JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA & KOMPUTASI
E-ISSN: 2614-8811
https://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk/index
Vol. 17, No. 3, 472-483, May, 2021
DOI: 10.20956/j.v17i3.13596

Partition Dimention of Dutch Windmill Graph

Dimensi Partisi Graf Kincir Angin Belanda

Hasmawati[1*], Budi Nurwahyu[2*], Ahmad Syukur Daming[3*], Amir Kamal Amir[4*]

Abstract

Let be a connected graph G and k-partition $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ of V(G) end $v \in V(G)$. The coordinat v to Π is $r(v|\Pi) = (d(v,S_1), d(v,S_2), \dots, d(v,S_k))$. If every two vertices is distinct $u, v \in V(G)$ applies $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$, then Π is a called $k-resolving$ partition of V(G). The minimum k for which k-resolving partition of V(G) is the partition dimension G and denoted with pd(G). In this paper, we investigates the partition dimension for a large Dutch windmill graph $Amal(C_n)_m$ for $m \geq 2$ and $n \geq 7$. We show that if $m \in \left[\frac{k^2-3k+4}{2}, \frac{k^2-k}{2}\right]$ for some $k \geq 5$, $pd(Amal(C_n)_m) = k$, for any $n \geq 4$.

Keywords: Partition Dimention, Amalgamation, Cycle Graph

Abstrak

Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dan k buah partisi $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ dari $V(G)$ dan $v \in V(G)$. Koordinat v terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = (d(v,S_1), d(v,S_2), \dots, d(v,S_k))$. Jika untuk setiap dua titik berbeda $u, v \in V(G)$ berlaku $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$, maka Π disebut k-partisi pembeda dari $V(G)$. Nilai minimum k agar terdapat k-partisi pembeda dari $V(G)$ adalah dimensi partisi dari G atau sering dinotasikan dengan $pd(G)$. Dalam makalah ini amalgamasi graf siklus disebut graf kincir angin Belanda dengan notasi $Amal(C_n)_m$ dan dimensi partisinya dinotasikan $pd(Amal(C_n)_m)$. Pada penelitian ini telah ditunjukkan bahwa untuk suatu $k \geq 3$, $pd(Amal(C_n)_m) = k$ untuk suatu bilangan positif $n > 4$ dan $m \in \left[\frac{k^2-3k+4}{2}, \frac{k^2-k}{2}\right]$.

Kata kunci: Dimensi Partisi, Amalgamasi, Graf Siklus.

1. Pendahuluan

Graf adalah pasangan himpunan terurut (V, E), dan ditulis dengan notasi $G = (V, E)$, dengan V adalah himpunan tidak kosong yang anggotanya disebut titik dan E adalah himpunan pasangan–pasangan tidak terurut dari anggota V yang disebut sisi. Salah satu kajian dalam teori graf yang mendapat perhatian dari beberapa peneliti adalah dimensi partisi (*partition dimension*). Dimensi partisi pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk [4]. Mereka mengelompokkan semua titik di G ke dalam sejumlah kelas partisi dan menentukan jarak setiap titik terhadap setiap kelas partisi tersebut.

**Department of Mathematics, Hasanuddin University, Indonesia*
Email: *hasmawati@unhas.ac.id[1];budinurwahyu@gmail.com[2]; ahmadsyukurd@gmail.com[3], amirkamalamir@yahoo.com[4]*

Terdapat beberapa hasil tentang dimensi partisi suatu graf yang telah diperoleh diantaranya [5] membuktikan bahwa sebuah graf G mempunyai $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika G adalah graf lintasan P_n dan menunjukkan bahwa graf G mempunyai $pd(G) = n$ jika dan hanya jika G adalah graf lengkap K_n. Dalam makalah [10], disajikan batas atas dan bawah dimensi partisi untuk graf pohon. Sedangkan makalah [1], menyajikan dimensi partisi graf amalgamasi bintang. Dimensi partisi graf amalgamasi bintang dan lintasan disajikan dalam makalah [2], sedangkan makalah [6], membahas dimensi partisi untuk graf persahabatan. Dalam makalah ini dibahas penentuan dimensi partisi untuk graf amalgamasi siklus. Beberapa metode yang disajikan pada makalah [2] dan [5] akan dikembangkan untuk digunakan dalam penentuan dimensi partisi graf amalgamasi siklus. Hasil yang diperoleh dalam penelitian ini, ditulis dalam bentuk Lema dan proposisi, dan di akhir buktinya diberi tanda ■.

