JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI e–ISSN: 2614–8811
Published by Departement of Mathematics, Hasanuddin University, Indonesia
https://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk/index
Vol. 21, No. 2, January 2025, pp. 520-537
DOI: 10.20956/j.v21i2.41557

The *Generalized* Riemann Integral

Integral Riemann *Diperumum*

James Purba

[*] *Department of Mathematics, University of Sumatera Utara*
***Email**: jamespurba2019@students.usu.ac.id*
Received: 12 October 2024, revised: 9 December 2024, accepted: 10 December 2024

Abstract

Riemann integration theory integrates functions on a bounded interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ as a Riemann sum approach (integral) where the *fineness* of the partitions is controlled by a number (**norm**) $\|\dot{\mathcal{P}}\|$. In *Generalized* Riemann integral theory, the Riemann sum approach of functions is controlled by a **gauge** on $\dot{\mathcal{P}}$ so that enabling integrating functions with much larger collections, such as the Dirichlet function f defined on $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ that is not Riemann integrable. Therefore, the theorems that apply to *Generalized* Riemann integral theory have differences in their hypotheses and conclusions. In this paper, theory of *Generalized* Riemann integral is studied by giving some examples of functions that are *Generalized* Riemann integrable such that they are not Riemann integrable; and proving some theorems that apply in this theory. The functions are integrable by constructing a gauge on the tagged partition $\dot{\mathcal{P}}$ of $[a, b]$ such that the Riemann sum of the function is very close to some number in $\mathbb{R}$. Functions defined on $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ that are *Generalized* Riemann integrable such that they are or not Riemann integrable have the general form of the function: a function f on $[a, b]$ is continuous on $[a, b] \backslash Z$ and discontinuous on Z, where $Z \subset [a, b]$ is a null set. Moreover, an unbounded function f on $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ is integrable (*Generalized* Riemann), if the set $Z \subset [a, b]$ where f is unbounded at $x \in Z$ is a countable set. Furthermore, these two criteria can be extended to infinite intervals, that is a function defined on an infinite interval can be *Generalized* Riemann integrable such that it is not Riemann integrable, if the set of discontinuous and unbounded points of the function is a null set. A sequence of integrable functions on an interval $I \subseteq \mathbb{R}$ that converges to a function on I, satisfies that this limit function is integrable if it satisfies that the existence of the integrable dominating functions.
Keywords: convergent, gauge, integrable, null set, partition, tag

Abstrak

Teori integrasi Riemann mengintegralkan fungsi pada interval terbatas $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ sebagai pendekatan jumlah Riemann (integral) dimana kehalusan partisi-partisi dikendalikan oleh sebuah bilangan (**norm**) $\|\dot{\mathcal{P}}\|$. Pada teori integral Riemann *Diperumum*, pendekatan jumlah Riemann dari fungsi dikendalikan oleh **gauge** pada $\dot{\mathcal{P}}$ sehingga memampukan mengintegralkan fungsi-fungsi dengan koleksi yang jauh lebih besar, seperti fungsi Dirichlet f yang didefinisikan pada $[a, b] \subseteq$

$\mathbb{R}$ yang tidak terintegralkan Riemann. Oleh karena itu, teorema-teorema yang berlaku pada teori integral Riemann *Diperumum* mempunyai perbedaan dalam hipotesis dan kesimpulannya. Pada penelitian ini, dikaji teori integral Riemann *Diperumum* dengan memberikan beberapa contoh fungsi-fungsi yang terintegralkan Riemann *Diperumum* sedemikian sehingga tidak terintegralkan Riemann; dan membuktikan beberapa teorema yang berlaku dalam teori ini. Fungsi-fungsi tersebut dapat terintegralkan dengan mengkonstruksi sebuah gauge pada partisi tag $\dot{\mathcal{P}}$ dari $[a,b]$ sehingga jumlah Riemann dari fungsi menuju (sangat dekat) ke suatu bilangan di $\mathbb{R}$. Fungsi-fungsi yang didefinisikan pada $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ yang terintegralkan Riemann *Diperumum* sedemikian sehingga tidak terintegralkan Riemann memiliki bentuk umum fungsi: fungsi f pada $[a,b]$ adalah kontinu pada $[a,b]\backslash Z$ dan diskontinu pada Z, dimana $Z \subset [a,b]$ adalah suatu himpunan null. Kemudian sebuah fungsi tidak terbatas f pada $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ dapat terintegralkan (Riemann *Diperumum*), jika himpunan $Z \subset [a,b]$ dimana f tidak terbatas di $x \in Z$ adalah sebuah himpunan terhitung (*countable*). Lebih lanjut, dari kedua kriteria ini dapat diperluas ke interval tidak berhingga, yakni suatu fungsi yang didefinisikan pada interval tidak berhingga dapat terintegralkan Riemann *Diperumum* sedemikian sehingga tidak terintegralkan Riemann, jika himpunan titik-titik diskontinu dan tidak terbatas dari fungsi adalah suatu himpunan null. Barisan fungsi-fungsi yang terintegralkan pada suatu interval $I \subseteq \mathbb{R}$ yang konvergen ke sebuah fungsi pada I, memenuhi bahwa fungsi limit ini adalah terintegralkan jika memenuhi adanya fungsi dominasi terintegralkan.

Kata kunci: gauge, himpunan null, konvergen, partisi, tag, terintegralkan

1. PENDAHULUAN

Pada teori integrasi Riemann, integral sebuah fungsi pada interval tertutup dan terbatas didefinisikan sebagai limit dari jumlah Riemann dari fungsi saat **norm** dari partisi-partisi menuju nol. Dalam kalkulus, kelas fungsi-fungsi yang terintegralkan Riemann termasuk fungsi-fungsi **tangga**, **kontinu**, dan **monoton** pada suatu interval $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ [2].

Menjelang akhir abad ke-19, beberapa kelemahan dalam teori integrasi Riemann mulai muncul [2]. Misalnya, fungsi Dirichlet f pada $[0,1]$ yang didefinisikan sebagai

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{jika } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{jika } x \in [0,1]\backslash\mathbb{Q}, \end{cases} \tag{1.1}$$

adalah sebuah fungsi yang tidak terintegralkan Riemann [6]. Selain itu, **semua** fungsi-fungsi yang tidak terbatas pada suatu interval $I \subseteq \mathbb{R}$ adalah tidak terintegralkan Riemann [7].

Kemudian terdapat fungsi yang terdifferensialkan pada interval $[a,b] \subset \mathbb{R}$, namun tidak terintegralkan Riemann, yakni himpunan fungsi-fungsi dalam rumus Newton-Leibniz yang ditulis sebagai

$$\int_a^b F'(x) = F(b) - F(a), \tag{1.2}$$

tidak mencakup *semua* fungsi-fungsi yang terdifferensialkan [2].

Selain itu, ditemukan fakta bahwa limit barisan fungsi-fungsi yang terintegralkan Riemann tidak selalu terintegralkan Riemann [1, 2]. Misalnya, untuk bilangan-bilangan rasional di $[0,1]$ yang dapat ditulis sebagai enumerasi $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, didefinisikan sebuah barisan fungsi-fungsi (f_n) pada $[0,1]$ sebagai:

$$f_n(x) \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{jika } x \in \{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \\ 0, & \text{jika } x \in [0,1]\backslash\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}. \end{cases} \tag{1.3}$$

Oleh karena kekurangan ini, maka para ahli matematika mengembangkan teori integral tambahan. Salah satu yang paling terkenal adalah teori yang dikembangkan oleh matematikawan Henri Lebesgue (1875-1941) pada awal abad ke-20. Menurut [2], teori integral oleh Lebesgue sebenarnya sudah memungkinkan untuk mengintegralkan koleksi fungsi-fungsi yang jauh lebih besar, namun terdapat teori lain yang lebih inklusif daripada teori Lebesgue. Salah satunya adalah teori yang dikembangkan oleh matematikawan Inggris Ralph Henstock (lahir 1923) dan matematikawan Ceko Jaroslav Kurzweil (lahir 1926). Mereka menggunakan pendekatan yang sedikit berbeda dari Riemann; pendekatan ini menghasilkan teori integral yang disebut sebagai *Integral Riemann Diperumum (The Generalized Riemann Integral)* [2]. Integral Riemann *Diperumum* ini juga disebut sebagai integral Henstock-Kurzweil atau integral *Gauge*, yakni generalisasi dari integral Riemann [2, 5].

Beberapa teorema-teorema pada teori integral Riemann *Diperumum* (atau integral Henstock-Kurzweil) ini telah dibuktikan seperti eksistensi dari sebuah partisi tag pada suatu interval $I \subseteq \mathbb{R}$, kriteria Cauchy untuk integrasi, teorema konvergensi seragam barisan pada integrasi, dan teorema dasar kalkulus [2, 5]. Sebagai perbandingan pada teori-teori integral ini, diperoleh fakta kesimpulan bahwa: (1) terdapat fungsi-fungsi yang tidak terintegralkan Riemann namun terintegralkan Lebesgue dan Henstock-Kurzweil; (2) terdapat fungsi-fungsi yang tidak terintegralkan secara Riemann dan Lebesgue, namun terintegralkan Henstock-Kurzweil [3]. Pada penelitian ini akan dikaji teori integral Riemann *Diperumum*, yakni:

1. Menentukan keterintegralan fungsi dari fungsi yang tidak terintegralkan secara Riemann.
2. Menyimpulkan dalam sebuah Teorema **fungsi yang terintegralkan** (Riemann *Diperumum*).
3. Memberikan bukti pada teorema-teorema dalam teori integral (Riemann *Diperumum*), dan memberikan contoh-contoh soal.
4. Menyatakan dan membuktikan teorema konvergensi dominasi pada barisan fungsi-fungsi yang terintegralkan untuk menyelidiki keterintegralan dari fungsi limit barisan.

