

# Model Matematika Kecanduan Terhadap Rokok

Kasbawati\*

## Abstrak

Makalah ini mengangkat masalah tentang model matematika untuk kasus kecanduan terhadap rokok. Masalah ini sebelumnya telah diteliti oleh Castillo-Garsow, Jordan-Salivia dan Rodriguez-Herrera (2000), tetapi tanpa mempertimbangkan faktor *gender*. Dalam tulisan ini penelitian dibatasi dalam populasi tertutup dan populasi dibagi berdasarkan faktor gender, yaitu populasi pria dan wanita. Tiap populasi dibagi menjadi tiga sub populasi, yaitu perokok potensial, perokok (perokok berat) dan perokok yang berhenti merokok. Analisis kualitatif dan kuantitatif dilakukan untuk mengetahui kelakuan solusi model, dan seberapa cepat laju perubahan jumlah perokok jika dilakukan kontrol dan jika tidak dilakukan kontrol.

**Kata Kunci :** Model SIR, basic reproductive number.

## 1. Pendahuluan

Model kecanduan terhadap rokok dibentuk menggunakan model dasar dalam matematika epidemiologi yaitu model SIR (*Susceptible, Infective, Removed*), dimana model SIR tersebut pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927 [2,4]. Model untuk masalah kebiasaan merokok pertama kali diperkenalkan oleh Castillo-Garsow, Jordan-Salivia dan Rodriguez-Herrera ([3]) yang melakukan simulasi pada model ini dengan menggunakan data perokok di Swedia. Model yang diperkenalkan tersebut tidak meninjau faktor gender yang ada dalam populasi perokok. Pada tulisan ini model tersebut akan dikembangkan dengan memasukkan faktor gender. Analisis kualitatif dan kuantitatif akan dilakukan untuk mengetahui kelakuan solusi model dan mengkaji lebih jauh faktor-faktor yang dapat dikontrol untuk mengurangi jumlah perokok.

## 2. Pembentukan Model

Mengingat banyaknya faktor penyebab seseorang kecanduan untuk merokok maka diperlukan beberapa asumsi untuk menyederhanakan masalah. Berikut asumsi-asumsi yang dipergunakan untuk memodelkan masalah kebiasaan merokok tersebut.

1. Populasi dalam sistem dibagi menjadi dua sub populasi yaitu, populasi pria (*male*) dilambangkan dengan  $m$ , populasi wanita (*female*) dilambangkan dengan  $f$ .
2. Sub populasi pria dibagi menjadi tiga kelas populasi, pria potensial yaitu pria yang jarang merokok atau belum pernah merokok dan berpotensi menjadi perokok aktif jika berinteraksi dengan pria perokok aktif, dilambangkan dengan  $\tilde{P}_m$ ; pria perokok aktif yaitu pria yang merokok setiap hari dan menjadi penyebab bertambahnya jumlah perokok, dilambangkan dengan  $\tilde{S}_m$ ; dan pria yang berhenti merokok dilambangkan dengan  $\tilde{R}_m$ . Begitupula dengan

---

\* Staf Pengajar pada Jurusan Matematika, FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar;  
e-mail : [kasbawati\\_sains\\_98@yahoo.com](mailto:kasbawati_sains_98@yahoo.com)

sub populasi wanita, dibagi menjadi tiga kelas populasi, wanita potensial yaitu wanita yang jarang merokok atau belum pernah merokok dan berpotensi menjadi perokok aktif jika berinteraksi dengan pria perokok aktif, dilambangkan dengan  $\tilde{P}_f$ , wanita perokok aktif tetapi tidak berpotensi untuk menyebabkan pertambahan jumlah perokok, dilambangkan dengan  $\tilde{S}_f$ , dan wanita yang berhenti merokok dilambangkan dengan  $\tilde{R}_f$ .

