ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 11, No. 1, 63-70, Juli 2014

Pembagi Bersama Terbesar Matriks Polinomial

Indramayanti Syam[1,*], Nur Erawaty[2], Muhammad Zakir[3]

ABSTRAK

Teori bilangan adalah cabang ilmu Matematika yang mempelajari sifat-sifat keterbagian bilangan bulat. Sebagaimana pada bilangan bulat, matriks polinomial dapat dicari pembagi bersama terbesarnya. Untuk itu perlu diketahui syarat yang harus dipenuhi. Karena perkalian matriks tidak komutatif, maka pembagi bersama untuk matriks didefinisikan pembagi kiri bersama dan pembagi kanan bersama. Jika dua buah matriks polinomial memiliki jumlah baris yang sama, maka terdapat pembagi bersama kiri terbesar. Begitupun jika dua buah matriks polinomial memiliki jumlah kolom yang sama, maka terdapat pembagi bersama kanan terbesar. Dalam menentukan pembagi bersama terbesar dua matriks polinomial bisa dilihat dari matriks struktur kiri/kanannya.

Kata Kunci: Bentuk Smith matriks polinomial, matriks polinomial, matriks struktur, Pembagi bersama terbesar.

ABSTRACT

Numerical theory is one of mathematics that learn about properties of integer's divisibility. As the integers, we can find the greatest common divisor of polynomial matrix. So that, we must know the requirements that must be met. Because of matrix multiplication is not commutative, the common divisors for matrix defined as the left or right common divisors. If two polynomial matrices have the same number of rows, then there is a greatest common left divisor. On the other hands, if two polynomial matrices have the same number of columns, then there is greatest common right divisors. In determining the greatest common divisor of two matrix polynomial can be seen from the left structure matrix or right structure matrix.

Keywords: *Smith form of a polynomial matrix, polynomial matrices, structure matrices, greatest common divisors.*

1. PENDAHULUAN

Konsep keterbagian bilangan bulat, yaitu jika diberikan bilangan bulat a dan b, $a \neq 0$, b dikatakan habis dibagi oleh a jika terdapat bilangan bulat c sehingga $b = ac$ atau $b = ca$ (karena berlaku sifat komutatif pada perkalian bilangan bulat), ditulis $a|b$. Pembagi bersama terbesar (atau dikenal dengan istilah FPB) dari a dan b adalah bilangan bulat terbesar d sedemikian sehingga $d|a$ dan $d|b$. Jika ada c pembagi bersama a dan b, maka $c|d$. Dalam hal ini dinyatakan dengan $FPB(a, b) = d$.[1]

*Penulis koresponden.
Alamat E-mail:Indramayantisyam@yahoo.co.id
1,2,3 *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10 Makassar*

Berbeda halnya dalam bilangan bulat, pada matriks tidak berlaku sifat komutatif perkalian, yaitu $AB \neq BA$ (secara umum). Misalkan diberikan tiga buah matriks A, B, C sehingga membentuk persamaan $A = BC$, secara umum ini berarti $A \neq CB$. Dalam sistem ini, B disebut pembagi kiri dari A dan C disebut pembagi kanan dari A.

Pada umumnya analisis yang dilakukan hanya terbatas pada matriks konstan (matriks yang elemen-elemennya bilangan konstan). Namun pada kenyataannya terdapat juga masalah yang memunculkan sebuah matriks polinomial (matriks yang elemen-elemennya polinomial).

Untuk sembarang matriks polinomial $T(x)$ dengan rank r ekivalen dengan suatu matriks diagonal Smith $S_T(x)$ dengan sifat-sifatnya. Berangkat dari bentuk Smith ini, matriks polinomial $T(x)$ dapat difaktorkaan dengan suatu matriks struktur sehingga terdapat suatu matriks polinomial pembagi bersama.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Untuk mendapatkan pembagi bersama terbesar matriks polinomial, diperlukan matriks struktur kiri/kanan yang diperoleh dari bentuk Smith matriks polinomial.

2.1. Polinomial dan Matriks Polinomial

Polinomial $f(x)$ dengan koefisien dalam $\mathbb{R}$ variabel x ($\mathbb{R}$ bilangan real) adalah sebuah bentuk penjumlahan

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

disingkat dengan $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$di mana$a_i \in \mathbb{R}$ adalah koefisien dari x^i.