Definition 1.1 [2]
*Sebuah **partisi** dari sebuah interval $I \coloneqq [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ adalah sebuah koleksi interval-interval tertutup yang tidak beririsan (kecuali titik ujung interval) $\mathcal{P} = \{I_1, \ldots, I_n\}$ dengan $I_i \coloneqq [x_{i-1}, x_i]$ yang gabungannya adalah $[a,b]$.*

Jika sebuah titik t_i telah dipilih dari tiap interval I_i, untuk $i = 1, \ldots, n$, maka titik-titik t_i disebut **tag-tag** dan himpunan pasangan terurut

$$\dot{\mathcal{P}} \coloneqq \{(I_1,\ t_1), \ldots, (I_n,\ t_n)\}$$

disebut sebuah **partisi tag** dari I [2]. Menurut [2, 4, 6], jika $\dot{\mathcal{P}}$ adalah suatu partisi tag dari sebuah interval $[a,b]$, didefinisikan **jumlah Riemann** dari sebuah fungsi $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ yang bersesuaikan terhadap $\dot{\mathcal{P}}$ sebagai bilangan

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}) \coloneqq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{1.4}$$

Definition 1.2 [2, 4]
*Sebuah **gauge** pada $I \subseteq \mathbb{R}$ adalah sebuah fungsi positif kuat yang didefinisikan pada I. Jika δ adalah sebuah gauge pada I $\big(\delta : I \longrightarrow (0, \infty)\big)$, maka sebuah partisi tag $\dot{\mathcal{P}}$ dikatakan **bersubordinasi** terhadap δ jika*:

$$t_i \in I_i \subseteq [t_i - \delta(t_i),\ t_i + \delta(t_i)] \quad \textit{untuk} \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Lemma 1.3 [2]
Jika sebuah partisi tag $\dot{\mathcal{P}}$ dari $I \coloneqq [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ adalah bersubordinasi terhadap δ dan misalkan $x \in I$, maka terdapat sebuah tag t_i di $\dot{\mathcal{P}}$ sedemikian sehingga $|x - t_i| \leq \delta(t_i)$.

Untuk mengontrol kehalusan partisi, dalam teori integrasi Riemann fungsi gauge-gauge δ yang digunakan merupakan fungsi-fungsi konstan, yakni: norm (atau mesh) dari partisi $\mathcal{P}$ yang didefinisikan sebagai bilangan

$$\|\mathcal{P}\| \coloneqq \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}.$$

Sementara dalam teori *integral Riemann Diperumum*, fungsi gauge-gauge yang digunakan adalah fungsi-fungsi tak-konstan; dimana hal ini merupakan esensi dari teori integral ini [2].

Lemma Cousin 1.4 [2, 4]
Jika δ adalah sebuah gauge pada interval $I \coloneqq [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, maka terdapat sebuah partisi tag dari $I \coloneqq [a,b]$ yang bersubordinasi terhadap δ.

Definisi 1.5. [2, 6]
*Sebuah fungsi $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dikatakan **terintegralkan Riemann** pada $[a,b]$ jika terdapat sebuah bilangan $L \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta_\varepsilon > 0$ sedemikan sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ adalah suatu partisi tag dari $[a,b]$ dengan $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_\varepsilon$, maka*

$$\left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L\right| < \varepsilon.$$

Koleksi semua fungsi-fungsi yang terintegralkan Riemann dinotasikan sebagai $\mathcal{R}([a,b])$.

Teorema 1.6 [2, 6]
Jika fungsi $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dan $f \in \mathcal{R}([a,b])$, maka f terbatas pada $[a,b]$.

Teorema 1.7 [2]
Jika fungsi $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ adalah sebuah fungsi tangga, maka $\varphi \in \mathcal{R}([a,b])$.

Teorema 1.8 [2, 6]
Jika fungsi $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ adalah kontinu pada $[a,b]$, maka $f \in \mathcal{R}([a,b])$.

Teorema 1.9 [2, 6]
Jika fungsi $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ adalah monoton pada $[a,b]$, maka $g \in \mathcal{R}([a,b])$.

Menurut [7], Teorema Dasar Kalkulus menyatakan bahwa "Jika sebuah fungsi kontinu F terdifferensialkan pada setiap titik di $[a,b]$, dan jika fungsi turunannya F' adalah terintegralkan Riemann pada $[a,b]$, maka

$$\int_a^x F'(x) = F(x) - F(a), \ \ \forall x \in [a,b]."$$

Dari pernyataan ini, disimpulkan bahwa fungsi-fungsi turunan (terbatas atau tidak terbatas) tidak selalu terintegralkan Riemann.

Definisi 1.10 [2]
*Sebuah fungsi $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dikatakan **terintegralkan Riemann Diperumum** pada $[a,b]$ jika terdapat sebuah bilangan $L \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat sebuah gauge δ_ε pada $[a,b]$ sedemikan sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ adalah suatu partisi tag dari $[a,b]$ yang bersubordinasi terhadap δ_ε, maka*

$$\left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L\right| < \varepsilon.$$

Koleksi semua fungsi-fungsi yang terintegralkan Riemann *Diperumum* dinotasikan sebagai $\mathcal{R}^*([a,b])$. Jika suatu fungsi $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, integral Riemann *Diperumum* dari fungsi $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$ dinotasikan oleh simbol

$$\int_a^b f \quad \text{atau} \quad \int_a^b f(x)\,dx.$$

Teorema 1.11 [2, 6]
Jika fungsi $g \in \mathcal{R}^*([a,b])$, maka nilai dari integral fungsi g adalah unik.

Teorema 1.12 [2]
Jika $f \in \mathcal{R}([a,b])$ dengan integral L, maka $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$ dengan integral L.

Teorema 1.13 [2, 6]
Jika $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$ dan $k \in \mathbb{R}$, maka fungsi kf ada di $\mathcal{R}^*([a,b])$ dan

$$\int_a^b kf = k\int_a^b f. \tag{1.6}$$

Teorema 1.14 [2, 6]
Jika $g, h \in \mathcal{R}^*([a,b])$ maka fungsi $g+h$ ada di $\mathcal{R}^*([a,b])$ dan

$$\int_a^b g + h = \int_a^b g + \int_a^b h. \tag{1.7}$$

Teorema 1.15 [2, 6]
Misalkan fungsi $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dan misalkan $c \in [a,b]$. Maka $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$ jika dan hanya jika fungsi apit f pada $[a,c]$ dan $[c,b]$ keduanya adalah terintegralkan Riemann Diperumum. Dalam hal ini

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{1.8}$$

Teorema 1.16 [2, 6]
Jika $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$, dan jika $[c,d] \subseteq [a,b]$, maka fungsi apit f pada $[c,d]$ adalah di $\mathcal{R}^*([c,d])$.

Teorema [Kriteria Cauchy] 1.17 [2, 6]
Sebuah fungsi $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ adalah di $\mathcal{R}^*([a,b])$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat sebuah gauge δ_ε pada $[a,b]$ sedemikian sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ dan $\dot{\mathcal{Q}}$ adalah suatu partisi-partisi tag dari $[a,b]$ yang bersubordinasi terhadap δ_ε, maka

$$\left|S(\varphi;\dot{\mathcal{P}}) - S(\varphi;\dot{\mathcal{Q}})\right| < \varepsilon. \tag{1.9}$$

Definisi 1.18 [2]
Sebuah himpunan $Z \subset \mathbb{R}$ disebut sebagai sebuah ***himpunan null*** *jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat sebuah koleksi terhitung (countable) interval-interval buka $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^{\infty}$ sedemikian sehingga*

$$Z \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k) \quad \text{dan} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) \le \varepsilon. \tag{1.10}$$

Himpunan kosong dan himpunan yang terdiri dari satu unsur (*singleton*) merupakan dua contoh dari himpunan null.

Teorema [Konvergensi Seragam] 1.19 [2, 5]
Misalkan sebuah barisan fungsi-fungsi (f_n) adalah di $\mathcal{R}^*([a,b])$ dan asumsikan bahwa (f_n) konvergen secara seragam ke fungsi f pada $[a,b]$. Maka $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$ dan

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n. \tag{1.11}$$

Metodologi dalam pembahasan pada hasil, ditetapkan sebagai: fungsi-fungsi pada suatu interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ yang tidak terintegralkan secara Riemann namun terintegralkan (Riemann *Diperumum*) diperoleh dan disimpulkan dengan mengkonstruksi sebuah fungsi positif (gauge) pada suatu partisi tag $\dot{\mathcal{P}}$ dari $[a, b]$, sehingga jumlah Riemann dari suatu fungsi bersesuaikan dengan $\dot{\mathcal{P}}$ menuju (sangat dekat) ke suatu bilangan di $\mathbb{R}$. Selanjutnya, dinyatakan dan dibuktikan teorema-teorema dalam teori integral Riemann *Diperumum*.

