Dengan demikian solusi nol dari μ-sistem $\dot{\xi} = L_4 A^* L_5 \xi$ atau $\dot{\xi} = -\xi_1 + \xi_2$, $\dot{\xi}_2 = -\xi_2$ adalah asimtotik. Akibatnya, dengan Teorema 1 maka *unperturbed motion* $y_1 = z_1 = z_2 = 0$ adalah stabil asimtotik berkenaan dengan y_1.

Contoh 2.

Misalkan

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -y_1 + z_1 - 2z_3 \\ \dot{z}_1 &= 4y_1 + z_1 + 2z_2 \\ \dot{z}_2 &= 8y_1 + 2z_1 + 4z_2 \\ \dot{z}_3 &= 2y_1 + z_1 + z_2 - z_3 \end{aligned}$$

Perhatikan

$$B = (1 \quad 0 \quad -2)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Rank $K_2 = 1$.

$$L_4 A^* L_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Jadi persamaan $\det(L_4 A^* L_5 - \lambda I_2) = 0$ adalah: $(-1 - \lambda^2) = 0$. Dalam hal ini didapat $\lambda_{12} = -1$. Dengan demikian solusi nol dari μ -sistem $\dot{\xi} = L_4 A^* L_5 \xi$ adalah stabil asimtotik.

5. Kesimpulan dan Saran

Dengan teknik μ -sistem kestabilan parsial dari suatu sistem dapat dianalisis. Diharapkan dalam penelitian selanjutnya dapat dibuat tentang analisis kestabilan parsial untuk sistem non linear. Dari hasil yang diperoleh disarankan dapat dikaji hubungan antara teknik μ -sistem dengan metode fungsi Lyapunov.

6. Open Problem

Pandang sistem persamaan diferensial dengan koefisien konstan

$$\dot{x} = Ax + Bu, \qquad x^T = (y_1, ..., y_n, z_1, ..., z_p)$$
$$= (y^T, z^T), m. > 0, p \geq 0, n = m + p$$

Dalam variabel y, z sistem tersebut, $\dot{y} = Ay + Bz + Pu,$ $\dot{z} = Cy + Dz + Ru,$ adalah persamaan yang terbentuk, dengan x adalah vektor keadaan dan u adalah vektor kontrol. Masalahnya adalah bagaimana mencari kontrol u yang menjamin sistem tersebut adalah stabil asimtotik berkenaan dengan $y_1, ..., y_m$.

Daftar Pustaka

[1] Vorotnikov, V.I., Birkhauser, 1998, *"Partial Stability and Control"*. Boston, Basel, Berlin.

[2] Naiborhu, J., Nababan, S.M., Saragih, R., Pranoto, I., *"Direct Gradient Descent Control as A Dynamic Feedback Control for Linear System"*.

[3] Sun, Y., Molchanov, A. P., Michel, A.N., *"Partial Stability of Dynamical Systems"*. Departement of Electrical Engineering University of Notre Dame South Bend, IN, 46556 USA.

[4] Isidori, A., 1995, *"Nonlinear Control System, Third Edition"*. Springer-Verlag Heidelberg, Berlin.