J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol.14, No. 2, 149-153, Januari 2018

p-ISSN: 1858-1382
e-ISSN: 2614-8811

Bilangan Ramsey untuk Graf Bintang Genap Terhadap Roda Genap

Hasmawati*

Abstrak

Untuk sebarang graf G dan H, bilangan Ramsey $R(G,H)$ adalah bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga sebarang graf F yang berorde n memenuhi kondisi berikut: F memuat G atau komplemen F memuat H. Dalam makalah ini dikaji bilangan Ramsey $R(G,H)$, dimana G adalah graf bintang S_n dan H adalah graf roda W_m. Kami akan menunjukkan bahwa $R(S_4,W_6)= 9$ dan untuk n= 6, 8, maka $R(S_n,W_m) = 2n+1$ untuk $m = n$.

Kata Kunci: *Bilangan Ramsey, Graf Bintang, Graf Roda.*

Abstract

For given graphs G dan H, the Ramsey number $R(G,H)$ is the smallest natural number n such that for every graph F of order n: either F contains G or the complement of F contains H. This paper investigates the Ramsey numbers $R(G,H)$, where G is a stars S_n and H is wheels W_m . We show that $R(S_4,W_6)= 9$ and for n=4, 6, 8 then $R(S_n,W_m) = 2n+1$ for $m= n$.

Keywords: Ramsey Number, Star Graph, Wheel Graph.

1. Pendahuluan

Graf $G(V,E)$ adalah suatu sistem yang terdiri dari himpunan titik berhingga tak kosong $V=V(G)$ dan himpunan sisi $E=E(G)$ yaitu himpunan pasangan tak terurut dari anggota-anggota V. Jika $V(G)$ mempunyai anggota sebanyak n, maka graf G dikatakan *berorde* n dan dinotasikan $|G| = n$. Jika $u,v \in V(G)$ dan $e=uv \in E(G)$, maka u disebut *tetangga* dari v, demikian pula sebaliknya.

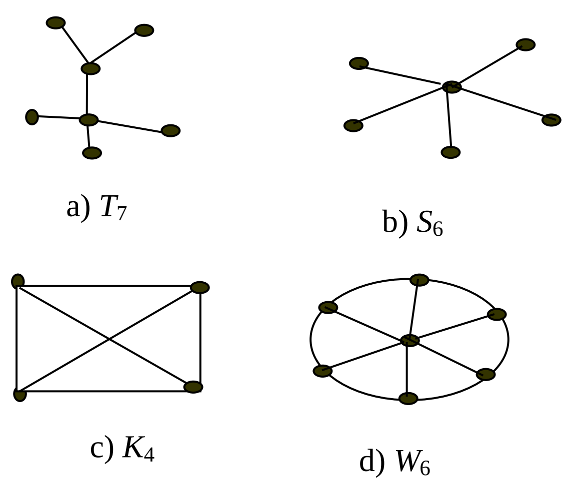
Graf G dengan n titik dan setiap dua titiknya bertetangga disebut graf *lengkap*, dinotasikan dengan K_n. Graf F disebut *komplemen* dari graf G bila $V(F)=V(G)$ dan $uv \in E(F)$ jika dan hanya jika $uv \notin E(G)$. Komplemen dari graf G dinotasikan dengan $\overline{G}$. Graf H disebut subgraf dari G jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Himpunan titik V pada graf G disebut *himpunan titik bebas* jika setiap dua titik di V *tidak bertetangga*. Notasi $\alpha_0(G)$ menyatakan banyaknya titik pada *himpunan titik bebas maksimal* di G. Suatu graf G dikatakan *bipartit* jika $V(G)$ dapat dipartisi kedalam dua subhimpunan tak kosong V_1 dan V_2, sedemikian sehingga untuk setiap sisi $e=uv \in E(G)$, berlaku $u \in V_1$ dan $v \in V_2$ atau $v \in V_1$ dan $u \in V_2$. Misalkan G adalah graf bipartit dengan $|V_1|=n$ dan $|V_2|=m$. Graf G dikatakan *bipartit lengkap* dan dinotasikan $K_{n,m}$, jika setiap titik $u \in V_1$ dan $v \in V_2$ terdapat sisi e=uv$\in E(G)$.