2. HASIL UTAMA

Berikut ditunjukkan beberapa fungsi yang tidak terintegralkan secara Riemann, namun terintegralkan secara Riemann *Diperumum*.

Contoh 2.1
(a) *Misalkan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $a \leq b$. Fungsi Dirichlet f yang didefinisikan pada $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ sebagai*

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} 1 & \text{jika } x \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \\ 0 & \text{jika } x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \tag{2.1}$$

adalah terintegralkan ($f \in \mathcal{R}^*([a, b])$) dengan nilai integral 0.

Bukti. Pertama, klaim bahwa fungsi ini adalah tidak terintegralkan Riemann ($f \notin \mathcal{R}([a, b])$). Klaim ini dapat ditunjukkan dengan menggunakan *Kriteria Cauchy*, yakni: *Terdapat $\varepsilon_0 > 0$ sedemikian sehingga untuk sebarang $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ dan $\dot{\mathcal{Q}}$ adalah partisi-partisi tag dari $[a, b]$ dengan $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$ dan $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \delta$, maka $|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f; \dot{\mathcal{Q}})| \geq \varepsilon_0$.* Ambil $\varepsilon_0 \coloneqq \frac{1}{3}$. Jika $\dot{\mathcal{P}}$ adalah sebuah partisi tag dari $[a, b]$ dengan $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$ dan tag-tag t_i adalah bilangan rasional, maka diperoleh $S(f; \dot{\mathcal{P}}) = 1$. Jika $\dot{\mathcal{Q}}$ adalah sebuah partisi tag dari $[a, b]$ dengan $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \delta$ dan tag-tag t_i adalah bilangan irrasional, maka ini menghasilkan $S(f; \dot{\mathcal{Q}}) = 0$. Sehingga diperoleh $|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f; \dot{\mathcal{Q}})| = |1 - 0| \geq \varepsilon_0$.

Sekarang, dengan menggunakan Definisi 1.10 ditunjukkan bahwa fungsi ini adalah terintegralkan Riemann *Diperumum*. Enumerasi bilangan-bilangan rasional di $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ sebagai $\{r_m\}_{m=1}^{\infty}$. Untuk sebarang $\varepsilon > 0$ didefinisikan gauge $\eta_\varepsilon(r_m) \coloneqq \varepsilon/2^{m+2}$ dan $\eta_\varepsilon(x) = 1$ ketika x adalah bilangan irrasional. Jika partisi tag $\dot{\mathcal{P}} \coloneqq \{(I_i,\ t_i)\}_{i=1}^{n}$ dari $[a, b]$ bersubordinasi terhadap η_ε, maka diperoleh $x_i - x_{i-1} \leq 2\eta_\varepsilon(t_i)$. Kemudian jika tag-tag t_i adalah bilangan irrasional, sehingga $f(t_i) = 0$, diperoleh kontribusi tag-tag ini pada jumlah Riemann $S(f; \dot{\mathcal{P}})$ adalah 0. Sekarang, jika titik-titik tag $t_i = r_m$, maka

$$0 < f(r_m)(x_i - x_{i-1}) = 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \frac{2\varepsilon}{2^{m+2}} = \frac{\varepsilon}{2^{m+1}},$$

dan lebih lanjut karena tiap tag demikian dapat muncul paling banyak di dalam dua subinterval, maka diperoleh

$$0 \leq S(f; \dot{\mathcal{P}}) < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^{m+1}} = \varepsilon.$$

Oleh karena $\varepsilon > 0$ adalah sebarang, maka disimpulkan bahwa $f \in \mathcal{R}^*([a, b])$ dan $\int_a^b f = 0$. $\square$

(b) *Misalkan $b \in \mathbb{R}$ dengan $0 < b$, dan fungsi $g : [0,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai $g(2/n) \coloneqq n$ jika $n \in \mathbb{N}$ dan $g(x) \coloneqq 0$ untuk x lainnya di $[0,b]$. Maka fungsi g tidak terbatas pada $[0,b]$ dan fungsi $g \in \mathcal{R}^*([0,b])$.*

Bukti. Pertama, disimpulkan bahwa fungsi ini adalah tidak terintegralkan Riemann ($g \notin \mathcal{R}([0,1])$). Kesimpulan ini dapat ditunjukkan dengan menerapkan pernyataan kontraposisi dari Teorema Keterbatasan 1.6. Untuk kontradiksi, andaikan bahwa fungsi g terbatas pada $[0,b]$. Sehingga terdapat sebuah bilangan $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $g(x) \leq N\ \forall x \in [0,b]$. Karena $N \in \mathbb{N}$ maka juga $N + 1 \in \mathbb{N}$, dan diperoleh bahwa $\frac{2}{N+1} \in [0,b]$ sehingga $g\left(\frac{2}{N+1}\right) = N + 1$. Dengan demikian diperoleh sebuah kontradiksi dengan pengandaian bahwa fungsi g terbatas oleh N pada $[0,b]$. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa fungsi g tidak terbatas pada $[0,1]$; yang oleh karenanya diperoleh bahwa fungsi $g \notin \mathcal{R}([0,b])$.

Sekarang, dengan menggunakan Definisi 1.10 ditunjukkan bahwa fungsi ini adalah terintegralkan Riemann *Diperumum*. Dengan menggunakan argumentasi yang serupa pada contoh 1, bilangan-bilangan pada $[0,b]$ dalam bentuk $x = 2/n$ dapat dienumerasi sebagai $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$. Misalkan himpunan $A \coloneqq \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, ditetapkan $\varepsilon > 0$ adalah sebarang, dan didefinisikan gauge $\delta_\varepsilon(a_k) \coloneqq \varepsilon / k \cdot 2^{k+2}$ dan $\delta_\varepsilon(x) = 1$ untuk x lainnya di $[0,1]$. Jika partisi tag $\dot{\mathcal{Q}} \coloneqq \{(I_i, q_i)\}_{i=1}^{n}$ dari $[0,b]$ bersubordinasi terhadap δ_ε, maka diperoleh $x_i - x_{i-1} \leq 2\delta_\varepsilon(t_i)$. Oleh karena itu, jika tag-tag t_i adalah anggota dari himpunan $[0,b] \backslash A$ sehingga $g(t_i) = 0$, diperoleh kontribusi tag-tag ini pada jumlah Riemann $S(f; \dot{\mathcal{Q}})$ adalah 0. Lebih lanjut, jika titik-titik tag $t_i = a_k$, maka

$$0 < g(a_k)(x_i - x_{i-1}) = k \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq k \cdot \frac{2\varepsilon}{k \cdot 2^{k+2}} = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}},$$

dan karena tiap tag demikian dapat muncul paling banyak di dalam dua subinterval, maka diperoleh

$$0 \leq S(g; \dot{\mathcal{Q}}) < \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ adalah sebarang, maka diperoleh bahwa $g \in \mathcal{R}^*([0,b])$ dan $\int_0^b g = 0$. □

Berikut ditunjukkan dua contoh dari himpunan null.

Contoh 2.2
(a) *Sebuah himpunan terhitung (countable) merupakan sebuah himpunan null.*

Bukti. Jika E adalah sebuah himpunan terhitung, maka E dapat dienumerasi sebagai $\{e_1, e_1, \dots\}$. Untuk sebarang $\varepsilon > 0$, misalkan interval buka

$$I_m \coloneqq \left(e_m - \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}, e_m + \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}\right) \tag{2.2}$$

memuat titik e_m untuk $m = 1, \dots$. Maka, diperoleh bahwa gabungan $\bigcup_{m=1}^{\infty} I_m$ memuat semua anggota E. Lebih lanjut, karena panjang tiap interval buka $I_m = \varepsilon/2^m$, maka jumlah panjang semua interval-interval pada (2.2) adalah

$$\textstyle\sum_{m=1}^{\infty} (\varepsilon/2^m) = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ adalah sebarang, maka disimpulkan bahwa E adalah sebuah himpunan null. □

(b) *Misalkan Z_n adalah sebuah himpunan null untuk tiap $n \in \mathbb{N}$, maka $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ adalah sebuah himpunan null.*

Bukti. Untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $n \in \mathbb{N}$, misalkan $\{I_k^n : k \in \mathbb{N}\}$ sebagai sebuah koleksi terhitung (*countable*) dari interval-interval buka yang gabungannya memuat Z_n dan panjang semua intervalnya adalah lebih kecil atau sama dengan $\varepsilon/2^n$. Tinjau koleksi terhitung $\{I_k^n : k \in \mathbb{N}\}$. Maka terdapat koleksi terhitung $\{\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^n : n, k \in \mathbb{N}\}_{n=1}^{\infty}$, sedemikian sehingga

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^n\right)$$

Lebih lanjut, misalkan $l(I_k^n)$ menyatakan panjang dari interval-interval I_k^n untuk $n, k \in \mathbb{N}$. Karena panjang tiap gabungan koleksi interval I_k^n adalah $\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k^n) \le \varepsilon/2^n$, maka

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k^n)) \le \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon/2^n = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ adalah sebarang, maka oleh Definisi 1.18 disimpulkan bahwa $\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$ adalah sebuah himpunan null. □

2.3 Keterbatasan

Dalam teori integrasi Riemann, sebuah fungsi f yang terintegralkan Riemann pada $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ adalah selalu fungsi yang terbatas pada $[a, b]$ (Teorema 1.6). Namun, telah ditunjukkan pada Contoh 2.1(b), yakni sebuah fungsi yang tidak terbatas dan terintegralkan (Riemann *Diperumum*). Dalam jenis fungsi terbatas dan tidak terbatas pada sebuah interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, sebuah fungsi tidak terbatas f pada $[a, b]$ dapat terintegralkan (Riemann *Diperumum* atau fungsi f ada di $\mathcal{R}^*([a, b])$), jika himpunan $Z \subset [a, b]$ dimana f tidak terbatas di $x \in Z$ adalah sebuah himpunan terhitung (*countable*).

