J M S K

E-ISSN: 2614-8811

JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA & KOMPUTASI

https://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk/index

Vol. 17, No. 2, 219-222, January, 2021

DOI: 10.20956/jmsk.v17i2.10991

Duality Property of Discrete Quaternion Fourier Transform

Dualitas pada Transformasi Fourier Quaternion Diskrit

Yudhiyanto Supriadi[1]*, Mawardi Bahri[2]* , Amir Kamal Amir[3]*

Abstract

We introduce the discrete quaternionic Fourier transform (QDFT), which is generalization of discrete Fourier transform. We establish the version discrete of duality property duality related to the QDFT.

Keywords: Discrete Fourier Transform, Quaternion, Discrete Quaternion Fourier Transform, Duality

Abstrak

Kami memperkenalkan Transformasi Fourier Quaternion Diskrit (TFQD) yang di mana TFQD memiliki sifat yang tidak komutatif terhadap operasi perkalian.. Dalam artikel ini akan memperkenalkan salah satu sifat yaitu sifat dualitas.

Kata kunci: Transformasi Fourier Diskrit, Quaternion, Transformasi Fourier Quaternion Diskrit, Dualitas

1. Pendahuluan

Quaternion merupakan kombinasi linear skalar riil dan tiga satuan imaginer ortogonal dengan koefisien riil yang dapat dituliskan sebagai

$$\mathbb{H} = \{q = q_0 + \boldsymbol{i}q_1 + \boldsymbol{j}q_2 + \boldsymbol{k}q_3 | q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$$

di mana $q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}$ dan elemen $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ adalah bilangan imajiner dengan memenuhi aturan perkalian Hamilton, yaitu

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -\mathbf{1}.$$

Untuk setiap $q \in \mathbb{H}$, boleh ditulis dalam bentuk

$$q = q_0 + \boldsymbol{q} = S(q) + V(q).$$

* *Program Studi Magister Matematika, FMIPA-UNHAS*

Email: [1]*yudhiyanto19@gmail.com*, [2]*mawardibahri@gmail.com*, [3]*amirkamalamir@yahoo.com*

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International License

Dalam hal ini $S(q)$ adalah bagian scalar $V(q) = \mathbf{i}\, q + \mathbf{j}\, q + \mathbf{k}\, q_k$ adalah bagian vektornya. Konyugat dari quaternion ditulis sebagai

$$\bar{q} = q_0 - \mathbf{i}\, q_i - \mathbf{j}\, q_j - \mathbf{k}\, q_k$$

memenuhi sifat

$$\overline{pq} = \bar{q}\bar{p}.$$

Sebarang $q \in \mathbb{H}$, berlaku sifat

$$q_0 = \frac{1}{2}(q + \bar{q}) \text{ and } \quad V(q) = \frac{1}{2}(q - \bar{q}).$$

The norma or modulus dari quaternion q dedefisikan sebagai

$$|q| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{q_0^2 + q_i^2 + q_j^2 + q_k^2}$$

Invers dari suatu quarternion q didefinisikan oleh

$$\boldsymbol{q^{-1}} = \frac{\bar{\boldsymbol{q}}}{|\boldsymbol{q}|^2}.$$

Telah diketahui bahwa transformasi Fourier telah umum digunakan untuk merubah sinyal dari domain waktu ke domain frekuensi di mana transformasi Fourier memetakan fungsi dari nilai riil ke kompleks. Transformasi Fourier dikenal sebagai alat yang handal untuk menganalisis sinyal termasuk untuk pengolahan citra. Penerapan transformasi Fourier quaternion juga dalam pengolanan cita berwarna telah dilakukan pada [5,7,8]. Berdasarkan quaternion diperoleh definisi transformasi Fourier quaternion diskrit berikut ini (lihat, sebagai contoh, [1, 2,3,4]).

Definisi 1. Diberikan sebuah sinyal diskrit 2D dari ukuran M x N dengan komponen $f(n,m) \in \mathbb{R}^2$. *Tranformasi Fourier Diskrit (TFD) dari* f *diberikan oleh*

$$F(u,v) = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{M-1} f(n,m)\, exp\left\{-2\pi i\left(\frac{nu}{N} + \frac{mv}{M}\right)\right\}, \quad i = \sqrt{-1}$$

invers TFD diberikan oleh

$$f(n,m) = \sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{M-1} F(u,v)\exp\left\{2\pi i\left(\frac{nu}{N} + \frac{mv}{M}\right)\right\}.$$

2. Transformasi Fourier Quaternion Diskrit

Berikut ini diperkenalkan tipe lain dari transformasi Fourier quaternion diskrit. Karena perkalian dari quaternion tidak komutatif diperoleh tiga jenis definisi dari transformasi Fourier quaternion diskrit berikut.