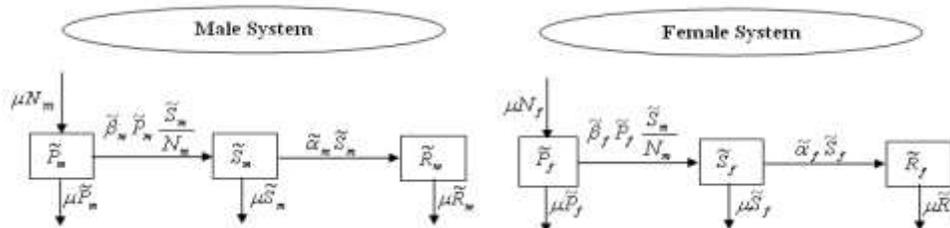
3. Banyaknya populasi,  $N(t)$ , setiap saat dianggap konstan sehingga rata-rata jumlah populasi yang masuk ke dalam sistem ( $\mu N$ ) akan sama dengan rata-rata jumlah populasi yang keluar dari tiap kelas ( $\mu\tilde{P}, \mu\tilde{S}, \mu\tilde{R}$ ), dengan  $\frac{1}{\mu}$  menyatakan waktu rata-rata seseorang akan berada dalam sistem. Diasumsikan pula bahwa  $\mu_m = \mu_f = \mu$ .
4. Seseorang akan menjadi perokok aktif hanya jika berinteraksi dengan pria perokok aktif. Dengan kata lain, jika seseorang, pria atau wanita potensial, bergaul dengan pria perokok aktif maka orang tersebut akan menjadi perokok pula karena dipicu oleh keinginan untuk mencoba. Akibatnya ada dua parameter yang mempengaruhi interaksi tersebut yaitu parameter kontak ( $c$ ) didefinisikan sebagai rata-rata banyaknya interaksi secara acak yaitu berupa pergaulan antara pria perokok aktif dengan pria atau wanita potensial per satuan waktu dengan peluang berhasilnya kontak sebesar  $\sigma$  (konstan). Interaksi ini dapat digambarkan dalam bentuk perkalian antara  $P$  dan  $S$  dengan hanya melibatkan suku linier dari masing-masing  $P$  dan  $S$  yaitu

$$\tilde{\beta}_m \tilde{P}_m \frac{\tilde{S}_m}{N_m} \quad \text{dan} \quad \tilde{\beta}_f \tilde{P}_f \frac{\tilde{S}_m}{N_m}$$

dengan  $\tilde{\beta}_m = c_m \sigma_m$  dan  $\tilde{\beta}_f = c_f \sigma_f$ .

6. Pria atau wanita perokok yang berhenti merokok (*recover*) tidak dapat dimasukkan dalam kelas potensial karena dianggap bahwa kebiasaan merokok tersebut dapat kambuh kembali walaupun tanpa berinteraksi dengan pria perokok aktif. Ini digambarkan oleh  $\tilde{\alpha}_m \tilde{S}_m$  dan  $\tilde{\alpha}_f \tilde{S}_f$ , dengan  $1/\tilde{\alpha}$  merupakan waktu rata-rata seseorang akan berhenti merokok. Diasumsikan pula bahwa kebiasaan merokok tersebut tidak akan kambuh kembali karena adanya kesadaran seseorang pada efek rokok bagi kesehatan.

Berdasarkan asumsi-asumsi di atas maka model dapat dideskripsikan oleh diagram skematik dalam Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Diagram Skematik Model Kecanduan terhadap Rokok.

