ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 11, No. 2, 115-121, Januari 2015

Sifat-sifat Ruang Banach $Hom(U, V)$

Muhammad Zakir *

Abstrak

Tulisan ini membahas tentang himpunan operator (pemetaan) linier dari ruang vektor U ke ruang vektor V yang dilambangkan dengan $Hom(U, V)$, ditunjukkan bahwa himpunan tersebut adalah ruang vektor dan membentuk ruang bernorma yang lengkap, atau suatu ruang Banach, selanjutnya sifat-sifat ruang Banach tersebut akan dibahas.

Kata Kunci:Ruang Vektor, operator linier, Ruang Norm, Ruang Banach.

Abstract

This paper discussed a set of linear operator (mapping) froma vector space U to a vector space V, which denoted by $Hom(U, V)$.It is shown that the set is a vector space and formed a complete norm space, or formed a Banach space. The properties of that Banach space also discussed.

Keywords: Vector space, Linier Operator, Norm space, Banach space.

1. Pendahuluan

Ruang Banach adalah ruang norma yang lengkap, sedang ruang norma adalah ruang vektor yang dilengkapi dengan fungsi norm, selanjutnya kelengkapan suatu himpunan adalah bila untuk sebarang barisan Cauchy dalam himpunan tersebut konvergen ke himpunan tersebut. Dalam bagian pendahuluan ini akan diperkenalkan beberapa definisi dan teorema yang mendukung materi yang akan dibahas.[1]

Definisi1.1. *Misalkan U adalah ruang vektor atas lapangan F pemetaan* $\|.\|: U \longrightarrow \mathbb{R}$ *disebut norma dari U bila memenuhi:*

a. $\|x\| \geq 0$ *untuk setiap* $x \in U$
b. *Jika* $x \in U$ *dan* $\|x\| = 0$ *maka* $x = 0$
c. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ *untuk semua* $x \in U$ *dan* $\alpha \in F$
d. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Pasangan ruang vektor U dengan norma disebut ruang bernorma, yang biasanya dilambangkan dengan $(U, \|.\|)$. Sebagai contoh adalah ruang $F^n = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n) | x_i \in F\}$, adalah ruang vektor dengan operasi :

$$x + y = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \cdots + (x_n + y_n)$$
$$\alpha x = (\alpha x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha x_n)$$

Untuk semua $\alpha \in F$dan$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$, selanjutnya bila didefinisikan $\|x\| = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2)^{1/2}$, maka dapat dibuktikan bahwa fungsi tersebut

*Dosen Jurusan Matematika FMIPA UNHAS, zakir@fmipa.unhas.ac.id

[1,2,3] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10 Makassar*

mendefinisikan norma di ruang vektor $F^n = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots\ x_n) | x_i \in F\}$, sehingga $(F^n, \|.\|)$ adalah ruang bernorma.

Definisi 1.2.*Barisan*$(\boldsymbol{x_n})$ *disebut barisan Cauchy bila untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $N \in \mathbb{N}$ *sedemikian sehingga untuk setiap* $n, m\ \geq N$ *berlaku* $d(x_n, x_m) <\ \varepsilon$
Barisan $(\frac{1}{n})$ adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$ dengan metrik $d(x,y) = |x - y|$

Definisi 1.3.*Misalkan U adalah ruang bernorma atas lapangan F . Ruang bernorma yang lengkap disebut ruang Banach.*

Definisi 1.4.*Misalkan U dan V adalah ruang vektor atas lapangan F. Himpunan semua pemetaan linier dari ruang vektor U ke ruang vektor V disebut* $Hom(U,V)$

Teorema 1.1.*Untuk setiap barisan konvergen di X adalah Cauchy.*
Bukti.
Misalkan (x_n) adalah barisan di X dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, dan misalkan $\varepsilon > 0$ maka terdapat bilangan asli $N \in \mathbb{N}$ sedmikian hingga berlaku $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ untuk setiap $n \geq N$, akibatnya untuk $n, m\ \geq N$ berlaku $d(x_n, x_m) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \varepsilon$, jadi (x_n)barisan Cauchy.