Untuk melihat dugaan ini, tinjau fungsi $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dengan f tidak terbatas pada $Z \subset [a, b]$ dimana Z adalah sebuah himpunan terhitung (*countable*). Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan suatu $\delta_\varepsilon > 0$. Asumsikan bahwa $f(x) \coloneqq \lim\limits_{k \to 0} \frac{x}{k}$ untuk $x \in Z$, sehingga f tidak terbatas pada Z. Kemudian didefinisikan sebuah gauge η_ε pada $[a, b]$ oleh

$$\eta_\varepsilon(t) \coloneqq \begin{cases} \delta_\varepsilon, & \text{jika } t \in [a, b]\backslash Z \\ \varepsilon/\left(\left|\frac{x}{k}\right| \cdot 2^{k+1}\right), & \text{jika } t \in Z. \end{cases} \tag{2.3}$$

Jika partisi tag $\dot{\mathcal{Q}} \coloneqq \{([y_{i-1}, y_i], q_i)\}_{i=1}^n$ dari $[a, b]$ adalah bersubordinasi terhadap η_ε, maka kontribusi dari subinterval-subinterval yang memuat tag-tag $q_i \in Z$ pada jumlah Riemann $S(f; \dot{\mathcal{Q}})$ adalah

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} f(q_i)(y_i - y_{i-1}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k} \cdot \frac{2 \cdot \varepsilon}{\left|\frac{x}{k}\right| \cdot 2^{k+1}} = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ adalah sebarang, maka kontribusi dari tag-tag demikian pada jumlah Riemann $S(f; \dot{\mathcal{Q}})$ adalah 0.

Kemudian untuk interval $[a, b]\backslash Z$ dimana fungsi f terbatas pada interval ini, jumlah Riemann $S(f; \dot{\mathcal{Q}})$ dari interval ini dapat diaproksimasi dengan memilih fungsi gauge δ_ε yang mengendalikan kehalusan subinterval-subinterval sedemikian sehingga $S(f; \dot{\mathcal{Q}})$ sangat dekat (menuju) ke suatu bilangan $L \in \mathbb{R}$.

Oleh karena itu, suatu fungsi f pada $[a, b]$ dimana f tidak terbatas pada suatu himpunan terhitung (*countable*) $Z \subset [a, b]$ dapat terintegralkan; dalam hal ini $f \in \mathcal{R}^*([a, b])$. □

Pada Contoh 2.1 sebelumnya telah ditunjukkan dua contoh fungsi yang terintegralkan Riemann *Diperumum*, sedemikian sehingga tidak terintegralkan Riemann. Fungsi-fungsi yang terintegralkan ini memiliki karakteristik pada interval yang didefinisikan, yakni nilai dari fungsi ini pada suatu himpunan (null) bagian Z dari interval $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ mempunyai kontribusi sama dengan nol terhadap jumlah Riemann dengan titik tag partisi berasal dari Z.

Teorema 2.4 [General Integral Theorem] *Misalkan $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ dan didefinisikan sebuah fungsi $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Jika terdapat sebuah himpunan null $Z \subset [a,b]$ sedemikian sehingga f kontinu pada $[a,b] \backslash Z$, maka fungsi f terintegralkan (Riemann Diperumum) pada $[a,b]$.*

Bukti. Kasus (i) Jika $Z = \emptyset$, maka oleh Teorema 1.8 integrasi fungsi kontinu dan Teorema 1.12, diperoleh bahwa f terintegralkan pada $[a,b]$.

Kasus (ii) Jika Z adalah himpunan terhitung (*countable*), dapat dipilih sebuah fungsi gauge pada $[a,b]$ yang mengendalikan suatu partisi tag $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ dari $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, yakni

$$\eta_\varepsilon(t) := \begin{cases} \delta_\varepsilon, & \text{jika } t \in [a,b] \backslash Z \\ \varepsilon/2^{n+2}, & \text{jika } t \in Z, \end{cases} \tag{2.4}$$

sedemikian sehingga jumlah Riemann dari f bersesuaikan terhadap partisi tag $\dot{\mathcal{P}}$ dengan tag $t \in Z$ sama dengan nol. Karena f kontinu pada $[a,b] \backslash Z$, maka oleh Teorema 1.8 integrasi fungsi kontinu dan Teorema 1.12, disimpulkan bahwa f terintegralkan pada $[a,b]$. ■

Teorema 2.5 (Teorema Dasar Kalkulus) *Misalkan terdapat sebuah himpunan terhitung **(countable)** U di $[a,b]$, dan fungsi-fungsi $f, F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga*

(a) *F adalah kontinu pada $[a,b]$.*

(b) *$F'(x) = f(x)$ untuk semua $x \in [a,b] \backslash U$.*

Maka $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$ dan

$$\int_a^b f = F(b) - F(a). \tag{2.5}$$

Bukti. Misalkan himpunan $U := \{c_1, c_2, \dots\}$ dan misalkan $f(c_k) := 0$. Maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, dapat dikonstruksi sebuah gauge δ_ε pada $[a,b]$ dengan menggunakan differensiabilitas F pada $[a,b] \backslash U$. Jika $q \in [a,b] \backslash U$, karena turunan $f(q) = F'(q)$ ada dan karena F kontinu pada $[a,b]$, terdapat $\delta_\varepsilon(q) > 0$ sedemikian sehingga jika $0 < |z - q| \leq \delta_\varepsilon(q)$, $z \in [a,b]$, maka

$$\left|\frac{F(z) - F(q)}{z - q} - f(q)\right| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Dengan mengalikan ketaksamaan ini dengan $|z - q|$, maka diperoleh

$$|F(z) - F(q) - f(q)(z - q)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon|z - q|$$

kapanpun $z \in [q - \delta_\varepsilon(q), q + \delta_\varepsilon(q)] \cap [a,b]$. Lebih lanjut, pilih $\delta_\varepsilon(c_k) > 0$ untuk $k = 1, 2, \dots$, sedemikian sehingga jika $|z - c_k| < \delta_\varepsilon(c_k)$ dan $z \in [a,b]$, maka

$$|F(z) - F(c_k)| < \varepsilon/2^{k+2}.$$

Sekarang misalkan $u, v \in [a,b]$ dengan $u < v$ dan $[u,v]$ memenuhi $q \in [u,v] \subseteq [q - \delta_\varepsilon(q), q + \delta_\varepsilon(q)]$. Dengan mengurangkan dan menambahkan bentuk $F(q) - f(q) \cdot q$ dan menggunakan ketaksamaan segitiga dan fakta bahwa $v - q \geq 0$ dan $q - u \geq 0$, maka

$$\begin{aligned} &|F(v) - F(u) - f(q)\,(v - u)| \\ &\leq |F(v) - F(q) - f(q)(v - q)| + |F(q) - F(u) - f(q)(q - u)| \\ &\leq \frac{1}{2}\varepsilon(v - q) + \frac{1}{2}\varepsilon(q - u) = \frac{1}{2}\varepsilon(v - u). \end{aligned}$$

Oleh karena itu, jika $q \in [u,v] \subseteq [q - \delta_\varepsilon(q), q + \delta_\varepsilon(q)]$, maka diperoleh

$$|F(v) - F(u) - f(q)\,(v - u)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon(v - u).$$

Sekarang ditunjukkan bahwa $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$ dengan integral sebagai deret teleskopis

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} \{F(y_i) - F(y_{i-1})\}.$$

Kemudian jika $\dot{Q} \coloneqq \{([y_{i-1}, y_i], q_i)\}_{i=1}^{n}$ adalah sebuah partisi tag dari $[a,b]$ yang bersubordinasi terhadap δ_ε dan mempunyai tag $q_i = c_k$, maka

$$\begin{aligned} &|F(y_i) - F(y_{i-1}) - f(c_k)\,(y_i - y_{i-1})| \\ &\le |F(y_i) - F(c_k)| + |F(c_k) - F(y_{i-1})| + |f(c_k)\,(y_i - y_{i-1})| \\ &< \varepsilon/2^{k+2} + \varepsilon/2^{k+2} + 0 = \varepsilon/2^{k+1}. \end{aligned}$$