Jika

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 x^0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$$

dan

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x^1 + b_0 x^0 = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in \mathbb{R}[x]$$

maka untuk penjumlahan polinomial, diperoleh

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = \sum_{k=0}^{d} c_k x^k = h(x) \in \mathbb{R}[x]$$

dan untuk perkalian polinomial, diperoleh

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \cdot \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = \sum_{k=0}^{d} c_k x^k = h(x) \in \mathbb{R}[x]$$

Teorema 1 :

Jika $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ dan $g(x) \neq 0$ dengan $\delta\{f(x)\} \geq \delta\{g(x)\}$, maka terdapat polinomial-polinomial $q(x)$ dan $r(x)$ yang unik, sedemikian sehingga

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

dengan $r(x) = 0$ atau $\delta\{r(x)\} < \delta\{g(x)\}$.

Definisi 2 :

Matriks polinomial adalah sebuah matriks dengan entri polinomial. $\mathbb{R}[x]^{m\times n}$ disimbolkan sebagai himpunan matriks polinomial berukuran $m \times n$.
Misalkan matriks

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x \end{bmatrix}$$

matriks tersebut merupakan matriks polinomial, karena $A(x) = [a_{ij}(x)]$, $a_{ij}(x) \in \mathbb{R}[x]$.

Definisi 3 :
Misal $T(x) \in \mathbb{R}(x)^{p\times m}$ maka *zero* dari $T(x)$ di $\mathbb{C}$ didefinisikan sebagai pembuat nol polinomial pembilangnya. Sedangkan *pole* didefinisikan sebagai pembuat nol penyebutnya.

Definisi 4 :
Suatu matriks polinomial $T(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times p}$ disebut *unimodular*, jika terdapat suatu matriks $\hat{T}(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times p}$ sedemikian sehingga $T(x)\hat{T}(x) = \hat{T}(x)T(x) = I_p$, ekivalen jika $|T(x)| = c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

Definisi 5 :
Derajat matriks polinomial $T(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times m}$ditulis $derT(x)$dan didefinisikan sebagai derajat maksimum dari semua derajat maksimum minor-minornya.

2.2. Bentuk Smith

Teorema 6 :
Setiap matriks polinomial $T(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times m}$ dengan rank $T(x) = r$, $r \leq \min\{p, m\}$, maka matriks $T(x)$ ekivalen dengan suatu matriks diagonal bentuk kanonik Smith $S_T(x)$ yang berbentuk

$$S_T(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f_2(x) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_r(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

di mana setiap $f_i(x)$ adalah monik dan $f_i(x)$ membagi $f_{i+1}(x)$ untuk $i = 1, 2, \ldots, r-1$.

Definisi 7 :
Jika $T(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times m}$, rank $T(x) = r$, maka bentuk kanonik Smith jika $r = p$

$$S_T(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [I_p \quad 0_{p,m-p}]$$

maka $T(x)$ yang memenuhi kondisi ini disebut *unimodular kanan*. Dan jika $r = m$

$$S_T(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m \\ 0_{p-m,m} \end{bmatrix}$$

maka $T(x)$ yang memenuhi kondisi ini disebut *unimodular kiri*.

Teorema 8 :
Jika $T(x)$ merupakan suatu perkalian dari sejumlah perkalian berhingga matriks elementer, maka $T(x)$ unimodular.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Matriks Struktur

Teorema 9 :
Setiap matriks polinomial $T(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times m}$ dengan rank $T(x) = r$ dapat difaktorkan sebagai

$$T(x) = T_L'(x)T_1(x)$$

atau sebagai

$$T(x) = \hat{T}_1(x)T_R'(x)$$

di mana$T_1(x) \in \mathbb{R}[x]^{r\times m}$ adalah unimodular kanan dan $\hat{T}_1(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times r}$ unimodular kiri.