Untuk memudahkan pada pembahasan selanjutnya kita akan membuat model yang tidak bergantung pada dimensi. Definiskan peubah

$$P_m = \frac{\tilde{P}_m}{N_m}, S_m = \frac{\tilde{S}_m}{N_m}, R_m = \frac{\tilde{R}_m}{N_m}, P_f = \frac{\tilde{P}_f}{N_f}, S_f = \frac{\tilde{S}_f}{N_f}, R_f = \frac{\tilde{R}_f}{N_f}, t = \mu\tau \quad (1)$$

dan parameter-parameter

$$\beta = \frac{\tilde{\beta}}{\mu}, \alpha = \frac{\tilde{\alpha}}{\mu} \quad (2)$$

Model matematika tak berdimensi berdasarkan diagram skematik pada Gambar 1 untuk peubah (1), dan parameter (2) diberikan oleh sistem persamaan diferensial:

$$\begin{aligned} \frac{dP_m}{dt} &= 1 - \beta_m P_m S_m - P_m, \\ \frac{dS_m}{dt} &= \beta_m P_m S_m - \alpha_m S_m - S_m, \\ \frac{dR_m}{dt} &= \alpha_m S_m - R_m, \\ \frac{dP_f}{dt} &= 1 - \beta_f P_f S_m - P_f, \\ \frac{dS_f}{dt} &= \beta_f P_f S_m - \alpha_f S_f - S_f, \\ \frac{dR_f}{dt} &= \alpha_f S_f - R_f, \end{aligned} \quad (3)$$

Persamaan (3) dilengkapi dengan kondisi awal

$$\begin{aligned} P_m(0) &= P_{m0}, S_m(0) = S_{m0}, R_m(0) = R_{m0}, P_f(0) = P_{f0}, \\ S_f(0) &= S_{f0}, R_f(0) = R_{f0} \end{aligned}$$

dengan

$$P_{m0} + S_{m0} + R_{m0} = 1 \text{ dan } P_{f0} + S_{f0} + R_{f0} = 1$$

### 3. Analisis dan Hasil

#### 3.1. Titik Tetap Tak Endemik dan Analisis Kestabilan

Pada bagian ini, analisis akan difokuskan pada populasi pria perokok karena populasi ini yang mengakibatkan munculnya kasus kedua dalam hal ini munculnya perokok aktif baru. Titik tetap tak endemik merupakan salah satu solusi kesetimbangan sistem yang memberikan makna bahwa untuk jangka waktu yang lama lingkungan atau komunitas tertentu akan bebas dari perokok aktif. Titik tersebut adalah  $(P_m^*, S_m^*, R_m^*) = (1, 0, 0)$ . Kestabilan titik tetap tak endemik ini dapat ditentukan melalui analisis kestabilan linear yang dituangkan dalam teorema berikut.

**Teorema 1.**

Misalkan  $(P_m^*, S_m^*, R_m^*) = (1, 0, 0)$  adalah titik tetap tak endemic dari sistem (3.1)-(3.3). Titik tetap tak endemic tersebut stabil asimtotik secara lokal jika dan hanya jika  $R_0 < 1$ , dengan nilai

$$R_0 = \frac{\beta_m}{\alpha_m + 1}.$$

**Bukti:**

( $\Rightarrow$ )

Pelinieran sistem (3.1)-(3.3) di sekitar titik tetap  $(P_m^*, S_m^*, R_m^*) = (1, 0, 0)$  menghasilkan matriks Jacobi:

$$J(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -\beta_m & 0 \\ 0 & \beta_m - \alpha_m - 1 & 0 \\ 0 & \alpha_m & -1 \end{pmatrix}.$$

Nilai eigen matriks Jacobi tersebut dapat diperoleh dari solusi persamaan karakteristiknya, yaitu

$$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -\beta_m & 0 \\ 0 & \beta_m - \alpha_m - 1 - \lambda & 0 \\ 0 & \alpha_m & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Dari persamaan karakteristik di atas diperoleh nilai eigen

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = \beta_m - \alpha_m - 1$$

Karena diketahui bahwa titik tetap sistem stabil asimtotik secara lokal maka  $\lambda_3$  juga bernilai negatif yaitu

$$\lambda_3 = \beta_m - \alpha_m - 1 < 0$$

atau

$$\frac{\beta_m}{\alpha_m + 1} < 1$$

Jika didefinisikan  $R_0 := \frac{\beta_m}{\alpha_m + 1}$ , maka diperoleh nilai  $R_0 < 1$ , dengan nilai  $R_0 = \frac{\beta_m}{\alpha_m + 1}$ . Jadi

terbukti bahwa jika titik tetap tak endemic stabil asimtotik secara lokal, maka  $R_0 < 1$ .  $\square$