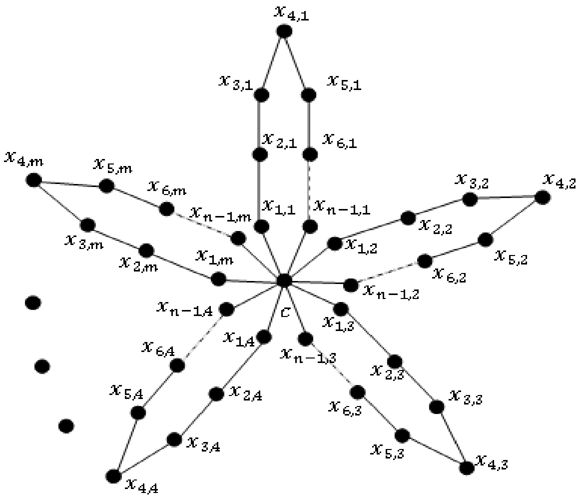
2. Tinjauan Pustaka

Graf G yaitu pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong yang anggota-anggotanya disebut titik, dan $E(G)$ adalah sebuah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan pasangan titik yang disebut sisi.

Graf G disebut graf terhubung (*connected*), jika untuk setiap dua titik yang berbeda di G terdapat suatu lintasan dari u ke v [3]. Panjang suatu lintasan adalah banyaknya sisi yang ada pada lintasan tersebut.

Misal G adalah graf sederhana dan $u, v \in V(G)$. Jarak antara titik u dan v dinotasikan dengan $d(u, v)$ dan lintasan berorde n dinotasikan dengan P_n dengan $n \geq 1$. Jika $P_n := v_1, v_2, \ldots, v_n$ adalah suatu graf lintasan berorde n dan $n \geq 3$, maka graf siklus C_n adalah graf dengan himpunan titik $V(C_n) = V(P_n)$ dan himpunan sisi $E(C_n) = E(P_n) \cup \{v_1 v_n\}$. Graf siklus C_n memiliki n titik dan n sisi dengan setiap titiknya berderajat dua.

Misalkan $\{G_i | i \in \{1,2,3, \ldots, m\}\}$ untuk $m \in \mathbb{N}$ dan $m \geq 2$, merupakan kumpulan graf berhingga dan masing–masing G_i memiliki titik tetap v_{0i} yang disebut terminal. Amalgamasi $Amal(G_i, v_{0i})$ adalah graf yang dibentuk dengan mengambil semua G_i dan menyatukan terminalnya [9]. Graf yang akan di diteliti dalam penelitian ini adalah $Amal(C_{n_i})$ dengan $n_i = n_j > 3$ untuk setiap i, j dan $1 \leq i, j \leq m, m \in N$. Untuk penyederhanaan penulisan, dalam penelitian ini sisi $e = \{u, v\} \in E(G)$ hanya ditulis uv dan $Amal(C_{n_i}), i = 2, 3, \ldots, m$ hanya ditulis $Amal(C_n)_m$.