Karena tiap titik di U dapat menjadi tag di paling banyak dua subinterval di $\dot{Q}$, maka

$$\begin{aligned} \left|F(b) - F(a) - S(f;\dot{\mathcal{P}})\right| &= \left|\sum_{q_i \in U} \{F(y_i) - F(y_{i-1}) - f(c_k)\,(y_i - y_{i-1})\}\right| \\ &\le \textstyle\sum_{q_i \in U} |F(y_i) - F(y_{i-1}) - f(c_k)(y_i - y_{i-1})| \\ &< \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Lebih lanjut, jika $\dot{Q} \coloneqq \{([y_{i-1}, y_i], q_i)\}_{i=1}^{n}$ adalah sebuah partisi tag dari $[a,b]$ yang bersubordinasi terhadap δ_ε dan mempunyai tag $q_i \notin U$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \left|F(b) - F(a) - S(f;\dot{\mathcal{P}})\right| &= \left|\sum_{q_i \notin U} \{F(y_i) - F(y_{i-1}) - f(q_i)\,(y_i - y_{i-1})\}\right| \\ &\le \textstyle\sum_{q_i \notin U} |F(y_i) - F(y_{i-1}) - f(q_i)(y_i - y_{i-1})| \\ &\le \textstyle\sum \frac{1}{2}\varepsilon\,(y_i - y_{i-1}) = \frac{1}{2}\varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Oleh karena itu, jika $\dot{Q} \coloneqq \{([y_{i-1}, y_i], q_i)\}_{i=1}^{n}$ adalah sebuah partisi tag dari $[a,b]$ yang bersubordinasi terhadap δ_ε, maka diperoleh

$$\begin{aligned} \left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \big(F(b) - F(a)\big)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} \{f(q_i)\,(y_i - y_{i-1}) - \big(F(y_i) - F(y_{i-1})\big)\}\right| \\ &\le \textstyle\sum_{i=1}^{n} \left|f(q_i)\,(y_i - y_{i-1}) - \big(F(y_i) - F(y_{i-1})\big)\right| \\ &\le \tfrac{1}{2}\varepsilon(b-a) + \varepsilon < \varepsilon(b-a+1). \end{aligned}$$

Karena hasil ini berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka disimpulkan bahwa $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$ dan persamaan (2.5) terbukti. ■

Contoh 2.6

(a) *Tinjau fungsi Dirichlet f pada $[-a,a]$ dengan $a > 0$ seperti pada persamaan* (2.1), *yang didefinisikan sebagai $f(x) \coloneqq 1$ untuk $x \in \mathbb{Q} \cap [-a,a]$ dan $f(x) \coloneqq 0$ untuk $x \in [-a,a] \backslash \mathbb{Q}$.*

Misalkan fungsi $F(x) \coloneqq 0\ \forall x \in [-a,a]$. Maka, diperoleh bahwa fungsi F kontinu pada $[-a,a]$ dan $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [-a,a] \backslash \mathbb{Q}$. Dengan demikian telah diperoleh sebuah himpunan terhitung (*countable*) $U \coloneqq \mathbb{Q} \cap [-a,a]$. Oleh karena itu, dengan menerapkan Teorema Dasar Kalkulus 2.5, maka disimpulkan bahwa fungsi $f \in \mathcal{R}^*([-a,a])$, dan

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = F(1) - F(0) = 0. \qquad \square$$

(b) *Tinjau fungsi $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan sebagai*

$$g(x) \coloneqq \begin{cases} n, & \text{jika x} \coloneqq \text{m/n di } [0,1] \text{ dengan m, n} \in \mathbb{N} \text{ relatif prima} \\ 0, & \text{jika x adalah 0 atau bilangan irrasional di } [0,1]. \end{cases}$$

Misalkan fungsi $G(x) \coloneqq 0\ \forall x \in [0,1]$, sehingga G kontinu pada $[0,1]$. Lebih lanjut, diperoleh bahwa $G'(x) = g(x)\ \ \forall x \in [0,1] \backslash \{x \coloneqq m/n \in (0,1] : m, n \in \mathbb{N}\}$ dan himpunan terhitung $U \coloneqq \{x \coloneqq m/n \in (0,1] : m, n \in \mathbb{N}\} \cap [0,1]$. Oleh karena itu, dengan menerapkan Teorema Dasar Kalkulus 2.5, maka disimpulkan bahwa fungsi $g \in \mathcal{R}^*([0,1])$, dan

$$\int_0^1 g(x)\, dx = G(1) - G(0) = 0.$$

□

2.7 Teorema Perkalian

Pada teori Integrasi Riemann, jika $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ maka fungsi $fg \in \mathcal{R}([a,b])$. Namun, hasil ini tidak selalu benar untuk fungsi-fungsi yang terintegralkan Riemann *Diperumum*; yakni jika $f, g \in \mathcal{R}^*([a,b])$, maka fungsi fg tidak selalu berada di $\mathcal{R}^*([a,b])$.

Sebagai contoh, tinjau fungsi $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan nilai-nilai fungsi: $\frac{(-1)\cdot 2}{\sqrt{1}}, \frac{(-1)^2\cdot 2^2}{\sqrt{2}}, \frac{(-1)^3\cdot 2^3}{\sqrt{3}}$, ... pada interval-interval $\left[0, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$, ... Lebih lanjut, misalkan $c_n \coloneqq 1 - 1/2^n$ untuk $n = 0, 1, ...$, maka

$$\varphi(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{(-1)^n 2^n}{\sqrt{n}}, & c_{n-1} \le x < c_n \\ 0, & x = 1. \end{cases} \tag{2.6}$$

Maka, jelas bahwa fungsi apit φ terhadap tiap interval $[0, \gamma]$ untuk $\gamma \in (0,1)$ adalah sebuah fungsi tangga, yang oleh karenanya terintegralkan. Jika $\gamma \in [c_n, c_{n+1})$, maka

$$\begin{aligned} \int_0^\gamma \varphi &= \left(\frac{(-1)\cdot 2}{\sqrt{1}}\right)\cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{(-1)^2\cdot 2^2}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \left(\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{\sqrt{n}}\right)\cdot\left(\frac{1}{2^n}\right) + s_\gamma \\ &= \frac{(-1)}{\sqrt{1}} + \frac{(-1)^2}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + s_\gamma = \sum_{n=1}^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + s_\gamma, \end{aligned}$$

dimana $|s_\gamma| \le |x_{n+1}|$.

Karena deret ini adalah sebuah deret alternating sehingga konvergen, maka diperoleh $s_\gamma \longrightarrow 0$, sehingga

$$\int_0^1 \varphi = \lim_{\gamma \to 1-} \int_0^\gamma \varphi = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = A \in \mathbb{R}.$$

Lebih lanjut, dengan meninjau fungsi $\varphi^2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dengan fungsi φ pada (2.6), maka

$$\varphi^2(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{1}{n}, & c_{n-1} \le x < c_n \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Sehingga diperoleh

$$\int_0^1 \varphi^2 = \lim_{\gamma \to 1-} \int_0^\gamma \varphi^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^n \frac{1}{n} \ne B \in \mathbb{R},$$

dimana deret ini adalah sebuah deret yang tidak konvergen (divergen). Oleh karena itu, telah diperoleh sebuah contoh fungsi $\varphi \in \mathcal{R}^*([a,b])$ dimana $\varphi^2 \notin \mathcal{R}^*([a,b])$. □

Teorema Perkalian* **(a)** *Jika fungsi-fungsi f dan g adalah kontinu pada $[a,b]$, maka fungsi hasil kali $f \cdot g$ berada di $\mathcal{R}^*([a,b])$.*
(b) *Jika $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$ dan jika g adalah sebuah fungsi monoton pada $[a,b]$, maka hasil kali $f \cdot g$ berada di $\mathcal{R}^*([a,b])$.*

Bukti. **(a)** Karena f dan g kontinu pada $[a,b]$, maka fungsi hasil kali $f \cdot g$ juga kontinu pada $[a,b]$. Lebih lanjut, fungsi ini adalah terbatas pada $[a,b]$. Sehingga oleh Teorema 1.8 dan Teorema 1.12, fungsi ini juga terintegralkan pada $[a,b]$, yakni $fg \in \mathcal{R}^*([a,b])$.