Misalkan G_1 adalah graf dengan himpunan titik V_1 dan himpunan sisi E_1, serta G_2 adalah graf dengan himpunan titik V_2 dan himpunan sisi E_2, graf gabungan $G = G_1 + G_2$ adalah graf

* *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar*

dengan himpunan titik $V(G) = V_1 \cup V_2$ dan himpunan sisi $E(G) = E_1 \cup E_2 \cup \{uv: u \in V_1, v \in V_2\}$. Misalkan G adalah suatu graf dengan himpunan titik $V(G)=v_1, v_2, ..., v_n$ dan $x=v_i v_j \notin E(G)$ untuk suatu $i,j \in \{1,2, ...,n\}$. Graf $G' := G+x$ adalah suatu graf baru dengan himpunan titik $V(G')=V(G)$ dan himpunan sisi $E(G')=E(G) \cup \{x\}$.

Jalan dari u ke v dengan panjang k pada graf $G(V,E)$ adalah suatu subgraf dengan barisan titik $u=u_0,u_1,...,u_k$ dimana $(u_1u_{i+1}) \in E(G)$ untuk $i=1,2,...,k-1$. *Lintasan* P_n adalah jalan dengan n titik yang setiap titiknya berbeda. Suatu graf dikatakan *terhubung* jika untuk setiap dua titik u dan v dari graf tersebut terdapat suatu lintasan dari u ke v. *Komponen* dari suatu graf adalah subgraf terhubung maksimal dari graf tersebut. Jika P_n adalah suatu lintasan dengan barisan titik $v_1, v_2, ..., v_n$ dan $n \geq 3$. maka graf $C_n := P_n + v_1v_n$ disebut s*iklus* dengan n titik. Graf *pohon* T_n (tree) adalah graf terhubung dengan n titik yang tidak memuat siklus. Graf *roda* W_k (wheel) dengan k+1 titik adalah graf C_k+K_1. Titik $x \in V(K_1)$ disebut titik pusat roda (hub) dan siklus C_k disebut *rim* dari roda. Graf $\overline{K_{n-1}}+K_1$ disebut graf *bintang* (star) dengan n titik, dan dinotasikan S_n. Titik $x \in V(K_1)$ disebut sebagai titik pusat (center) graf bintang (Gambar 1).



Gambar 1. a) graf pohon, b) graf bintang,
c) graf lengkap, dan d) graf roda.

Panjang siklus terbesar pada suatu graf G dinotasikan dengan $c(G)$, sedangkan panjang siklus terkecil dinotasikan dengan $g(G)$. Graf G dengan orde n disebut *pancyklic* jika G memuat semua siklus C_l dengan $3 \leq l \leq n$, dan disebut *pancyklic lema* jika G memuat C_h dengan $g(G) \leq h \leq c(G)$. Misalkan $G(V,E)$ adalah sebarang graf sederhana dan k adalah sebarang bilangan asli. Graf G disebut terhubung-k jika $|G| > k$ dan G-X terhubung untuk setiap $X \subseteq V \cup E$ dengan $|X| < k$. Keterhubungan $\kappa(G) = k$ adalah bilangan bulat terbesar k sehingga G merupakan graf terhubung-k. Berikut ini disajikan tiga lema dimana ketiga lema ini digunakan dalam pembuktian hasil-hasil pada penelitian ini.

Lemma 1. (Lemma Bondy)

Misalkan G adalah graf berorde n. Jika $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$, *maka G adalah pansiklis atau* $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$ *untuk n genap.*

Bilangan Ramsey $R(G,H)$ untuk sebarang graf G dan graf H adalah bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga untuk setiap graf F dengan n titik memenuhi kondisi: F memuat G atau $\overline{F}$ memuat H. Misalkan F berorde n tidak memuat G dan $\overline{F}$ tidak memuat H. Jika sebarang graf dengan orde n+1 senantiasa memuat G atau komplemennya memuat H, maka F disebut *graf kritis* untuk G dan H. *Bilangan kromatik* $\chi(H)$ adalah bilangan asli terkecil k sehingga jika titik-titik pada H dapat diwarnai dengan k warna maka setiap dua titik yang bertetangga pada H mempunyai warna berbeda. Chvatal dan Harary (1972) memberikan batas bawah untuk $R(G,H)$, yaitu $R(G,H) \geq (\chi(H)-1)(c(G)-1)+1$, dimana $c(G)$ adalah banyaknya titik pada komponen terbesar G. Berdasarkan batas bawah Chvatal dan Harary ini diperoleh:

- Batas bawah untuk $R(S_n, W_m)$ dimana $n \geq 3$ dan m ganjil adalah $3n - 2$.
- Batas bawah untuk $R(S_n, W_m)$ dimana $n \geq 3$ dan m genap adalah $2n - 1$.
- Batas bawah untuk $R(T_n,K_m)$ dimana n dan m sembarang adalah $(m-1)(n-1)+1$.