2. Pembahasan

Misalkan U, V adalah ruang vektor atas lapangan F , pada sesi ini akan dibahas tentang sifat-sifat dari himpunan $Hom(U,V) = \{T\ \mid T: U \longrightarrow\ V,\ \ T\ pemetaan\ linier\ terbatas\}$, akan dibuktikan bahwa $Hom(U,V)$ adalah ruang bernorm yang lengkap, sehingga $Hom(U,V)$ adalah ruang Banach, selanjutnya akan dibahas secara detail tentang sifat-sifat ruang Banach tersebut.

Definisi2.1. *Misalkan U dan V adalah ruang vektor atas lapangan F dan T adalah pemetaan dari ruang vektor U ke V. T disebut pemetaan linier jika dan hanya jika* $T(\alpha x + \beta y) =\ \alpha T(x) + \beta(y)$ *untuk setiap* $x, y \in U$ *dan* $\alpha, \beta \in F$

Teorema 2.1. *Misalkan T tarnsformasi linier dari ruang vektor U ke ruang vektor V, Jika T kontinu pada stu titik maka T kontinu pada U.*

.
Bukti.
Misalkan T kontinu pada x_0 , misalkan diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\|T(x_0) - T(x)\| <\ \varepsilon$ dimana $\|x_0 - x\| <\ \delta$. Misalkan $x_1 \in U$ maka untuk setiapa $x \in U$ dengan $\|x_0 - x\| <\ \delta$ berarti $\|x_0 - (x - x_1 + x_0)\| =\ \|\ x_1 - x\ \| <\ \delta$ dan $\|T(x_1) - T(x)\| = \|T(x_0) - T(x - x_1 + x_0)\| <\ \varepsilon$, maka terbukti T kontinu pada x_1, karna x_1 vektor sebarang pada *U* maka T kontinu pada *U*.

Definisi2.2.*Misalkan U dan V adalah ruang vektor atas lapangan F dan T adalah pemetaan linier dari ruang vektor U ke V. T disebut pemetaan linier terbatas jika dan hanya jika* $\{\ T(x) \colon \|x\|\ \leq\ 1\}$ *adalah himpunan bilangan real terbatas. T disebut terbatas jika dan hanya jika terdapat bilangan real M sedemikian sehingga* $\|T(x)\|\ \leq M$ *dimana* $\|\ Tx\ \|\ \leq 1$

Teorema 2.2.*Misalkan T tarnsformasi linier dari ruang vektor U ke ruang vektor V, Transformasi linier T kontinu pada U jika dan hanya jika terbatas..*
.

Bukti.
Misalkan T kontinu pada U, maka T kontinu pada 0 karna $T(0) = 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\|T(x)\| < 1$ dimana $\| x \| < \delta$. Misalkan $\| x \| < 1$ maka $\left\|\frac{1}{2}\delta x\right\| = \frac{1}{2}\delta\| x \| < \delta$ dan $\left\| T(\frac{1}{2}\delta x) \right\| < 1$. Akan tetapi $T\left(\frac{1}{2}\delta x\right) = \frac{1}{2}\delta$ dan $\| T(x) \| = \left\|\frac{2}{\delta}T(\frac{1}{2}\delta x)\right\| = \frac{2}{\delta}\left\| T(\frac{1}{2}\delta x)\right\| < \frac{2}{\delta}$ jadi T terbatas.

Sebaliknya jika T terbatas, akan dibuktikan T kontinu pada U, dengan memanfatkan teorema 1, cukup dibuktikan T kontinu di titik 0. Bila diberikan $\varepsilon > 0$ dan M sedemikian sehingga berlaku $\| T(x) \| \leq M$ bila $\| x \| < 1$. Pilih $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\delta M < \varepsilon$. Jika $\| x \| < \delta$ maka $\|\delta^{-1}x \| = \delta^{-1}\| x \| < 1$ dan $\| \delta^{-1}x \| \leq M$. Selanjutnya untuk $\| x \| < \delta$ maka diperoleh $\| T(x) \| = \| \delta T(\delta^{-1}x) \| = \delta\| T(\delta^{-1}x) \| \leq \delta M < \varepsilon$ jadi T kontinu pada titik 0, dari Teorema 1, berarti T kontinu pada U