( $\Leftarrow$ )

Tinjau persamaan karakteristik di atas. Dari persamaan karakteristik tersebut diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_3 = \beta_m - \alpha_m - 1$ . Agar titik tetap sistem stabil maka nilai eigen  $\lambda_3$

haruslah bernilai negatif. Misalkan  $R_0 = \frac{\beta_m}{\alpha_m + 1}$ . Karena diketahui  $R_0 < 1$  maka  $\beta_m - \alpha_m - 1 < 0$ . Jadi diperoleh  $\lambda_3 = \beta_m - \alpha_m - 1 < 0$ . Karena ketiga nilai eigen negatif, akibatnya sistem akan stabil asimtotik secara lokal. Jadi terbukti bahwa jika  $R_0 < 1$  maka titik tetap tak endemik sistem stabil asimtotik secara lokal.  $\square$

### 3.2. Titik Tetap Endemik dan Analisis Kestabilan

Titik tetap endemik juga merupakan solusi kesetimbangan sistem yang memberikan makna bahwa untuk jangka waktu yang lama, dalam lingkungan atau komunitas tertentu, populasi perokok akan selalu ada dan berpeluang untuk menyebabkan orang lain menjadi perokok aktif pula.

Dengan membuat persamaan (3.1) - (3.3) sama dengan nol, maka diperoleh titik tetap yang kedua berupa titik tetap endemik, yaitu  $(P_m^{**}, S_m^{**}, R_m^{**}) = \left( \frac{1}{R_0}, \frac{(R_0-1)}{\beta_m}, \frac{\alpha_m(R_0-1)}{\beta_m} \right)$  dengan  $R_0 = \frac{\beta_m}{\alpha_m + 1}$ . Seperti halnya dengan titik tetap tak endemik, syarat kestabilan titik endemik dapat ditentukan melalui analisis kestabilan linier yang dituangkan dalam teorema berikut.

#### **Teorema 2**

Misalkan  $(P_m^{**}, S_m^{**}, R_m^{**})$  adalah titik tetap endemik dari sistem (3.1)-(3.3). Titik tetap endemik tersebut akan stabil asimtotik secara lokal jika dan hanya jika  $R_0 > 1$ , dengan nilai

$$R_0 = \frac{\beta_m}{\alpha_m + 1}.$$

#### **Bukti:**

( $\Rightarrow$ )

Pelinieran sistem (3.1)-(3.3) di sekitar titik tetap  $(P_m^{**}, S_m^{**}, R_m^{**})$  menghasilkan matriks Jacobi:

$$J(P_m^{**}, S_m^{**}, R_m^{**}) = \begin{pmatrix} -(R_0 - 1) - 1 & \frac{-\beta_m}{R_0} & 0 \\ (R_0 - 1) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_m & -1 \end{pmatrix}.$$

Nilai eigen matriks Jacobi tersebut dapat diperoleh dari solusi persamaan karakteristiknya yaitu

$$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} -(R_0 - 1) - 1 - \lambda & \frac{-\beta_m}{R_0} & 0 \\ (R_0 - 1) & -\lambda & 0 \\ 0 & \alpha_m & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Dari persamaan karakteristik di atas diperoleh nilai eigen  $\lambda_1 = -1$  dan persamaan kuadrat