Misalkan $T(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times m}$ dan $S_T(x)$ bentuk Smith dari $T(x)$, sehingga terdapat matriks unimodular $T_L(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times p}$, $T_R(x) \in \mathbb{R}[x]^{m\times m}$ sedemikian sehingga

$$S_T(x) = T_L(x)T(x)T_R(x)$$
$$T(x) = T_L(x)^{-1}S_T(x)T_R(x)^{-1}$$

dan partisi $T_R(x)^{-1}$ sebagai

$$T_R(x)^{-1} = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \end{bmatrix}$$

di mana$T_1(x) \in \mathbb{R}[x]^{r\times m}$, $T_2(x) \in \mathbb{R}[x]^{(m-r)\times m}$ yang merupakan unimodular kanan, maka

$$\begin{aligned} T(x) &= T_L(x)^{-1}S_T(x)T_R(x)^{-1} \\ &= T_L(x)^{-1}\begin{bmatrix} D(x) \\ 0_{p-r,r} \end{bmatrix}[I_r \quad 0_{r,m-r}]\begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \end{bmatrix} \\ &= T_L(x)^{-1}\begin{bmatrix} D(x) \\ 0_{p-r,r} \end{bmatrix}T_1(x) \\ &= T_L'(x)T_1(x) \end{aligned}$$

dengan $T_L'(x) = T_L(x)^{-1}\begin{bmatrix} D(x) \\ 0_{p-r,r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[x]^{p\times r}$.
Dan dengan cara yang sama dapat diperoleh $T_R'(x)$.

Definisi 10 :
$T_L'(x)$ disebut matriks struktur kiri dari $T(x)$ dan $T_R'(x)$ disebut matriks struktur kanan dari $T(x)$.

3.2. Pembagi Bersama Matriks Polinomial

Teorema 11 :
Misalkan diberikan $T_1(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times l}$, $T_2(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times t}$ dengan $l + t = m \geq p = \text{rank}\,[T_1(x), T_2(x)]$, dan $T_L'(x) \in \mathbb{R}(x)^{p\times p}$ adalah matriks struktur dari $T(x) = [T_1(x), T_2(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times m}$. Maka $T_L'(x)$ merupakan pembagi kiri bersama terbesar dari $T_1(x)$ dan $T_2(x)$.
Misalkan dibentuk matriks $T(x) = [T_1(x), T_2(x)] \in \mathbb{R}[x]^{p\times m}$, di mana$T_1(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times l}$, $T_2(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times t}$. Dengan melakukan operasi baris (kolom) elementer untuk memperoleh bentuk Smith, diperoleh

$S_T(x) = T_L(x)T(x)T_R(x)$ (1)
di mana$T_L(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times p}$, $T_R(x) \in \mathbb{R}[x]^{m\times m}$
Misalkan $T_R(x) \in \mathbb{R}[x]^{m\times m}$ adalah matriks unimodular kanan, maka berdasarkan definisi, struktur $S_T(x) = [I_p \quad 0_{p,m-p}]$, dan diperoleh

$$\begin{aligned} S_T(x) &= T_L(x)T(x)T_R(x) \\ T(x)T_R(x) &= T_L(x)^{-1}S_T(x) \\ &= T_L(x)^{-1}[I_p \quad 0_{p,m-p}] \\ &= T_{GL}(x)[I_p \quad 0_{p,m-p}] \end{aligned}$$

$= [T_{GL}(x) \quad 0_{p,m-p}]$ (2)
di mana$T_{GL}(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times p}$. Kemudian definisikan $T_R(x)^{-1} = \hat{T}(x) \in \mathbb{R}[x]^{m\times m}$ dengan $\hat{T}(x)$ sebagai :

$$\hat{T}(x) = \begin{bmatrix} A(x) & B(x) \\ C(x) & D(x) \end{bmatrix}$$

dengan $A(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times l}$, $B(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times t}$, $C(x) \in \mathbb{R}[x]^{(m-p)\times l}$,$D(x) \in \mathbb{R}[x]^{(m-p)\times t}$.

$$\begin{aligned} T(x) &= [T_1(x) \quad T_2(x)] \\ &= [T_{GL} \quad 0_{p,m-p}]T_R(x)^{-1} \\ &= T_{GL}(x)[I_p \quad 0_{p\,,m-p}] \begin{bmatrix} A(x) & B(x) \\ C(x) & D(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$= T_{GL}(x)[A(x) \quad B(x)]$
di mana$[A(x) \quad B(x)] \in \mathbb{R}[s]^{p\times m}$ adalah unimodular kanan dan terlihat $T_{GL}(x) = T_L'(x)$ adalah matriks struktur kiri dari $T(x)$.