Definisi2.2.*Misalkan U dan V adalah ruang vektor atas lapangan F dan T adalah pemetaan linier dari ruang vektor U ke V. Didefinisikan suatu bilangan real non negatif :*

$$\|T\| = sup\{\|T(x)\| : \|x\| < 1\} \quad (1)$$

Disebut norma T, dalam bentuk lain penulisan sbb:

$$\|T\| = sup\{\|T(x)\| : \|x\| = 1\} \quad (2)$$

$$\|T\| = sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in U \; dan \; x \neq 0\right\} \quad (3)$$

$$\|T\| = inf\{ M \geq 0 : \|T(x)\| \leq M\,\|x\|, \quad \forall x \in U \}$$

(4)

$$\|T(x)\| = \|T\|\| x \| \;, \quad \forall x \in U$$

Definisi 2.3.*Misalkan T_1 dan T_2 adalah tranformasi linier dari ruang vektor U ke ruang vektor V dan misalkan $\alpha \in F$, didefinisikan operasi jumlah dan perkalian skalar pada pemetaan linier $T_1 + T_2$ dan αT dari ruang vektor U ke lapangan F sbb:*

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$$

$$(\alpha T)(x) = \alpha T(x) \quad \textit{untuk setiap} \quad x \in U.$$

Teorema 2.3. *Misalkan himpunan $Hom(U,V)$ adalah himpunan semua transformasi linier terbatas dari ruang vektor U ke ruang vektor V adalah ruang vektor, dan pemetaan linier T ke $\|T\|$ norm pada $Hom(U,V)$, selanjutnya jika V ruang Banach maka $Hom(U,V)$ juga ruang Banach.*

Bukti.
Akan dibuktikan bahwa $Hom(U,V)$ adalah ruang vektor dengan cara menunjukkan bahwa $S + T \in Hom(U,V)$ dan $\alpha T \in Hom(U,V)$ untuk setiap $S,T \in Hom(U,V)$, $\alpha \in F$. Dari persamaan (5), jika $\|x\| < 1$ maka :

$$\begin{aligned}\|(S+T)(x)\| &= \|S(x) + T(x)\| \\ &\leq \|S(x)\| + \|T(x)\| \\ &\leq \|S\|\|x\| + \|T\|\|x\| \\ &\leq \|S\| + \|T\|\end{aligned}$$

Maka terbukti bahwa $(\mathrm{S}+\mathrm{T}) \in Hom(U,V)$ dan $\|\mathrm{S}+\mathrm{T}\| \leq \|\mathrm{S}\|+\|\mathrm{T}\|$. Oleh karna $\|(\alpha T)(x)\| = \|\alpha T(x)\| = |\alpha|\|T\|$. Akhirnya akan ditunjukkan bahwa $T \in Hom(U,V)$ dan $\|T\| = 0$. Dari persamaan (5) , $\|T(x)\| = 0$ dan $T(x) = 0$ untuk semua $x \in U$, jadi $T = 0$, jadi lengkaplah bahwa himpunan $Hom(U,V)$ adalah ruang vektor atas lapangan F. Selanjutnya akan ditunnjukkan bahwa $Hom(U,V)$ adalah ruang Banach, berarti akan ditunjukkan bahwa $Hom(U,V)$ adalah ruang yang lengkap, yang berarti akan ditunjukkan bahwa sebarang barisan Cauchy di $Hom(U,V)$ akan konvergen ke $Hom(U,V)$. Misalkan sebarang barisan Cauchy di $Hom(U,V)$, artinya bila diberikan $\varepsilon > 0$ maka untuk setiap $n,m \geq N$ untuk suatu N bilangan asli akan berlaku $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$. Misalkan $x \in U$ dan jika $n,m \geq N$ maka diperoleh :

$$\|T_n(x) - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\|$$
$$\leq \|(T_n - T_m)(x)\|$$
$$< \varepsilon \| x \| \qquad (6)$$

Jadi terbukti bahwa $(T_n(x))$ adalah barisan Cauchy di V, karna V lengkap maka $(T_n(x))$ konvergen. Misalkan :