Gambar 1. Graf Hasil Amalgamasi Siklus ($Amal(C_n)_m$

Himpunan titik $V(Amal(C_n)_m) = \{c, x_{i,j} | 1 \le i \le n-1, 1 \le j \le m\}$ dan himpunan sisi $E(Amal(C_n)_m) = \{cx_{1,j}, cx_{n-1,j}\ ,\ x_{i,j}x_{i+1,j}\ | 1 \le i \le n-2, 1 \le j \le m\}$. Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dengan $V(G)$ adalah himpunan titik-titiknya, $S \subseteq V(G)$ dan $v \in V(G)$, jarak antara v dengan S yang dinotasikan $d(v,S)$ dan didefinisikan sebagai $d(v,S) = \min\{d(v,x) | x \in S\}$. Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dan koleksi himpunan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$, dengan S_j adalah partisi dari $V(G)$. Himpunan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ disebut **himpunan partisi** dan S_j disebut **kelas partisi.** Misalkan $v \in V(G)$. Representasi (koordinat) v terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = \big(d(v,S_1), d(v,S_2), \dots, d(v,S_k)\big)$. Himpunan partisi $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ dikatakan k-**partisi pembeda** (*resolving partition*) jika k-vektor $r(v|\Pi)$ untuk setiap $v \in V(G)$ adalah berbeda. Nilai minimum k agar terdapat k-partisi pembeda dari $V(G)$ adalah **dimensi partisi** dari G. Dimensi partidsi dari G dinotasikan dengan $pd(G)$ [5]. Definisi dan hasil penelitian dalam [6] yang terkait dengan penelitian ini, disajikan dalam bentuk definisi dan Teorema berturut-turut sebagai berikut:

Definisi 2.1. Diberikan G adalah graf terhubung dan $u, v \in V(G)$. Titik u dan v disebut titik-titik yang setara dalam graf G apabila memenuhi salah satu sifat berikut:

a. $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G)\ /\{u,v\}$,
b. terdapat titik c sehingga $d(u,c) + d(c,s) = d(v,c) + d(c,s)$ untuk setiap $s \in V(G)\ /\{u,v\}$.

Teorema 2.1. Setiap bilangan asli $n, n \ge 4$, $pd(Amal(C_n)_m) = \begin{cases} 3, & jika\ 2 \le m \le 3, \\ 4, & jika\ 4 \le m \le 6. \end{cases}$

3. Hasil Utama

Hasil utama yang dibahas dalam makalah ini adalah perumuman dari hasil Ahmad Syukur dkk.,[6], yang disajikan pada Proposisi 3.2. Beberapa pernyataan yang cukup membantu dalam membuktikan Proposisi 3.2 disajikan dalam bentuk Lema 3.1 dan Proposisi 3.1.

Lema 3.1. Diberikan G graf terhubung dengan himpunan partisi Π dari $V(G)$. Misalkan pula titik u dan v titik-titik yang setara dalam G. Jika Π merupakan partisi pembeda graf G, maka u dan v atau tetangga u dan tetangga v berada pada kelas partisi yang berbeda di Π.

Bukti.
Misalkan $\Pi = \{S_1, \dots, S_k\}$, adalah partisi pembeda graf G. Berarti setiap $i, i \in \{1,2, \dots, \mathrm{k}\}$, $d(u,S_i) \ne d(v,S_i)$ untuk setiap titik u dan v di graf G. Misalkan pula u dan v adalah titik yang setara pada graf G, dan $r \in N(u)$ serta $s \in N(v)$. Misalkan terdapat $j, l \in \{1,2, \dots, \mathrm{k}\}$ sehingga $u, v \in S_j$ dan $r, s \in S_l$, maka $d(u,S_j) = d(v,S_j) = 0$ dan $d(u,S_l) = d(v,S_l) = 1$. Selanjutnya, ambil sembarang titik $a \in V(G)\ /\{u,v,r,s\}$ dan misalkan $a \in S_i$. Karena titik u dan v adalah titik-titik yang setara, terdapat $c \in V(G)$

sehingga $d(u,c)+d(c,a) = d(v,c)+d(c,a)$. Akibatnya, $d(u,S_i) = d(v,S_i)$. Dengan demikian, diperoleh $r(u|\Pi)$= $r(v|\Pi)$, yang berarti $\Pi = \{S_1,\dots,S_k\}$ bukan paritsi pembeda untuk graf G. Padahal diketahui $\Pi = \{S_1,\dots,S_k\}$ merupakan partisi pembeda. Karenanya, mestilah titik u dan v atau tetangga u dan tetangga v berada pada kelas partisi yang berbeda di Π. ■

Proposisi 3.1. Diberikan graf $Amal(C_n)_m$ dengan himpunan titik $V(Amal(C_n)_m) = \{c, x_{i,j} | 1 \le i \le n-1, 1 \le j \le m\}$ dan himpuan sisi $E(Amal(C_n)_m) = \{cx_{1,j}, cx_{n-1,j}, x_{i,j}x_{i+1,j} | 1 \le i \le n-1, 1 \le j \le m\}$.