i. TFQD dua sisi

$$F_{L-R}^{q}(u,v) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-\mu 2\pi \frac{mu}{M}} f(m,n) e^{-\mu 2\pi \frac{nv}{N}}$$

ii. TFQD sisi kiri

$$F_L^q(u,v) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-\mu 2\pi\left(\frac{mv}{M}+\frac{nu}{N}\right)} f(m,n).$$

iii. TFQD sisi kanan

$$F_R^q(u,v) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\, e^{-\mu 2\pi\left(\frac{mv}{M}+\frac{nu}{N}\right)}.$$

Dengan invers masing-masing dari tipe TFQD yaitu:

i. ITFQD dua sisi

$$f(m,n) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} e^{\mu 2\pi\frac{mu}{M}}\, F_{L-R}^q(u,v) e^{\mu 2\pi\frac{nv}{N}}.$$

ii. ITFQD sisi kiri

$$f(m,n) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} e^{\mu 2\pi\left(\frac{mv}{M}+\frac{nu}{N}\right)} F_L^q(u,v).$$

iii. ITFQD sisi kanan

$$f(m,n) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} F_R^q(u,v)\, e^{\mu 2\pi\left(\frac{mv}{M}+\frac{nu}{N}\right)}.$$

Dalam hal ini μ adalah quaternion satuan murni yang memenuhi $\mu^2 = -1$.

3. Hasil dan Pembahasan

Berikut ini adalah hasil utama di dalam paper ini, yaitu sifat dualitas pada transformasi Fourier quaternion diskrit seperti ditunjukkan oleh teorema berikut (bandingkan dengan [6]).

Teorema 1. Jika $F_R^q(u,v)$ adalah tranformasi Fourier quaternion diskrit dari f maka

$$F_R^q\{F_R^q(u,v)\} = f(u,v).$$

Lebih lanjut diperoleh

$$F_R^q(u,v)\left\{F_R^q(u,v)\left\{F_R^q(u,v)\{\hat{F}_R^q(u,v)\}\right\}\right\} = f(u,v).$$

Bukti. Dari definisi tranformasi Fourier quaternion diskrit diperoleh

$$F_R^q(u,v)\{F_R^q(u,v)\} = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F_R^q(u,v)\, e^{\mu 2\pi\left(\frac{mv}{M}+\frac{nu}{N}\right)}.$$

Atau bisa dituliskan

$$F_R^q(u,v)\{F_R^q(u,v)\} = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} F_R^q(m,n)\, e^{\mu 2\pi\left(\frac{mv}{M}+\frac{nu}{N}\right)}$$
$$= f(-u,-v).$$

Ini berarti

$$F_R^q(u,v)\{F_R^q(-u,-v)\} = f(u,v)$$

Demikian pula

$$F_R^q(u,v)\left\{F_R^q(u,v)\{F_R^q(u,v)\}\right\} = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} f(-u,-v)\, e^{\mu 2\pi\left(\frac{mv}{M}+\frac{nu}{N}\right)}$$
$$= \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(-m,-n)\, e^{\mu 2\pi\left(\frac{mv}{M}+\frac{nu}{N}\right)}$$
$$= F_R^q(-u,-v),$$

maka

$$F_R^q(u,v)\left\{F_R^q(u,v)\{F_R^q(u,v)F_R^q(u,v)\}\right\} = F_R^q(u,v)\{F_R^q(-u,-v)\} = f(u,v).$$

4. Kesimpulan

Dalam tulisan ini telah dibukrikan teorema dualitas pada transformasi Fourier quaternion diskrit yang merupakan generalizasi dari sifat dualitas pada transformsi Fourier.

Daftar Pustaka

[1] Bahri, M, & Ashino, R. (2018). *Duality property of two-sided quaternion Fourier transform*, International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition (ICWAPR), Chendu, China

[2] Bahri, M., Hitzer, E., Hayashi, A. & Ashino, R. (2008). *An uncertainty principle for quaternion Fourier transform*, Comput. Math. Appl., vol. 15. No. 5, 2398-2410.

[3] Bahri, M, Azis, M.I, Lande, C. (2019). Discrete Double-Sided Quaternionic Fourier Transform and Application, J ournal of Physics: Conference Series, Vol. 1341, Issue 6.

[4] Bahri, M, & Surahman. (2013). *Discrete quaternion Fourier transform and properties*, Int. Journal of Math,Analysis. Vol. 7. No. 25, 1207-1215.

[5] Chen, B., Coatrieux, G., Shu, H. (2014). *Full 4-D Quaternion Discrete Fourier Transform Based Watermarking For Color Images*. Digital Signal Processing. Vol. 28. 106-119.

[6] Debnath, L. dan F.A. Shah. (2015). *Wavelet Transforms and Their Applications, second edition.* 164-169.

[7] Dubey. V. (2014). *Quaternion Fourier Transform for Colour Images*, International Journal of Computer Science and Information Technologies. Vol. 5(3). 4411-4416.

[8] Grigoryan, M.A. dan Agaian, S.S. (2016). *2-D Left-Side Quaternion Discrete Fourier Transform: Fast Algorithm.* Society for Imaging Science and Technology. doi: 10.2352/ISSN.2470-1173.2016.15.IPAS-192