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) \qquad (7)$$

Karna x sebarang di U maka T adalah pemetaan dari ruang vektor U ke ruang vektor V, selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $T \in Hom(U,V)$ dan $T = \lim_{n\to\infty} T_n$.
Misalkan $x,y \in U$ dan $\alpha,\beta \in F$ maka dari persamaan (7), linieritas T_n maka diperoleh :

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) = T(x) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + \beta y) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\alpha T_n(x) + \beta T_n(x)) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \beta \lim_{n\to\infty} T_n(x)) \\ &= \alpha T(x) + \beta T(y) \end{aligned}$$

Jadi T linier.
Terakhir untuk semua x di U dan semua bilangan positif n, dari persamaan (7) diberikan :

$$\begin{aligned} T(x) - T_n(x) &= (\lim_{m\to\infty}(T_m(x)) - T_n(x) \\ &= (\lim_{m\to\infty}(T_m(x) - T_n(x)) \end{aligned}$$

Jadi $\|T(x) - T_n(x)\| = \lim_{m\to\infty}\|T_m(x) - T_n(x)\|$

Tetapi dari persamaan (6) sehingga diperoleh :

$$\|T(x) - T_n(x)\| < \varepsilon\|x\| \qquad (8)$$

Untuk semua x di U dan semua $n \geq N$. Dari persamaan (5) dan (8) diberikan untuk setiap x di U maka diperoleh :

$$\begin{aligned} \|T(x)\| &\leq \|T(x) - T_N(x)\| + \|T_N(x)\| \\ &\leq \varepsilon\|x\| + \|T_N(x)\|\|x\| \\ &= (\varepsilon + \|T_N\|\|x\| \end{aligned}$$

Karna T pemetaan linier terbatas maka $T \in Hom(U,V)$. Selanjutnya dari persamaan (8) bila diberikan :
$\|T - T_n\| = \sup\{\|T(x) - T_n(x)\| : \|x\| < 1\}$ untuk semua $n \geq N$, atau $\lim_{n\to\infty} T_n = T$. Oleh karna sebarang barisan Cauchy di $Hom(U,V)$ konvergen, maka

terbukti bahwa ruang $Hom(U,V)$ lengkap sehingga ruang $Hom(U,V)$ adalah ruang Banach.

Teorema 2.4. *Misalkan U, V, W adalah ruang vektor atas lapangan F, jika* $T \in Hom(U,V)$ *dan* $S \in Hom(U,V)$ *maka* $S \circ T \in Hom(U,V)$ *dan* $\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|$

Bukti.
Dapat diperipikasi bahwa $S \circ T$ tranformasi linier . Untuk semua $x \in U$, dari (5) diberikan :

$$\begin{aligned}\|(S \circ T)(x)\| &= \|S(T(x))\| \\ &\leq \|S\|\|T(x)\| \\ &\leq \|S\|\|T\|\|x\|\end{aligned}$$

Maka terbukti bahwa $S \circ T \in Hom(U,V)$ dan $S \circ T \leq \|S\|\|T\|$

Teorema 2.5. *Misalkan T transformasi linier tidak nol dari ruang vektor U kw ruang vektor V.* T *satu-satu dan* T^{-1} *terbatas jika dan hanya jika terdapat bilangan real positip m sedemikian sehingga* $\|T(x)\| \geq m$ *untuk setiap* $x \in U$ *dengan* $\|x\| = 1$

Bukti.
Misalkan T satu-satu dan $T^{-1} \in L(U,V)$ karna $U \neq \{0\}$maka ada $T^{-1} = 0$ dan memenuhi $\|T^{-1}\| > 0$. Misalkan $x \in U$ dengan $\|x\| = 1$ maka :

$$\begin{aligned}1 &= \|x\| \\ &= \|T^{-1}(T(x))\| \\ &\leq \|T^{-1}\|\|T(x)\|\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $\|T(x)\| \geq \|T^{-1}\|^{-1}$

Sebaliknya jika terdapat $m > 0$ sedmikian sehingga $\|T(x)\| \geq m$ untuk $\|x\| = 1$. Perhatikan bahwa $\|T(x)\| \geq m\|x\|$ untuk semua $x \in U$ (karna jika $x \neq 0$ maka $\|\|\|x\|^{-1}\|^{-1} = 1)$, berarti T satu-satu. Misalkan $y \in V$ dan $x = T^{-1}(y)$. Maka $y = T(x)$ dan $\|T^{-1}(y)\| = \|x\| \leq \frac{1}{m}\|T(x)\| = \frac{1}{m}\|y\|$ berarti $T^{-1} \in L(V,W)$.