$$[T_1(x) \quad T_2(x)] = T_{GL}(x)[A(x) \quad B(x)]$$
$$T_1(x) = T_{GL}(x)A(x) \text{ dan } T_2(x) = T_{GL}(x)B(x)$$

Artinya $T_{GL}(x)$ adalah pembagi kiri bersama dari $T_1(x)$ dan $T_2(x)$. Definisikan $T_R(x)$ sebagai

$$T_R(x) = \begin{bmatrix} T_{R1}(x) & T_{R2}(x) \\ T_{R3}(x) & T_{R4}(x) \end{bmatrix}$$

Kemudian dari persamaan (2) diperoleh

$$T(x)T_R(x) = [T_{GL}(x) \quad 0_{p,m-p}]$$
$$[T_1(x) \quad T_2(x)] \begin{bmatrix} T_{R1}(x) & T_{R2}(x) \\ T_{R3}(x) & T_{R4}(x) \end{bmatrix} = [T_{GL}(x) \quad 0_{p,m-p}]$$
$$[T_1(x)T_{R1}(x) + T_2(x)T_{R3}(x) \quad T_1(x)T_{R2}(x) + T_2(x)T_{R4}(x)] = [T_{GL}(x) \quad 0_{p,m-p}]$$

maka
$T_1(x)T_{R1}(x) + T_2(x)T_{R3}(x) = T_{GL}(x)$ (3)
Misalkan $\bar{T}_L(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times p}$ sebagai pembagi kiri bersama yang lain dari $T_1(x)$ dan $T_2(x)$, sehingga
$T_1(x) = \bar{T}_L(x)F(x)$ dan $T_2(x) = \bar{T}_L(x)G(x)$ (4)
di mana$F(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times l}$, $G(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times t}$. Kemudian dari persamaan (3) dan (4) diperoleh

$$\begin{aligned} T_1(x)T_{R1}(x) + T_2(x)T_{R3}(x) &= \bar{T}_L(x)F(x)T_{R1}(x) + \bar{T}_L(x)G(x)T_{R3}(x) \\ &= \bar{T}_L(x)[F(x)T_{R1}(x) + G(x)T_{R3}(x)] \end{aligned}$$

$= T_{GL}(x)$
Terlihat bahwa $T_{GL}(x)$ merupakan kelipatan dari pembagi kiri bersama yang lain ($\bar{T}_L(x)$). Hal ini berarti $T_{GL}(x)$ adalah pembagi kiri bersama terbesar dari $T_1(x)$ dan $T_2(x)$.
Dan dengan cara yang sama dapat diperoleh untuk pembagi kanan bersama terbesar. Dari uraian di atas, diperoleh teorema berikut

Teorema 12 :
Jika $T_{GL}(x)$ merupakan pembagi kiri bersama terbesar dari $T_1(x)$ dan $T_2(x)$, maka setiap pembagi kiri bersama terbesar lainnya ($\bar{T}_{GL}(x)$) merupakan kelipatan dari $T_{GL}(x)$, yaitu

$$\bar{T}_{GL}(x) = T_{GL}(x)U(x)$$

di mana$U(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times p}$ adalah unimodular.

Definisi 13 :
$T_1(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times l}$ dan $T_2(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times t}$ dengan $l+t \geq p =$ rank $[T_1(x) \quad T_2(x)]$ disebut *coprime kiri* jika pembagi kiri bersama terbesarnya adalah unimodular. Begitupun juga $T_1(x) \in \mathbb{R}[x]^{l\times m}$ dan $T_2(x) \in \mathbb{R}[x]^{t\times m}$ dengan $l+t \geq m = rank \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \end{bmatrix}$ disebut *coprime kanan* jika pembagi kanan bersama terbesarnya adalah unimodular.