(b) Jika fungsi $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$, maka terdapat bilangan $K \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\forall\, \varepsilon > 0$ terdapat sebuah gauge $\eta'_{\varepsilon/2}$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}_1 \coloneqq \{(I_i,\ t_i)\}_{i=1}^{n_1}$ adalah sebuah partisi tag dari $[a,b]$ yang bersubordinasi terhadap $\eta'_{\varepsilon/2}$, maka

$$\left|S\left(f;\dot{\mathcal{P}}\right) - K\right| < \varepsilon.$$

Jika fungsi g adalah monoton pada $[a,b]$, maka Teorema 1.9 dan Teorema Konsistensi 1.12 mengakibatkan fungsi $g \in \mathcal{R}^*([a,b])$. Oleh karena itu, terdapat bilangan $L \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\forall\, \varepsilon > 0$ terdapat sebuah gauge $\eta''_{\varepsilon/2}$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}_2 \coloneqq \{(J_i,\ q_i)\}_{i=1}^{n_2}$ adalah suatu partisi tag dari $[a,b]$ yang bersubordinasi terhadap $\eta''_{\varepsilon/2}$, maka

$$\left|S\left(g;\dot{\mathcal{P}}\right) - L\right| < \varepsilon.$$

Dalam hal ini, $K \coloneqq \int_a^b f$ dan $L \coloneqq \int_a^b g$.

Sekarang, didefinisikan sebuah gauge $\eta_\varepsilon \coloneqq \min\left\{\eta'_{\varepsilon/2}, \eta''_{\varepsilon/2}\right\}$ pada $[a,b]$ dan misalkan $\dot{\mathcal{P}}$ adalah suatu partisi tag dari $[a,b]$ yang bersubordinasi terhadap η_ε. Lebih lanjut, tinjau jumlah Riemann fungsi $f \cdot g$ terhadap partisi tag $\dot{\mathcal{P}}$,

$$S\left(fg;\dot{\mathcal{P}}\right) = \textstyle\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, g(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Karena fungsi g adalah monoton pada $[a,b]$, maka dari tag-tag t_i terdapat sebuah tag t_c, sedemikian sehingga $g(t_c)$ memenuhi

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, g(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, g(t_c)(x_i - x_{i-1}) \qquad (2.7)$$

Oleh karena itu, terdapat bilangan $M \in \mathbb{R}$ dengan $M \coloneqq g(t_c) \cdot K$, sedemikian sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}$ adalah sebuah partisi dari $[a,b]$ yang bersubordinasi terhadap η_ε, maka

$$\begin{aligned}\left|S\left(fg;\dot{\mathcal{P}}\right) - g(t_c)\cdot K\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\, g(t_c)(x_i - x_{i-1}) - g(t_c)\cdot K\right| \\ &= |g(t_c)|\left|\textstyle\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,(x_i - x_{i-1}) - K\right| \\ &< |g(t_c)|\cdot\varepsilon.\end{aligned}$$

Namun, karena $\varepsilon > 0$ adalah sebarang, maka disimpulkan bahwa fungsi hasil kali $fg \in \mathcal{R}^*([a,b])$ dengan integral $M \coloneqq g(t_c)\cdot K$. ■

Contoh 2.8 *Misalkan fungsi* $g :\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *didefinisikan sebagai* $g(x) \coloneqq x$ *dan didefinisikan fungsi* $f :\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *sebagai*

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} n, & x = 2/n\,, n \in \mathbb{N} \\ 0, & x \text{ lainnya.}\end{cases}$$

Dari Contoh 2.1(b), telah ditunjukkan bahwa fungsi f ini adalah terintegralkan. Kemudian jelas bahwa fungsi $g(x) \coloneqq x$ adalah monoton pada $[0,1]$. Sekarang, tinjau fungsi hasil kali $f \cdot g$ yang didefinisikan pada $[0,1]$ sebagai

$$h \coloneqq fg = \begin{cases} nx, & x = 2/n\,, n \in \mathbb{N} \\ \ 0, & x \text{ lainnya.}\end{cases}$$

Sehingga diperoleh fungsi $h \coloneqq fg = n\cdot f$ dengan $n \in \mathbb{N}$. Oleh karena itu, dengan menerapkan Teorema 1.13, maka disimpulkan bahwa fungsi hasil kali $fg \in \mathcal{R}^*([a,b])$. □

Teorema 2.9 (Komposisi) *Misalkan fungsi* $f :\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *dengan* $f([a,b]) \subseteq [c,d]$. *Jika fungsi* $\varphi :\ [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *memenuhi: terdapat sebuah himpunan null* $Z \subset [c,d]$ *sedemikian sehingga* φ *tidak terbatas dan tidak kontinu pada* Z, *maka fungsi komposisi* $\varphi \circ f$ *adalah terintegralkan, yakni berada di* $\mathcal{R}^*([a,b])$.

Bukti. Jika $f([a,b]) \subseteq [c,d]$ dan fungsi $\varphi : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ memenuhi: terdapat sebuah himpunan null $Z \subset [c,d]$ sedemikian sehingga φ tidak terbatas atau tidak kontinu pada Z, maka dari kesimpulan *Keterbatasan* 2.3 dan Teorema 2.4 diperoleh bahwa fungsi komposisi $\varphi \circ f$ adalah terintegralkan, yakni berada di $\mathcal{R}^*([a,b])$.

■

Teorema 2.10 (Uji Perbandingan) *Jika fungsi-fungsi $f, \omega \in \mathcal{R}^*([a,b])$ dan $|f(x)| \leq \omega(x)$ untuk semua $x \in [a,b]$, maka $|f| \in \mathcal{R}^*([a,b])$ dan*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \leq \int_a^b \omega. \tag{2.8}$$

Bukti. Jika $f, \omega \in \mathcal{R}^*([a,b])$, oleh Definisi 1.10, terdapat $K, M \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk $\varepsilon > 0$, terdapat sebuah gauge $\eta_\varepsilon := \delta_{\varepsilon/2}$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga jika $\dot{\mathcal{Q}} := \{([y_{i-1}, y_i], q_i)\}_{i=1}^n$ adalah suatu partisi tag dari $[a,b]$ yang bersubordinasi terhadap η_ε maka

$$\left|S(f;\dot{\mathcal{Q}}) - K\right| < \varepsilon \quad \text{dan} \quad \left|S(\omega;\dot{\mathcal{Q}}) - M\right| < \varepsilon.$$

Dalam hal ini $K := \int_a^b f$ dan $M := \int_a^b \omega$.

Kemudian tinjau jumlah Riemann fungsi $|f|$ terhadap partisi tag $\dot{\mathcal{Q}}$ yang bersubordinasi terhadap η_ε. Karena $f(x) \leq |f(x)| \leq \omega(x)\ \forall x \in [a,b]$, maka

$$S(f;\dot{\mathcal{Q}}) \leq S(|f|;\dot{\mathcal{Q}}) \leq S(\omega;\dot{\mathcal{Q}})$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n f(q_i)(y_i - y_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n |f(q_i)|(y_i - y_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^n \omega(q_i)(y_i - y_{i-1})$$

$$\Leftrightarrow K \leq \sum_{i=1}^n |f(q_i)|(y_i - y_{i-1}) \leq M.$$

Dari hasil ini, maka diperoleh bahwa deret $\sum_{i=1}^n |f(q_i)|(y_i - y_{i-1})$ adalah sebuah deret dari barisan bilangan-bilangan positif dan juga deret yang terbatas, sehingga konvergen. Oleh karena itu, terdapat $L \in \mathbb{R}$ dan $K \leq L \leq M$ sehingga $\sum_{i=1}^n |f(q_i)|(y_i - y_{i-1}) = L$, yang mengakibatkan bahwa $|f| \in \mathcal{R}^*([a,b])$; dalam hal ini $L := \int_a^b |f|$.

Sekarang ditunjukkan bahwa ketaksamaan (2.8) terpenuhi. Karena $-|f| \leq f \leq |f|$ dan karena $f, |f| \in \mathcal{R}^*([a,b])$, maka diperoleh $-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$, yakni $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$. Oleh asumsi bahwa $|f(x)| \leq \omega(x)\ \forall x \in [a,b]$ dan karena $\omega \in \mathcal{R}^*([a,b])$, maka diperoleh $\int_a^b |f| \leq \int_a^b \omega$. Oleh karena itu, dengan menggabungkan kedua hasil ini, maka diperoleh ketaksamaan (2.8) terpenuhi. ■

Teorema 2.11 *Asumsikan bahwa U adalah sebuah himpunan bagian terhitung (countable) dari $[a,\infty)$ dan misalkan fungsi-fungsi $f, F : [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga:*

(a) *F kontinu pada $[a,\infty)$ dan $\lim_{x\to\infty} F(x)$ ada.*

(b) *$F'(x) = f(x)$ untuk semua $x \in (a,\infty)$, $x \notin U$.*

Maka $f \in \mathcal{R}^*([a,\infty))$ dan

$$\int_a^\infty f = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a). \tag{2.9}$$

Bukti. Ambil $c \in (a,\infty)$. Dengan menerapkan Teorema Dasar Kalkulus 2.5 pada fungsi-fungsi $f, F : [a,c] \longrightarrow \mathbb{R}$, maka disimpulkan bahwa fungsi $f \in \mathcal{R}^*([a,c])$ dan

$$\int_a^c f = F(c) - F(a).$$

Jika dipilih $c \longrightarrow \infty$ dan karena $f \in \mathcal{R}^*([a,c])\ \forall\ c \in (a,\infty)$, maka diperoleh $f \in \mathcal{R}^*([a,\infty))$ dan

$$\int_a^\infty f = \lim_{c\to\infty} \int_a^c f.$$

Sehingga

$$\int_a^\infty f = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a),$$

dan asersi dari teoremanya terbukti. ■

Contoh 2.12 *Misalkan fungsi f kontinu pada $[1,\infty)$ dan memenuhi $|f(x)| \le K/x^2$ untuk $x \in [1,\infty)$, maka fungsi $f, |f| \in \mathcal{R}^*([1,\infty))$.*

Tinjau fungsi $g(x) \coloneqq K/x^2$ dan misalkan fungsi $G(x) \coloneqq -K/x$. Sehingga diperoleh fungsi G kontinu pada $[1,\infty)$ dan $G'(x) = g(x)\ \forall\ x \in [1,\infty)$. Lebih lanjut, diperoleh bahwa

$$\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} -K/x = 0 \quad \text{(ada)}.$$

Oleh karena itu, dengan menerapkan Teorema Dasar kalkulus 2.11, maka disimpulkan bahwa $g \in \mathcal{R}^*([1,\infty))$ dan

$$\int_1^\infty g = \lim_{x\to\infty} G(x) - G(1) = 0 - (-K) = K.$$

Lebih lanjut, karena $g(x) \coloneqq C/x^2 \ge 0\ \forall\ x \in [1,\infty)$, maka

$$\int_1^\infty |g| = \int_1^\infty g = K,$$

sehingga $g, |g| \in \mathcal{R}^*([1,\infty))$.