Teorema 2.6. *Misalkan* (x_n) *dan* (y_n) *adalah barisan dalam ruang vektor U atas lapangan F dengan* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *dan* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$*, dan misalkan* (α_n) *ad lah barisan di F dengan* $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$*. Maka* $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$ *dan* $\lim_{n\to\infty} \alpha_n x_n = \alpha x$ *demikian juga* $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|$

Bukti.
Misalkan$\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat *N,M* sedemikian sehingga $\|x - x_n\| < \frac{1}{2}\varepsilon$ untuk semua $n \geq N$ dan $\|y - y_n\| < \frac{1}{2}\varepsilon$ untuk semua $n \geq M$. Pilih $L = maks\,\{N, M\}$, untuk semua $n \geq L$ berlaku :

$$\begin{aligned}\|(x + y) - (x_n + y_n)\| &= \|(x - x_n) + (y - y_n)\| \\ &\leq \|(x - x_n) + (y - y_n)\| \\ &\leq \|x - x_n\| + \|y - y_n\|\end{aligned}$$

$$< \varepsilon$$

Maka terbukti bahwa $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$

Selanjutnya misalkan $0 < t \leq 1$, terdapat bilangan bulat L sedemikian sehingga $\|x - x_n\| < t$ dan $\|\alpha - \alpha_n\| < t$, untuk semua $n \geq L$. Untuk semua $n \geq L$ berlaku ;

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\| \leq 1 + \|x\|$$

Dan

$$\begin{aligned}\|\alpha x - \alpha_n x_n\| &= \|\alpha(x - x_n) + (\alpha - \alpha_n)x_n\| \\ &\leq \|\alpha(x - x_n)\| + \|(\alpha - \alpha_n)x_n\| \\ &= |\alpha|\|(x - x_n)\| + |(\alpha - \alpha_n)|\|x_n\| \\ &< (|\alpha| + \|x\| + 1)t\end{aligned}$$

Bila diberikan $\varepsilon > 0$, Misalkan $t = \min\{1, \varepsilon(|\alpha| + \|x\| + 1)^{-1}\}$, maka terbukti bahwa terdapat M sedemikian sehingga $\|\alpha x - \alpha_n x_n\| < \varepsilon$ untuk semua $n \geq M$. Terbukti $\lim_{n\to\infty} \alpha_n x_n = \alpha x$ akhirnya telah diketahui bahwa $|\|x\| - \|x_n\|| \leq \|x - x_n\|$ dan $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|$.

Teorema 2.7. *Misalkan W adalah subruang vektor dari U dan misalkan T_0 adalah transformasi linier pada W ke ruang Banach V , maka terdapat dengan tunggal pemetaan linier T dari W ke V sedeminian sehingga $T(x) = T_0(x)$ untuk setiap $x \in W$ dan selanjutnya $\|T\| = \|T_0\|$.*

Bukti.