Teorema 14 :
Misalkan $T_1(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times l}$ dan $T_2(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times t}$ dengan $l+t = m \geq p = rank\ [T_1(x) \quad T_2(x)]$. Maka pernyataan berikut ekivalen :
(1) $T_1(x)$ dan $T_2(x)$ adalah coprime kiri.
(2) Matriks polinomial $T(x) = [T_1(x) \quad T_2(x)] \in \mathbb{R}[x]^{p\times m}$ tidak mempunyai zero di $\mathbb{C}$.
(3) Terdapat suatu matriks unimodular $\bar{T}_R(x) \in \mathbb{R}[x]^{m\times m}$ sedemikian sehingga
$[T_1(x) \quad T_2(x)]\bar{T}_R(x) = [I_p \quad 0_{p,m-p}] \equiv S_T(x)$

di mana$S_T(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times m}$ merupakan bentuk Smith dari $T(x)$.
(4) Terdapat $Y(x) \in \mathbb{R}[x]^{l\times p}$, $Z(x) \in \mathbb{R}[x]^{t\times p}$ sedemikian sehingga
$T_1(x)Y(x) + T_2(x)Z(x) = I_p$
.
(5) Terdapat $T_3(x) \in \mathbb{R}[x]^{(m-p)\times l}$, $T_4(x) \in \mathbb{R}[x]^{(m-p)\times t}$ sedemikian sehingga
$\begin{bmatrix} T_1(x) & T_2(x) \\ T_3(x) & T_4(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[x]^{m\times m}$unimodular.

3.3. Contoh

Contoh ini memperlihatkan bagaimana penggunaan matriks struktur kiri dan pembagi kiri bersama terbesar dari 2 buah matriks polinomial yang memiliki jumlah baris yang sama, yaitu $T_1(x) \in \mathbb{R}[x]^{2\times 3}$ dan $T_2(x) \in \mathbb{R}[x]^{2\times 1}$.
$T_1(x) = \begin{bmatrix} x & 0 & x+1 \\ 0 & (x+1)^2 & x \end{bmatrix}$,

$$T_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ x+2 \end{bmatrix}$$

Maka $T(x) = [T_1(x), T_2(x)]$

$$= \begin{bmatrix} x & 0 & x+1 & 0 \\ 0 & (x+1)^2 & x & x+2 \end{bmatrix}$$

Dengan melakukan operasi baris atau operasi kolom elementer, diperoleh bentuk Smith dari $T(x)$, yaitu :

$$S_T(x) = \begin{bmatrix} 1\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \end{bmatrix}$$

Dengan matriks elementer dari operasi baris, $T_L(x)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$ dan matriks elementer dari operasi kolom, $T_R(x)^{-1} = \begin{bmatrix} x & 0 & x+1 & 0 \\ -x^2 & (x+1)^2 & -x^2 & x+2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -x+2 & x & -x+2 & 1 \end{bmatrix}$
sedemikian sehingga $T(x) = T_L(x)^{-1}S_T(x)T_R(x)^{-1}$. Berdasarkan *teorema 9*, matriks struktur dari $T_1(x)$ dan $T_2(x)$ adalah :

➢ $T_L^{'}(x) = T_L(x)^{-1}\begin{bmatrix} D(x) \\ 0_{p-r,r} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$$

➢ $T_R^{'}(x) = [D(x) \quad 0_{r,m-r}]T_R(x)^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 & x+1 & 0 \\ -x^2 & (x+1)^2 & -x^2 & x+2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -x+2 & x & -x+2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x & 0 & x+1 & 0 \\ -x^2 & (x+1)^2 & -x^2 & x+2 \end{bmatrix}$$

Sehingga dari *teorema 11*, pembagi bersama terbesar dari $T_1(x)$ dan $T_2(x)$ adalah

$$T_L^{'}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix}$$

yang merupakan pembagi kiri bersama terbesar.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, maka disimpulkan beberapa hal, sebagai berikut :