Maka :

a. untuk setiap $k, k \ge 1$, titik $x_{k,j}$ dan titik $x_{k,i}$ untuk $i \ne j$ dengan $1 \le i,j \le m$ merupakan titik-titik yang tidak setara.
b. untuk setiap i dan j dengan $i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, titik $x_{i,j}$ dan $x_{n-i,j}$ adalah titik-titik yang setara.

Bukti.

Labeli titik-titik pada siklus C_n^m di graf $Amal(C_n)_m$ sebagai berikut:

$C_n^1 \coloneqq c, x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{n-1,1} = x_{i,1}; i = 1,2,\dots,n$
$C_n^2 \coloneqq c, x_{1,2}, x_{2,2}, \dots, x_{n-1,2} = x_{i,2}; i = 1,2,\dots,n$

$$\vdots$$

$C_n^m \coloneqq c, x_{1,m}, x_{2,m}, \dots, x_{n-1,m} = x_{i,m}; i = 1,2,\dots,n-1$. Jadi himpunan sisinya adalah $E(Amal(C_n)_2) = \{cx_{1,j}, cx_{n-1,j}, x_{i,j}x_{i+1,j} | 1 \le i \le n-1, 1 \le j \le m$

a. Ambil sembarang $k, k \ge 1$, dan sembarang $i,j, i,j \in [1,m]$. Titik $x_{k,j}$ dan titik $x_{k,i}$ di graf $Amal(C_n)_m$ memiliki jarak yang sama terhadap titik c. Jadi $d(x_{k,j},c)$= $d(x_{k,i},c) = k$. Pilih titik $x_{r,m}$ sehingga terdapat lintasan dari c ke $x_{r,m}$. Akibatnya $d(x_{k,j},c) + d(c,x_{r,m})$ = $d(x_{k,i},c) + d(c,x_{r,m})$. Jadi $(x_{k,j},x_{r,m}) = d(x_{k,i},x_{r,m})$. Sekarang perhatikan titik titik $x_{k+r,j}$, $d(x_{k,j},x_{k+r,j}) = r$, sedangkan $d(x_{k,i},x_{k+r,j}) = d(x_{k,i},c) + d(c,x_{k+r,j}) = \min\{k, n-k\} + \min\{k+r, n-(k+r)\} > r$. Jadi $d(x_{k,j},x_{k+r,j}) \ne d(x_{k,i},x_{k+r,j})$. Jadi terdapat titik di $Amal(C_n)_m$ sebut $x_{k+r,j}$ sehingga $d(x_{k,j},x_{k+r,j}) \ne d(x_{k,i},x_{k+r,j})$. Menurut Definisi 2.1, titik $x_{k,j}$ dan titik $x_{k,i}$ untuk setiap $i \ne j$, $i,j \in [1,m]$ adalah titik yang tidak setara.
b. Ambil sembarang $i, i = 1,2,\dots,n-1$, dan sembarang $j, j \ge 1$, sebut k. Titik $x_{i,k}$ dan $x_{n-i,k}$ adalah titik pada siklus C_k dengan $d(c,x_{i,k}) = i$ dan $d(c,x_{n-i,k}) = n-(n-i) = i$. Jadi $d(c,x_{i,k})$ = $d(c,x_{n-i,k}) = i$. Dapat dilihat bahawa $x_{i+1,k}$dan $x_{i-1,k}$ adalah tetangga dari titik $x_{i,k}$. Sedangkan titik $x_{n-i+1,k}$ dan $x_{n-i-1,k}$ adalah tetangga dari titik $x_{n-i,k}$. Jarak masing-masing titik ke titik tetangganya adalah sama seperti yang diperlihatkan berikut.
$d(x_{i,k},x_{n-i+1,k}) = d(x_{i,k},c) + d(c,x_{n-i+1,k}) = i + (n-(n-i+1)) = 2i-1;$
$d(x_{i,k},x_{n-i-1,k}) = d(x_{i,k},c) + d(c,x_{n-i-1,k}) = i + (n-(n-i-1)) = 2i+1;$
dan
$d(x_{n-i,k},x_{i+1,k}) = d(x_{n-i,k},c) + d(c,x_{i+1,k}) = (n-(n-i)) + i + 1 = 2i+1;$
$d(x_{n-i,k},x_{i-1,k}) = d(x_{n-i,k},c) + d(c,x_{i-1,k}) = (n-(n-i)) + i - 1 = 2i-1;$