Misalkan$x \in W$, berarti terdapat barisan (x_n) di W sedemikian sehingga $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, maka barisan (x_n) adalah barisan Cauchy. Oleh karna $\|T_0(x_m) - T_0(x_n)\| = \|T_0(x_m - x_n)\| \leq \|T_0\|\|x_m - x_n\|$ hal ini berarti $(T_0(x_n))$ juga barisan Cauchy dan $(T_0(x_n))$ konvergen ke V karna V adalah ruang Banach. Misalkan (y_n) adalah sebarang barisan di W dengan $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, maka $(T_0(y_n))$ juga konvergen . Akan dibuktikan bahwa $\lim_{n\to\infty} T_0(x_n) = \lim_{n\to\infty} T_0(y_n)$. Diketahui bahwa $\|T_0(x_n) - T_0(y_n)\| \leq \|T_0\|\|x_n - y_n\|$, karna $\lim_{n\to\infty}\|y_n - x_n\| = 0$ maka $\lim_{n\to\infty}\|T_0(y_n) - T_0(y_n)\| = 0$ dari teorema 6 diperoleh $\lim_{n\to\infty} T_0(x_n) = \lim_{n\to\infty} T_0(y_n)$. Sekarang didefinisikan pemetaan T dari W ke V yaitu $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_0(x)$ dimana $x \in W$ dan barisan (x_n) adalah barisan di W dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Selanjutnya akan dibuktikan T memenuhi teorema pertama misalkan $x \in W$, jika $x_n = x$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dan karna $T_0(x_n) = T_0(x)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, sementara itu diketahui $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_0\,(x_n) = T_0(x)$. Selanjutnya misalkan $x, y \in W$ dan $\alpha, \beta \in F$, jika barisan (x_n) dan (y_n) adalah barisan di W dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dan $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ dari teorema 2.6 diperoleh $\lim_{n\to\infty} \alpha x_n + \beta y_n = \alpha x + \beta y$, tetapi $\alpha x_n + \beta y_n \in W$ dan sekali lagi dengan teorema 2.6. diperoleh :

$$\begin{aligned}T(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n\to\infty} T_0(\alpha x_n + \beta y_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\alpha T_0(x_{n)} + \beta T_0(y_n)) \\ &= \alpha T(x) + \beta T(x)\end{aligned}$$

Jadi T linier.

Terakhir misalkan $x \in W$ dengan $\|x\| \leq 1$. Jika barisan (x_n) adalah barisan di W dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dari teorema6dipunyai$\|T_0(x_n)\| \leq \|T_0\|\|x_0\|$ untuk $n \in \mathbb{N}$ dari teorema 2.6 diperoleh :

$\|T(x)\| = \lim_{n\to\infty} T_0(x_n) \leq \lim_{n\to\infty}\|T_0\|\|x_n\| \leq \|T_0\|$ Jadi terbukti T terbatas dan $\|T\| \leq \|T_0\|$ maka :

$$\begin{aligned}\|T_0\| &= \sup\{\|T_0(x)\| : x \in W\ dan\ \ \|x\| \le 1\}\\ &= \sup\{\|T(x)\| : x \in W\ dan\ \ \|x\| \le 1\}\\ &\le \sup\{\|T(x)\| : x \in W\ dan\ \ \|x\| \le 1\}\\ &= \|T\|\end{aligned}$$

Jadi $\|T_0\| = \|T\|$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa T tunggal. Misalkan T_1 adalah transformasi linier dari W ke V sedemikian sehingga $T_1(x) = T_0(x)$ untuk semua $x \in W$. Misalkan $x \in W$ dan misalkan pula barisan (x_n) di W sedemikian sehingga $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Karna T_1 kontinu pada W maka $\lim_{n\to\infty} T_1(x_n) = T_1(x)$. Definisikan $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_0(x_n)$ dan diketahui $T_0(x_n) = T_1(x_n)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ konsekwensinya $T(x) = T_1(x)$, maka terbukti $T = T_1$.

3. Kesimpulan/Saran

Himpunan operator (pemetaan) linier dari ruang vektor *U* keruang vektor *V* yang dilambangkan $Hom(U,V)$ membentuk ruang bernorma yang lengkap, sehingga himpunan tersebut juga membentuk ruang Banach.

Daftar Pustaka

[1] Conway, 1990, *A Course In Fungtional Analysis* ,Springer-Verlag, New Yourk

[2] G.F. Simon, 1963, *Fintroduction to Topology and Modern Analysis*,Mc Graw-Hill Book Company, Inc.

[3] Hewit E and K Stromberg, 1969, *Freal Abstract Analysis*,Springer , Berlin

[4] Kreyzig E, 1978, *Fintroduction Fungtional Analysisi Whith Application,John Wilay & soon New Yourk*

[5] A.L Brawon and A. Page, 1970,*Elements of Fungtional Analysisis*,Butler & Tanner Ltd , LondoN

[6] Lang Serge 1993, Algebra, Addison Weslay Publishing Company Inc