Beberapa bilangan Ramsey yang telah dihasilkan antara lain dalam Burr *et al.* (1975) yang membuktikan bahwa $km+ln - min(mi,nj) - 1 \leq R(mG,nH) \leq km+ln - min(mi,nj)+C$, dimana $|G| = k$, $|H| = l$, $i=\alpha_0(G)$ dan $j=\alpha_0(H)$. Dalam Baskoro (2002) telah dibuktikan bahwa jika $n \geq 3$, maka $R(S_n,W_5) = 3n-2$. Chen *et al.* menunjukkan bahwa jika $n \geq m-1 \geq 2$ dan m ganjil maka $R(S_n,W_m) = 3n-2$. Dalam Hasmawati (2004) diperoleh $R(S_n,W_m) = m+n-2$ untuk n ganjil dan m genap, $R(S_n,W_m) = m+n-1$ untuk yang lainnya.

Dalam Korolova (2004) diperoleh hasil yang lebih baik untuk bintang genap terhadap roda genap. Hasilnya dituliskan dalam teorema berikut.

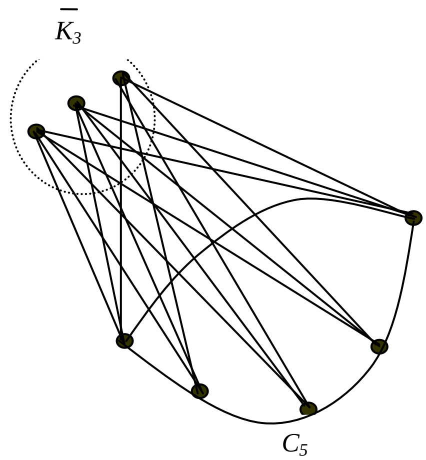
Teorema 1.
Jika m genap dan $m \leq n$, maka $R(S_n,W_m) \geq 2n-1$.

2. Hasil Utama

Pasal ini menyajikan dua hasil utama yang dituliskan dalam bentuk teorema. Penyajian teorema langsung disertai dengan bukti.

Teorema 2. $R(S_4,W_6) = 9$.

Bukti:
Pandang graf $\overline{F} = \overline{K}_3 + C_5$. Graf ini berorde 8 dan tidak memuat W_6. Sedangkan graf F adalah graf 2-reguler yang berarti tidak memuat S_4. Jadi graf F adalah graf kritis untuk S_4 dan W_6. Dengan demikian diperoleh $R(S_4,W_6) \geq 9$.



Gambar 2. Graf $\overline{F} = \overline{K}_3 + C_5$.

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan Ramsey $R(S_4,W_6) \le 9$. Ambil sebarang graf F_1 dengan $|F_1| = 9$. Andaikan F_1 tidak memuat S_4. Akan ditunjukkan $\overline{F_1}$ memuat W_6. Karena F_1 tidak memuat S_4 maka untuk setiap titik di F_1 mempunyai derajat paling tinggi 2. Ambil sembarang titik di F_1 sebut x. Tulis $A = V(F_1) \setminus N[x]$ dan T adalah subgraf F_1 yang diinduksi oleh A. Berarti $|T| = A = |\ V(F_1)\ | - |\ N[x]\ | = 9$-3=6 dan setiap titik $\overline{T}$ berderajat $|T|$-3$\ge$3. Nilai ini lebih besar atau sama dengan $\frac{|\overline{T}|}{2}$ menurut Lemma 1 $\overline{T}$ memuat semua siklus C_l dengan l = 3, 4, 5, dan 6. Berarti $\overline{T}$ memuat C_6. Titik x bersama-sama C_6 membentuk W_6 di $\overline{F_1}$. Jadi diperoleh F_1 memuat S_4 atau $\overline{F_1}$ memuat W_6. Karenanya diperoleh $R(S_4W_6) \le 9$. Dari kedua ketidaksamaan di atas disimpulkan $R(S_4, W_6) = 9$.

Teorema 2.

$R(S_n,W_m) = 2n+1$ untuk $m = n$ dengan n genap dan $n > 4$.