Jadi Menurut Definisi 2.1, titik $x_{i,k}$ dan titik $x_{n-i,k}$ adalah titik yang setara. ■

Akibat 3.1. Diberikan graf $G = Amal(C_n)_m$ dengan himpunan titik $V(Amal(C_n)_m) = \{c, x_{i,j} | 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\}$ dan himpuan sisi $E(Amal(C_n)_m) = \{cx_{1,j}, cx_{n-1,j}, x_{i,j}x_{i+1,j} | 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\}$. Jika Π merupakan partisi pembeda untuk G, maka titik $x_{i,j}$ dan $x_{n-i,j}$, $x_{i+1,j}$ dan $x_{n-i-1,j}$ atau $x_{i-1,j}$ dan $x_{n-i+1,j}$, n$-i+1 \; mod \; (n-1)$, berada pada kelas partisi yang berbeda.

Bukti. Menurut Proposisi 3.1**,** setiap i dan j dengan $i \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, titik $x_{i,j}$ dan $x_{n-i,j}$ adalah titik-titik yang setara dan $x_{i+1,j}$, $x_{i-1,j}$ adalah tetangga dari titik $x_{i,j}$ serta $x_{n-i-1,j}$dan $x_{n-i+1,j}$ adalah tetangga dari $x_{n-i,j}$, menurut **Lemma 3.1** titik $x_{i,j}$ dan $x_{n-i,j}$, $x_{i+1,j}$ dan $x_{n-i-1,j}$ atau $x_{i-1,j}$ dan $x_{n-i+1,j}$, n$-i+1 mod \; (n-1)$, berada pada kelas partisi yang berbeda. ∎

Proposisi 3.2: Misalkan $k, n \in \mathbb{N}$ dan $I_k = \left\{ m \in \mathbb{N} \left| \frac{k^2-3k+4}{2} \leq m \leq \frac{k^2-k}{2} \right. \right\}$. Jika $m \in I_k$ untuk suatu $k > 4$, maka $pd(Amal(C_n)_m) = k$ untuk setiap $n > 4$.

Bukti : Pilih $k \in \mathbb{N}$ dengan $k > 4$ dan ambil sembarang m di I_k. Misalkan pula label himpunan titik dan himpunan sisi graf $Amal(C_n)_m$ berturut-turut $V(Amal(C_n)_m) = \{c, x_{i,j} | 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\}$ dan $E(Amal(C_n)_m) = \{cx_{1,j}, cx_{n-1,j}, x_{i,j}x_{i+1,j} | 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m\}$.

Bentuk himpunan partisi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, \ldots, S_k\}$ dari himpunan titik $V(Amal(C_l)_m)$ untuk $4 \leq l \leq n$. Label titik pada siklus-siklus graf $Amal(C_n)_m$, sebagai berikut:

$$C_n^1 := c, x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{n-1,1};$$
$$C_n^2 := c, x_{1,2}, x_{2,2}, \ldots, x_{n-1,2};$$
$$\vdots$$
$$C_n^m := c, x_{1,m}, x_{2,m}, \ldots, x_{n-1,m}.$$

Dengan menggunakan Proposisi 3.1 dan Akibat 3.1 untuk $k \geq 5$ didefinisikan

$$S_1 = \{c\} \cup \left\{ x_{1,1}, x_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+1,1}, \ldots, x_{n-2,1} \right\} \cup \left\{ x_{1,2}, x_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+1,2}, x_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+2,2}, \ldots, x_{n-2,2} \right\} \cup \left\{ x_{1,4}, x_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+1,4}, x_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+2,4}, \ldots, x_{n-2,4} \right\} \cup \left\{ x_{1,7}, x_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+1,7}, x_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+2,7}, \ldots, x_{n-2,7} \right\} \cup \ldots \cup \left\{ x_{1,j}, x_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+1,j}, x_{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+2,j}, \ldots, x_{n-2,j} \right\};$$