Sekarang karena f kontinu pada $[1,\infty)$ dan memenuhi $|f(x)| \le K/x^2$ untuk $x \in [1,\infty)$, maka fungsi $f \in \mathcal{R}^*([1,\infty))$. Oleh karena itu, dengan menerapkan Uji Perbandingan 2.10 terhadap fungsi f dan g ini, maka disimpulkan bahwa $f, |f| \in \mathcal{R}^*([1,\infty))$. □

Teorema 2.13 *Asumsikan bahwa U adalah sebuah himpunan bagian terhitung (countable) dari $(-\infty,b]$ dan misalkan fungsi-fungsi $g, G :\ (-\infty,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga:*

(a) *G kontinu pada $(-\infty,b]$ dan $\lim_{x\to-\infty} G(x)$ ada.*

(b) *$G'(x) = g(x)$ untuk semua $x \in (-\infty,b)$, $x \notin U$.*

Maka $g \in \mathcal{R}^*((-\infty,b])$ dan

$$\int_{-\infty}^b g = G(b) - \lim_{x\to-\infty} G(x). \tag{2.10}$$

Bukti. Ambil $\gamma \in (-\infty,b)$. Dengan menerapkan Teorema Dasar Kalkulus 2.5 pada fungsi-fungsi $g, G :\ [\gamma,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, maka disimpulkan bahwa fungsi $g \in \mathcal{R}^*([\gamma,b])$ dan

$$\int_\gamma^b g = G(b) - G(\gamma).$$

Jika dipilih $\gamma \longrightarrow -\infty$ dan karena $g \in \mathcal{R}^*([\gamma,b])\ \ \forall\ \gamma \in (-\infty,b)$, maka diperoleh $g \in \mathcal{R}^*((-\infty,b])$ dan

$$\int_{-\infty}^b g = \lim_{\gamma\to-\infty} \int_\gamma^b g.$$

Oleh karena itu, maka diperoleh

$$\int_{-\infty}^b g = \lim_{x\to-\infty} G(b) - G(x),$$

dan asersi dari teoremanya telah terbukti. ■

Teorema 2.14 *Asumsikan bahwa U adalah sebuah himpunan bagian terhitung(countable) dari $(-\infty,\infty)$ dan misalkan fungsi-fungsi $h, H : (-\infty,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga:*

(a) *H kontinu pada $(-\infty,\infty)$ dan $\lim_{x\to\pm\infty} H(x)$ ada.*

(b) *$H'(x) = h(x)$ untuk semua $x \in (-\infty,\infty)$, $x \notin U$.*

Maka $h \in \mathcal{R}^*\big((-\infty,\infty)\big)$ dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} h = \lim_{x\to\infty} H(x) - \lim_{y\to-\infty} H(y) \qquad (2.11)$$

Bukti. Ambil $\gamma \in (-\infty,\infty)$ sehingga $(-\infty,\infty) = (-\infty,\gamma] \cup [\gamma,\infty)$. Dengan menerapkan Teorema Dasar Kalkulus untuk interval $(-\infty,\gamma]$ yang telah dibuktikan sebelumnya, maka diperoleh bahwa $h \in \mathcal{R}^*((-\infty,\gamma])$ dan

$$\int_{-\infty}^{\gamma} h = H(\gamma) - \lim_{y\to-\infty} H(y).$$

Lebih lanjut, dengan menerapkan Teorema Dasar Kalkulus untuk interval $[\gamma,\infty)$ yang telah dibuktikan sebelumnya, juga diperoleh bahwa $h \in \mathcal{R}^*([\gamma,\infty))$ dan

$$\int_{\gamma}^{\infty} h = \lim_{x\to\infty} H(x) - H(\gamma).$$

Karena $(-\infty,\infty) = (-\infty,\gamma] \cup [\gamma,\infty)$, dengan menerapkan Teorema Penjumlahan untuk $h \in \mathcal{R}^*((-\infty,\gamma])$ dan $h \in \mathcal{R}^*([\gamma,\infty))$, maka disimpulkan bahwa $h \in \mathcal{R}^*\big((-\infty,\infty)\big)$ dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} h = \int_{-\infty}^{\gamma} h + \int_{\gamma}^{\infty} h = \left(H(\gamma) - \lim_{y\to-\infty} H(y)\right) + \left(\lim_{x\to\infty} H(x) - H(\gamma)\right).$$
$$= \lim_{x\to\infty} H(x) - \lim_{y\to-\infty} H(y).$$

Oleh karena itu, asersi dari teoremanya telah terbukti. ■

Teorema 2.15 (Konvergensi Dominasi) *Misalkan (f_n) adalah sebuah barisan fungsi-fungsi di $\mathcal{R}^*(I)$ dan terdapat sebuah himpunan null $Z \subset I$ sedemikian sehingga $f(x) = \lim f_n(x)$ untuk semua $x \in I - Z$. Jika terdapat sebuah himpunan null $Y \subset I$ dan fungsi-fungsi $\alpha, \omega \in \mathcal{R}^*(I)$ sedemikian sehingga*

$$\alpha(x) \le f_n(x) \le \omega(x) \quad \text{untuk semua} \quad x \in I - Y,$$

maka $f \in \mathcal{R}^*(I)$ dan

$$\int_I f = \lim_{n\to\infty} \int_I f_n. \qquad (2.12)$$

Lebih lanjut, jika $|\alpha|$ dan $|\omega|$ adalah di $\mathcal{R}^*(I)$, maka $|f_n|$ dan $|f|$ adalah di $\mathcal{R}^*(I)$ dan

$$\int_I |f_n - f| \longrightarrow 0. \qquad (2.13)$$

Bukti. Misalkan $\dot{\mathcal{P}} \coloneqq \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{k}$ adalah suatu partisi tag dari I yang bersubordinasi terhadap sebuah gauge η_ε dan misalkan himpunan $Y, Z \subset I$ adalah himpunan-himpunan null. Maka himpunan $Y \cup Z$ adalah sebuah himpunan null. Klaim bahwa kontribusi dari partisi-partisi dengan tag $t_i \in Y \cup Z$ terhadap jumlah Riemann $S\big(f;\dot{\mathcal{P}}\big)$ adalah sama dengan 0. Hasil ini dapat diperoleh, dengan memilih gauge η_ε yang didefinisikan pada $\{Y \cup Z\} \subset I$ sebagai:

$$\eta_{\varepsilon/2}(t) \coloneqq \varepsilon/(M \cdot 2^{n+1}),$$

yakni untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka

$$0 \le S\big(f;\dot{\mathcal{P}}\big) < \sum_{n=1}^{\infty} M \cdot 2\varepsilon/(M \cdot 2^{n+1}) = \varepsilon.$$

Sekarang, jika $f_n(x) \longrightarrow f(x)\ \forall x \in I - Z$, maka $\forall \varepsilon > 0$ dan untuk tiap $x \in I - Z$ terdapat sebuah bilangan asli $N \coloneqq N(\varepsilon, x)$ sedemikian sehingga jika $m, n \in \mathbb{N}$ dan $m, n \geq N$, maka

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -2\varepsilon < f_n(x) - f_m(x) < 2\varepsilon.$$

Oleh asumsi bahwa $(f_n) \in \mathcal{R}^*(I)$, maka untuk partisi $\dot{\mathcal{P}}_n \coloneqq \{(I_{n,i}, t_i)\}_{i=1}^{k}$ dari I yang bersubordinasi terhadap gauge $\eta_{n,\varepsilon}$, terdapat sebuah bilangan $L > 0$ sedemikian sehingga

$$\sum_{i=1}^{k} x_i - x_{i-1} \leq L.$$

Sehingga jika $m, n \geq N$, maka

$$\left|S(f_n; \dot{\mathcal{P}}) - S(f_m; \dot{\mathcal{P}})\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |f_n(t_i) - f_m(t_i)|(x_i - x_{i-1}) < (2 \cdot \varepsilon)L. \tag{2.14}$$