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \tag{4}$$

dengan  $a = R_0$ ,  $b = (R_0 - 1) \frac{\beta_m}{R_0}$ . Persamaan kuadrat tersebut akan mempunyai dua akar real yang negatif, atau dua akar kompleks dengan bagian real yang negatif jika dan hanya jika koefisien  $a, b > 0$ . Karena diketahui bahwa titik tetap endemik sistem stabil asimtotik secara lokal, maka dua nilai eigen lainnya bernilai negatif. Atau dengan kata lain koefisien dari persamaan kuadrat tersebut,  $a, b > 0$ . Akibatnya diperoleh nilai  $R_0 > 1$ , dengan  $R_0 = \frac{\beta_m}{\alpha_m + 1}$ . Jadi terbukti bahwa jika titik tetap endemik sistem stabil asimtotik secara local maka  $R_0 > 1$ . $\square$

( $\Leftarrow$ )

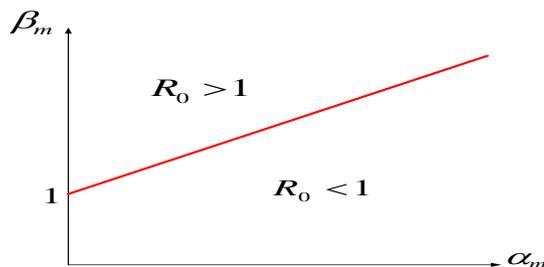
Tinjau persamaan karakteristik di atas dengan nilai eigen  $\lambda_1 = -1$ , dan persamaan kuadrat (4) dengan  $a = R_0$ ,  $b = (R_0 - 1) \frac{\beta_m}{R_0}$ . Agar titik tetap endemik stabil maka dua nilai eigen lainnya haruslah bernilai negatif. Karena diketahui  $R_0 > 1$ , dengan nilai  $R_0 = \frac{\beta_m}{\alpha_m + 1}$  maka nilai  $a > 0$  dan  $b > 0$ . Akibatnya persamaan kuadrat (4) menghasilkan dua akar real yang negatif atau dua akar kompleks dengan bagian real yang negatif. Karena ketiga nilai eigen negatif maka titik tetap endemik akan stabil asimtotik. Jadi terbukti bahwa jika  $R_0 > 1$  maka titik tetap endemik sistem stabil asimtotik secara lokal. $\square$

### 3.3. Basic Reproductive Number ( $R_0$ )

Dalam masalah kebiasaan merokok,  $R_0$  dapat dinyatakan sebagai rata-rata banyaknya kasus kedua (kasus sekunder) yang dihasilkan oleh seorang perokok aktif, pada saat ia berinteraksi dalam sebuah populasi yang potensial. Nilai  $R_0$  sistem dapat diperoleh melalui syarat kestabilan titik tak endemik atau titik endemik, karena stabil atau tidaknya kedua titik tersebut ditentukan melalui besar kecilnya nilai  $R_0$ . Tinjau nilai  $R_0$  yang telah diperoleh dari syarat kestabilan kedua titik tetap yaitu

$$R_0 = \frac{\beta_m}{\alpha_m + 1} \quad (5)$$

dengan  $\beta_m$  adalah rata-rata kontak, dan  $\frac{1}{\alpha_m + 1}$  adalah periode terjadinya kontak. Secara umum,  $R_0$  sistem bergantung pada parameter  $\beta_m$  dan  $\alpha_m$ . Besar kecilnya nilai  $R_0$  dapat ditentukan dengan cara mengetahui ambang batas dari tiap parameter atau kebergantungan antara parameter  $\beta_m$  dengan  $\alpha_m$ . Jika  $R_0 = 1$ , yang merupakan titik bifurkasi sistem (*turning point*), maka diperoleh persamaan  $\beta_m = \alpha_m + 1$ . Gambar berikut memperlihatkan hubungan antara parameter  $\beta_m$  dengan  $\alpha_m$  untuk nilai  $R_0 = 1$ .



Gambar 2. Grafik  $\beta_m$  terhadap  $\alpha_m$ , dengan nilai  $R_0 = 1$ .