Bukti:

Pandang F dengan graf $|F| = 2n$. Bagi himpunan titik $V(F)$ kedalam dua kelompok sebut A dan B. Labeli titik di A dengan $a_1, a_2, \ldots, a_{2k-1}$ dan titik-titik di B dengan $b_1, b_2, \ldots, b_{2k+1}$ dengan n=2k . Subgraf dari F yang diinduksi oleh A ($F[A]$) isomorf dengan K_{2k-1} dan subgraf dari F ($F[B]$) yang diinduksi oleh B ($F[B]$), komplemennya isomorf dengan siklus C_{2k+1}. Berarti $F[B]$ adalah subgraf yang setiap titiknya berderajat 2k-2 = n-2. Ini artinya graf F adalah graf (n-2)-reguler dan terdiri dari dua komponen. Dengan demikian F tidak memuat S_n untuk n = *6, 8*. Mudah diperiksa bahwa $\overline{F} = \overline{K}_{n-1} + C_{n+1}$ untuk n = *6, 8*. Jadi Graf $\overline{F}$ memuat W_{n+1} tetapi tidak memuat W_n. Jadi graf F adalah graf kritis untuk S_n dan W_m untuk n=m. Dengan demikian diperoleh $R(S_n,W_m) \ge 2n$+1 untuk n=m.

Berikutnya akan ditunjukkan bahwa bilangan Ramsey $R(S_n,W_m) \leq 2n+1$. Ambil sebarang graf F_1 dengan $|F_1| = 2n+1$. Andaikan F_1 tidak memuat S_n. Akan ditunjukkan $\overline{F_1}$ memuat W_m. Karena F_1 tidak memuat S_n maka untuk setiap titik di F_1 mempunyai derajat paling besar n-2. Ambil sembarang titik di F_1 sebut x. Tulis $A = V(F_1) \setminus N[x]$ dan T adalah subgraf F_1 yang diinduksi oleh A. Berarti $|T| \geq |\ V(F_1)\ | - |\ N[x]\ | = 2n$ +1-(n-2+1)= n+2 dan setiap titik $\overline{T}$ berderajat $|T|$-(n-3)$\geq$3. Untuk n = 6, nilai ini lebih besar atau sama dengan $\frac{|\overline{T}|}{2}$ menurut Lemma 1 $\overline{T}$ memuat semua siklus C_l dengan l = 3, 4, 5, dan 6. Berarti $\overline{T}$ memuat C_6. Titik x bersama-sama C_6 membentuk W_6 di $\overline{F_1}$. Jadi diperoleh F_1 memuat S_6 atau $\overline{F_1}$ memuat W_6. Karenanya diperoleh $R(S_nW_m) \leq 2n+1$. Untuk n = 8, nilai ini lebih kecil dari $\frac{|\overline{T}|}{2}$. Karena itu Lemma Bondy tidak dapat digunakan.

3. Kesimpulan

Bilangan Ramsey untuk kombinasi graf bintang dan graf roda $R(S_n,W_m)$ dengan n genap dan n< 8, Lemma Bondy masih dapat dimanfaatkan. Namun untuk $n \geq 8$, Lemma bondy tidak dapat lagi digunakan. Perlu syarat cukup atau syarat perlu yang lain yang dapat digunakan dalam pembuktiannya.

Daftar Pustaka

[1] Baskoro, E. T., Surahmat, Nababan, S. M. dan Miller, M., 2002, On Ramsey Numbers for Tree versus Wheels of Five or Six vertices, *Graph Combin.*, 18: 717-721.

[2] Burr, S. A., Erdos, P., dan Spencer, J. H., 1975, Ramsey numbers for multiple copies of graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2009.

[3] Chen, Y. J., Zhang, Y. Q., dan Zhang, K. M., The Ramsey Number of Stars versus Whells, *Discrete Math.*, to appear.

[4] Chvatal, V., Harary, F., 1972, Generalized Ramsey Theory for Graph, III:Small off-Diagonal Numbers, *Pac. J. Math.*, 41, 335-345.

[5] Hasmawati, 2004, Bilangan Ramsey untuk kombinasi Graf Bintang terhadap Graf Roda, *Tesis Magister*, Departemen Matematika ITB.

[6] Korolova, A., 2004, Ramsey Numbers of versus Whell of similar sizes, *Discrete Math.*, 292, 107-117.