dengan

$j = 1,2, \dots, \sum_{i=0}^{r} 1 + i\,; r = 0,1,2, \dots, k-2;$

$S_2 = \left\{x_{n-1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, \dots, x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,1}\right\} \cup \left\{x_{1,3}, x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,3}, x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2,3}, \dots, x_{n-2,3}\right\} \cup$
$\left\{x_{1,5}, x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,5}, x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2,5}, \dots, x_{n-2,5}\right\} \cup \left\{x_{1,8}, x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,8}, x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2,8}, \dots, x_{l-2,8}\right\} \cup \dots \cup$
$\left\{x_{1,j}, x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,j}, x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2,j}, \dots, x_{l-2,j}\right\};\ j = 3,5, \dots, \sum_{i=1}^{r} 2 + i\,; r = 1,2, \dots, k-2;$

$S_3 = \left\{x_{n-1,2}, x_{2,2}, x_{3,2}, \dots, x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,2}\right\} \cup \left\{x_{n-1,3}, x_{2,3}, x_{3,3}, \dots, x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor 3}\right\} \cup$
$\left\{x_{1,6}, x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,6}, x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2,6}, \dots, x_{n-2,6}\right\} \cup \left\{x_{1,9}, x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,9}, x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2,9}, \dots, x_{n-2,9}\right\} \cup \dots \cup$
$\left\{x_{1,j}, x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1,j}, x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+2,j}, \dots, x_{n-2,j}\right\};\ j = 6,9 \dots, \sum_{i=1}^{r} 3 + i\,; r = 2, \dots, k-2;$

$\vdots$

$S_{k-1} = \left\{x_{n-1,j}, x_{2,j}, x_{3,j}, \dots, x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,j}, x_{2,j+1}, x_{3,j+1}, \dots, x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,j+1}, \dots,\right.$
$\left. x_{2,m-1}, x_{3,m-1}, \dots, x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,m-1}, x_{n-1,m-1}\right\} \cup \{x_{2,m}, x_{3,m}, \dots, x_{n-2,m}\}$

$j = \frac{(k-1)^2 - 3(k-1) + 4}{2}$, dan

$S_k =$
$\left\{x_{n-1,j}, x_{2,j}, x_{3,j}, \dots, x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,j}, x_{n-1,j+1}, x_{2,j+1}, x_{3,j+1}, \dots, x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,j+1}, \dots, x_{2,m}, x_{3,m}, \dots, x_{\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,m}, x_{n-1,m}\right\}, j = \frac{k^2-3k+4}{2}.$

untuk $n \geq 4$, dan $m \in I_k$.

Sekarang akan diselidiki apakah representasi titik-titik c, $x_{i,j}, x_{t,s}$, for $i, t = 1, 2, \dots, n-1$ and $j, s = 1, 2, \dots, m$, berlaku $r(x_{r,s}|\Pi) \neq r(x_{i,j}|\Pi)$ untuk $m \in [\frac{k^2-3k+4}{2}, \frac{k^2-k}{2}]$,

$r(c|\Pi) = (0,1,1,1, \dots, 1)$

$r(x_{1,1}|\Pi) = (0,1,2,2, \dots, 2,)$ dan

$(x_{i,1}|\Pi) = (i-1, i+1, i+1, \dots, i+1)$, jika $2 \leq i \leq \left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil$, $n \geq 5$

$r(x_{i,1}|\Pi) = \left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - i, i+1, i+1, \ldots, i+1\right)$, jika $\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil + 1 \leq i \leq \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1, n \geq 6$

$r(x_{i,1}|\Pi) = \left(0, \mathrm{i} - \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + 1, n-i+1, n-i+1, \ldots, n-i+1,\right)$, jika $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \leq i \leq n -$

$\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil, n \geq 4$

$r(x_{i,1}|\Pi) = (0, n - \mathrm{i} - 1, n-i+1, n-i+1, \ldots, n-i+1)$,

jika $n - \left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil + 1 \leq i \leq n-2, n \geq 6$,