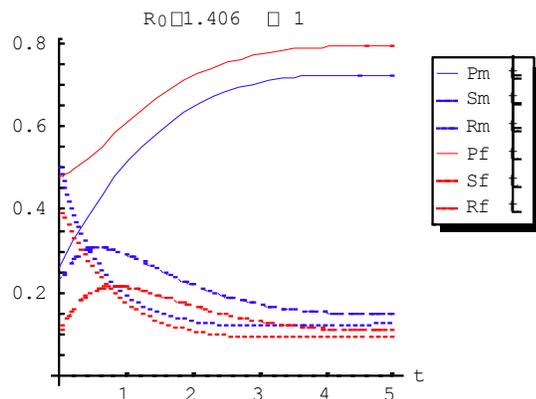
Endemik terjadi jika  $R_0 > 1$  dan tak endemik jika  $R_0 < 1$ .

Dari Gambar 2 di atas dapat dilihat bahwa jika nilai  $\beta_m < 1$  maka nilai  $R_0$  akan selalu kecil dari 1, untuk setiap nilai  $\alpha_m > 0$ . Sebaliknya, jika nilai  $\beta_m$  cukup besar, maka  $R_0$  akan kecil dari 1 jika dan hanya jika nilai  $\alpha_m$  juga besar. Ini berarti bahwa jika terjadi kontak yang cukup besar antara pria perokok aktif dengan subpopulasi potensial maka rata-rata jumlah populasi yang berhenti merokok juga harus besar sehingga untuk jangka waktu yang lama endemik tidak terjadi dalam sistem. Tetapi jika kontak yang terjadi cukup kecil maka untuk jangka waktu yang lama endemik tidak akan terjadi dalam sistem. Jadi pada kondisi yang stasioner jika nilai  $R_0$  cukup besar dalam hal ini kontak dengan pria perokok aktif ( $\beta_m$ ) cukup besar, maka jumlah orang yang merokok akan bertambah banyak sehingga endemik akan terjadi. Tetapi jika kontak dengan pria perokok cukup kecil, maka jumlah orang yang merokok akan berkurang sehingga endemik dalam suatu populasi tidak akan terjadi.

#### 4. Simulasi Numerik

Pada bagian ini, akan dilakukan simulasi dengan menggunakan nilai parameter yang telah diperoleh di [5] untuk simulasi, yaitu  $\alpha_m = 1.145$ ,  $\alpha_f = 1.072$ ,  $\beta_m = 3.018$ ,  $\beta_f = 2.072$ . Nilai tersebut merupakan hasil estimasi yang menggunakan data perokok di Great Briatin.

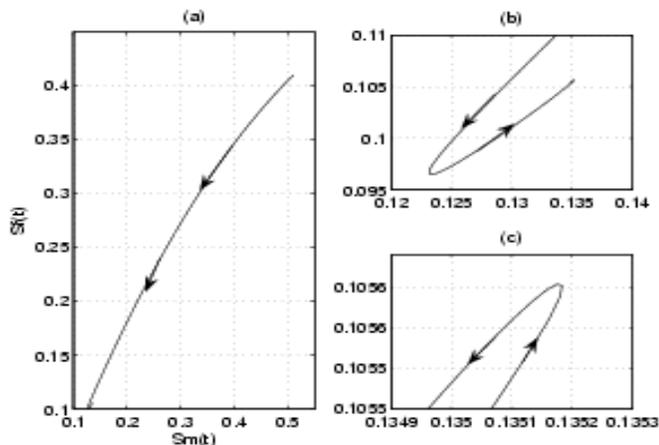
Dengan menggunakan nilai parameter tersebut diperoleh  $R_0 = 1.406$ , yang berarti titik tetap tak endemik tidak stabil dan titik tetap endemik stabil asimtotik secara lokal, sehingga untuk waktu yang cukup besar solusi model akan menuju ke titik tetap endemik tersebut. Kelakuan solusinya dapat dilihat dalam Gambar 3 berikut.