Jika dipilih $m \longrightarrow \infty$ pada ketaksamaan (2.14), maka

$$\left|S(f_n; \dot{\mathcal{P}}) - S(f; \dot{\mathcal{P}})\right| < 2 \cdot \varepsilon \cdot L \quad \text{untuk} \quad n \geq N.$$

Kemudian jika terdapat sebuah himpunan null $Y \subset I$ dan fungsi-fungsi $\alpha, \omega \in \mathcal{R}^*(I)$ sedemikian sehingga $\alpha(x) \leq f_n(x) \leq \omega(x)\ \forall x \in I - Y$, maka

$$\int_I \alpha(x) \leq \int_I f_n(x) \leq \int_I \omega(x) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

Lebih lanjut, jika $m, n \geq N$ maka diperoleh

$$-(2 \cdot \varepsilon)L < \int_I f_n - \int_I f_m < (2 \cdot \varepsilon)L. \tag{2.15}$$

Karena $\varepsilon > 0$ adalah sebarang, maka $\left(\int_I f_n\right)$ adalah sebuah barisan Cauchy sehingga konvergen ke suatu bilangan $A \in \mathbb{R}$. Jika dipilih $n \longrightarrow \infty$ pada ketaksamaan (2.15), maka

$$\left|\int_I f_m - A\right| < 2 \cdot \varepsilon \cdot L \quad \text{untuk} \quad m \geq N_\varepsilon.$$

Sekarang ditunjukkan bahwa $f \in \mathcal{R}^*(I)$ dengan integral A. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, jika $\dot{\mathcal{P}}$ adalah sebuah partisi tag dari I yang bersubordinasi terhadap η_ε dan $n \geq N$, maka

$$\begin{aligned} \left|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - A\right| &\leq \left|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f_n; \dot{\mathcal{P}})\right| + \left|S(f_n; \dot{\mathcal{P}}) - S(f_m; \dot{\mathcal{P}})\right| + \\ &\quad \left|S(f_m; \dot{\mathcal{P}}) - \int_I f_m\right| + \left|\int_I f_m - A\right| \\ &< 2 \cdot \varepsilon \cdot L + 2 \cdot \varepsilon \cdot L + \varepsilon + 2 \cdot \varepsilon \cdot L = \varepsilon(1 + 6L), \end{aligned}$$

Karena $\varepsilon > 0$ adalah sebarang, maka disimpulkan bahwa $f \in \mathcal{R}^*(I)$ dengan $\int_I f = A$ dan persamaan (2.13) terpenuhi.

Sekarang, karena $f_n, f \in \mathcal{R}^*(I)$, maka fungsi $f_n - f \in \mathcal{R}^*(I)$. Lebih lanjut, karena $\alpha(x) \leq f_n(x) \leq \omega(x)\ \forall n \in \mathbb{N}$ dan $\forall x \in I - Y$, maka $|f_n - f| \leq |\omega - \alpha|$. Sehingga karena $|\alpha|, |\omega| \in \mathcal{R}^*(I)$, maka oleh teorema Uji Perbandingan 2.10 diperoleh bahwa fungsi $|f_n - f| \in \mathcal{R}^*(I)$. Oleh karena itu, disimpulkan bahwa fungsi-fungsi $|f_n|, |f| \in \mathcal{R}^*(I)$. Karena kontribusi dari partisi-partisi dengan tag $q_i \in Y \cup Z$ terhadap jumlah Riemann $S(f_n; \dot{\mathcal{P}})$ dan $S(f; \dot{\mathcal{P}})$ adalah sama dengan 0, dan karena $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in I - Z$ dan untuk $n \geq N$, maka

$$\int_I |f_n - f| < \varepsilon \cdot L.$$

Dengan demikian, karena $\varepsilon > 0$ adalah sebarang, maka disimpulkan

$$\int_I |f_n - f| \longrightarrow 0. \qquad \blacksquare$$

Contoh 2.16 *Misalkan untuk bilangan-bilangan rasional di* $[0,1]$ *dienumerasi sebagai* $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Kemudian didefinisikan sebuah barisan fungsi-fungsi* (f_n) *pada* $[0,1]$ *sebagai*

$$f_n(x) := \begin{cases} 1, & \text{jika } x \in \{r_1, r_2, \ldots, r_n\} \\ 0, & \text{jika } x \in [0,1] \backslash \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}. \end{cases}$$

Karena tiap fungsi f_n mempunyai titik-titik diskontinu fungsi hanya pada sebuah himpunan null, yakni himpunan null $Z_n \subseteq \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ untuk tiap $n \in \mathbb{N}$, maka dari Teorema 2.4 diperoleh bahwa fungsi f_n adalah terintegralkan sehingga $(f_n) \in \mathcal{R}^*([0,1])$. Kemudian diperoleh bahwa barisan (f_n) konvergen ke sebuah fungsi Dirichlet f yang didefinisikan sebagai:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{jika } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{jika } x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Sekarang, jika diambil fungsi-fungsi $\alpha(x) := 0$ dan $\omega(x) := 1$ pada $[0,1]$ maka diperoleh $\alpha(x) \leq f_n(x) \leq \omega(x)\ \forall x \in [0,1]$. Lebih lanjut, karena fungsi α dan ω adalah fungsi-fungsi kontinu, maka diperoleh $\alpha, \omega \in \mathcal{R}^*([0,1])$.

Oleh karena itu, dengan semua kriteria-kriteria diatas yang dipenuhi oleh barisan fungsi-fungsi (f_n) ini, maka dengan menerapkan Teorema Konvergensi Dominasi 2.15, disimpulkan bahwa fungsi limit $f(x) := \lim f_n(x)$ adalah terintegralkan, dan dari hasil pada Contoh 2.1(a), maka

$$\int_0^1 f = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n.$$

Sekarang, karena fungsi $\alpha, \omega \in \mathcal{R}^*([0,1])$ adalah fungsi-fungsi nonnegatif, maka diperoleh fungsi $|\alpha|, |\omega| \in \mathcal{R}^*([0,1])$. Oleh karena itu, dengan menerapkan Teorema Konvergensi Dominasi 2.15 maka disimpulkan bahwa fungsi-fungsi $|f_n|, |f| \in \mathcal{R}^*([0,1])$ dan

$$\int_0^1 |f_n - f| \longrightarrow 0. \qquad \square$$

3. Kesimpulan

Fungsi-fungsi yang didefinisikan pada suatu interval $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ yang terintegralkan (Riemann *Diperumum*) sedemikian sehingga tidak terintegralkan Riemann memiliki bentuk umum fungsi sebagai:

$$f(x) := \begin{cases} \text{kontinu}, & \text{jika } x \in [a,b] \backslash Z \\ \text{diskontinu}, & \text{jika } x \in Z, \end{cases}$$

dengan $Z \subset [a,b]$ adalah suatu himpunan null. Sebuah fungsi tidak terbatas f pada $[a,b]$ dapat terintegralkan (fungsi $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$), jika himpunan $Z \subset [a,b]$ dimana f tidak terbatas di $x \in Z$ adalah sebuah himpunan terhitung (*countable*). Kesimpulan ini kemudian dapat diperluas ke interval tidak berhingga, yakni suatu fungsi yang didefinisikan pada interval tidak berhingga dapat terintegralkan (Riemann *Diperumum*) sedemikian sehingga tidak terintegralkan Riemann, jika himpunan-himpunan titik-titik diskontinu dan tidak terbatas dari fungsi adalah suatu himpunan null. Lebih lanjut, barisan fungsi-fungsi yang terintegralkan pada suatu interval $I \subseteq \mathbb{R}$ yang konvergen ke sebuah fungsi pada I, memenuhi bahwa fungsi limit ini adalah terintegralkan jika memenuhi adanya fungsi dominasi terintegralkan.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Axler, S., 2020. *Measure, Integration & Real Analysis.* SpringerOpen, Switzerland.
[2] Bartle, R.G. &, Sherbet D.R., 2011. *Introduction to Real Analysis*, Fourth Edition. John Wiley & Sons, Inc., Urbana, Illinois.

[3] Fikri M, Samsurizal, Makkulau A, 2021. Perbandingan Penyelesaian Integral Riemann, Lebesgue dan HK Berdasarkan Definisi. *Limits: Journal of Mathematics and Its Applications*, Vol. 18, No. 2, 169-186.
[4] Fonda, A., 2018. *The Kurzweil-Henstock Integral for Undergraduates: A Promenade Along the Marvelous Theory of Integration*. Birkhäuser, Switzerland.
[5] Julia, A., 2019. A Henstock-Kurzweil Type Integral On 1-Dimensional Integral Currents. *arXiv preprint arXiv:1905.03382*.
[6] Kurtz, D.S. & Swartz, C.W., 2012. *THEORIES OF INTEGRATION: The Integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and McShane*, Second Edition. World Scientific, Singapore.
[7] Pruthi, A., 2020. Riemann Integral vs. Lebesgue Integral: A Perspective View. *Advances in Mathematics: Scientific Journal*, Vol. 9, No. 7, 4505-4512.