1. Jika $T(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times m}$ dengan rank $T(x) = r$, maka matriks struktur kiri $T(x)$ didefinisikan sebagai $T_L^{'}(x) = T_L(x)^{-1}\begin{bmatrix} D(x) \\ 0_{p-r,r} \end{bmatrix}$di mana$T_L(x)^{-1} \in \mathbb{R}[x]^{p\times p}$ adalah invers dari operasi perkalian dari sejumlah baris elementer $T(x)$.
2. Jika $T(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times m}$ dengan rank $T(x) = r$, maka matriks struktur kanan $T(x)$ didefinisikan sebagai $T_R^{'}(x) = [D(x) \quad 0_{r,m-r}]T_R(x)^{-1}$di mana$T_R(x) \in \mathbb{R}[x]^{m\times m}$ adalah invers dari operasi kolom elementer $T(x)$.
3. Misalkan $T_1(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times l}$, $T_2(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times t}$ dibentuk menjadi $T(x) = [T_1(x) \quad T_2(x)] \in \mathbb{R}[x]^{p\times m}$ dengan $l + t = m \geq p = rank\ T(x)$, maka pembagi bersama terbesar dari $T_1(x)$ dan $T_2(x)$ adalah suatu matriks struktur kiri dari $T(x)$ yang berbentuk $T_L^{'}(x) \in \mathbb{R}[x]^{p\times p}$.
4. Misalkan $T_1(x) \in \mathbb{R}[x]^{l\times m}$, $T_2(x) \in \mathbb{R}[x]^{t\times m}$ dibentuk menjadi $T(x) = \begin{bmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}[x]^{p\times m}$ dengan $l + t = p \geq m = rank\ T(x)$, maka pembagi bersama terbesar dari $T_1(x)$ dan $T_2(x)$ adalah suatu matriks struktur kanan dari $T(x)$ yang berbentuk $T_R^{'}(x) \in \mathbb{R}[x]^{m\times m}$.
5. Langkah – langkah mencari pembagi bersama terbesar dua matriks polinomial:
   a. Jika kedua matriks ($A(x)$dan $B(x)$) memiliki jumlah baris yang sama, maka bentuk menjadi $[A(x) \quad B(x)]$. Dan jika kedua matriks ($A(x)$dan $B(x)$) memiliki jumlah kolom yang sama, bentuk matriks $\begin{bmatrix} A(x) \\ B(x) \end{bmatrix}$.
   b. Operasikan matriks $[A(x) \quad B(x)]$ atau $\begin{bmatrix} A(x) \\ B(x) \end{bmatrix}$ hingga memperoleh bentuk Smith.
   c. Dengan menggunakan bentuk Smithnya, akan dicari matriks struktur untuk $[A(x) \quad B(x)]$ atau $\begin{bmatrix} A(x) \\ B(x) \end{bmatrix}$ seperti pada bagian (1) dan (2).

Dari matriks struktur tersebut, pembagi bersama terbesar dari matriks $[A(x) \quad B(x)]$ adalah matriks struktur kirinya. Dan pembagi bersama terbesar untuk $\begin{bmatrix} A(x) \\ B(x) \end{bmatrix}$ adalah matriks struktur kanannya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Adawiyah, Robiatul. 2004. "*Bentuk Kanonik Smith Atas Gelanggang Polinomial*". Skripsi Jurusan Matematika. Universitas Hasanuddin. Makassar.

[2] Anton, Howard dan Chris Rorres. 2005. *Elementary Linear Algebra Ninth Edition*. United States of America : John Wiley & Sons, Inc.

[3] Ayres, Frank Jr.PhD. 1992. *Seri Buku Schaum: Teori dan Soal-soal Matriks (versi S1/Metrik)*. Jakarta : Erlangga.

[4] Erawati, N. 2000. "*Pemanfaatan Bentuk Smith-McMillan untuk Parameterisasi Komporisator yang Menstabilkan Plant Proper*". Tesis Pascasarjana Matematika. ITB. Bandung.

[5] Fraleigh, John B. 1993. *A First Course in Abstract Algebra Fifth Edition*. Addison Wasley Publishing Company.

[6] Lang, Serge. 1987. *Linear Algebra Third Edition*. Departement of Mathematics Yale University. New Haven: Springer.

[7] Skorobogatov. Prof.Alexei dkk, *M2P4 Ring and Fields*. London : Mathematics Imperial College.

[8] Vardulakis, Antonis I.G. 1991. *Linear Multivariable Control: Algebraic Analysis and Synthesis Method*. Belanda : John Wiley & Sons, Inc