Gambar 3. Grafik Solusi dengan Nilai Awal  $Pm(0) = 0.26$ ,  $Sm(0) = 0.51$ ,

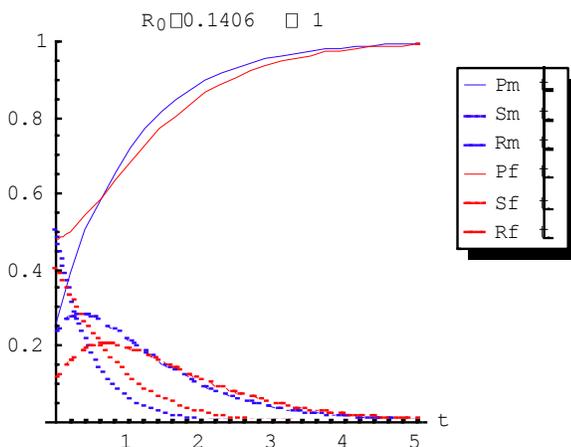
$$R_m(0) = 0.23, P_f(0) = 0.48, S_f(0) = 0.41, R_f(0) = 0.11$$

Dari gambar di atas dapat dilihat bahwa untuk waktu yang stasioner jumlah pria dan wanita perokok selalu ada. Hal ini juga dapat dilihat dengan jelas dalam bidang fase antara sub populasi pria dan wanita perokok berikut.



Gambar 4. Bidang Fase antara Sub populasi Pria dan Wanita Perokok.

Jika nilai  $\beta_m$  diturunkan sebesar 10%, yaitu menjadi 0.3018, maka akan diperoleh nilai  $R_0=0.1406$ , yang berarti bahwa titik tetap tak endemik akan stabil asimtotik secara lokal dan titik tetap endemik tidak stabil sehingga untuk  $t$  yang cukup besar, solusi model akan menuju ke titik tetap tak endemik tersebut. Jadi untuk waktu yang stasioner jumlah pria perokok aktif akan hilang sama sekali dari populasi sehingga endemik tidak akan terjadi. Kelakuan solusinya dapat dilihat dalam Gambar 5 berikut.



Gambar 5. Grafik Solusi dengan Nilai Awal  $P_m(0) = 0.26$ ,  $S_m(0) = 0.51$ ,  $R_m(0) = 0.23$ ,  $P_f(0) = 0.48$ ,  $S_f(0) = 0.41$ ,  $R_f(0) = 0.11$  dan Nilai  $\beta_m$  yang Diturunkan Sebesar 10%, dari 3.018 Menjadi 0.3018.

## 5. Kesimpulan

Dari hasil analisis di atas dapat disimpulkan bahwa jika rata-rata kontak antara pria potensial atau wanita potensial dengan pria perokok aktif per individu per tahun dapat dikontrol maka untuk kondisi yang stasioner endemik dalam suatu populasi tidak akan terjadi, yang berarti bahwa populasi perokok dapat direduksi dari sistem yang kita amati.

## Daftar Pustaka

- [1] W. E. Boyce & R.C. DiPrima. 1992. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Fifth Edition. John Wiley & Sons, Inc, New York.
- [2] F. Brauer & Castillo, Carlos-Chavez. 2001. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiologi*. Springer-Verlag Inc., New York.
- [3] C. Castillo-Garsow, S.G. Jordan, R.A. Herrera. 2000. Mathematical models for the dynamics of tobacco use, recovery and relapse. *Technical Report Series*, BU-1505-M. Cornell University.
- [4] O. Diekmann, J.A.P. Heesterbeek. 2000. *Mathematical Epidemiology of Infectious Disease*. John Wiley & Sons Ltd., Chicester.
- [5] Kasbawati, A.Y. Gunawan. 2007. A dynamical model for controlling the increase the smoker population. *Submit to MIHMI*.
- [6] J.D. Murray. 1993. *Mathematical Biology, Biomathematics Texts*. Second, Corrected Edition. Springer-Verlag Inc., New York.
- [7] <http://home.student.uu.se/vear8023/STS/ModelForGivingUpSmoking.pdf>.