$r(x_{n-1,1}|\Pi) = (1,0,2, \ldots, 2,2)$,

$r(x_{1,2}|\Pi) = (0,2,1,2, \ldots, 2,)$ dan

$(x_{i,2}|\Pi) = (i-1, i+1, 0, i+1, \ldots., i+1)$, jika $2 \leq i \leq \left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil, n \geq 5$

$r(x_{i,2}|\Pi) = \left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - i, i+1, 0, i+1, \ldots, i+1\right)$, jika $\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil + 1 \leq i \leq \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1, n \geq 6$

$r(x_{i,2}|\Pi) = \left(0, n-i+1\ , i - \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + 1, \ldots, n-i+1\right)$, jika $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \leq i \leq n - \left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil, n \geq 4$

$r(x_{i,2}|\Pi) = (0, n-i+1, n-i-1, n-i+1, \ldots, n-i+1, n-1-\mathrm{i})$,

jika $n - \left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil + 1 \leq i \leq n-2, n \geq 6$,

$r(x_{n-1,2}|\Pi) = (1,2,0,2, \ldots, 2)$

$r(x_{1,3}|\Pi) = (1,0,2,2, \ldots, 2)$

$r(x_{i,3}|\Pi) = (\mathrm{i}, \mathrm{i}-1, 0, \mathrm{i}+1, , \mathrm{i}+1)$, jika $2 \leq i \leq \left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil, n \geq 5$

$r(x_{i,3}|\Pi) = \left(i, \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - \mathrm{i}, 0, \mathrm{i}+1, \mathrm{i}+1\right)$, jika $\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil + 1 \leq i \leq \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1, n \geq 6$

$r(x_{i,3}|\Pi) = \left(n-i, 0, \mathrm{i} - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1, n-i+1, n-i+1\right)$, jika $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq i \leq n - \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil, n \geq 5$

$r(x_{i,3}|\Pi) = (n-i, 0, n-i-1, n-i+1, n-i+1)$, jika $n - \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 1 \leq i \leq n-2, n \geq 6$

$r(x_{n-1,3}|\Pi) = (1,2,2,0,2, \dots, 2)$,

$r(x_{1,4}|\Pi) = (0,2,2,1,2, \dots,2)$

$r(x_{i,4}|\Pi) = (i-1, i+1, i+1,0, i+1, \dots, i+1)$, jika $2 \leq i \leq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil, n \geq 5$

$r(x_{i,4}|\Pi) = \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - i, i+1, i+1,0, i+1, \dots, i+1\right)$, jika $\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 1 \leq i \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1, n \geq 6$

$r(x_{i,4}|\Pi) = \left(0, n-i+1, \dots, n-i+1, i - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1, n-i+1\right)$, jika $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq i \leq n - \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil,$

$n \geq 5$

$r(x_{i,4}|\Pi) = (0, n-i+1, \dots, n-i+1, n-i-1, n-i+1, \dots, n-i+1)$, jika $n - \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil +$

$1 \leq i \leq n-2, n \geq 6$

$r(x_{n-1,4}|\Pi) = (1,2,2,2, 0,2, \dots,2)$

$\vdots$

$r(x_{1,j}|\Pi) = (0,2, \dots,2,2,1)$,

$r(x_{i,j}|\Pi) = (i-1, i+1, i+1, \dots, i+1,0)$, jika $2 \leq i \leq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil, n \geq 5$

$r(x_{i,j}|\Pi) = \left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - \mathrm{i}, \mathrm{i}+1, \mathrm{i}+1, \dots, \mathrm{i}+1,0\right)$, jika $\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 1 \leq i \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1, n \geq 6$

$r(x_{i,j}|\Pi) = \left(0, n-i+1, n-i+1, n-i+1, i - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1\right)$, jika $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \leq i \leq n - \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil, n \geq 5$

$r\left(x_{i,j}|\Pi\right) = (0, n-i+1, n-i+1, n-i+1, n-i-1)$, jika $n - \left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil + 1 \le i \le n-2$, $n \ge 6$

$r\left(x_{n-1,j}|\Pi\right) = (1,2,2,2,\dots,0)$, untuk $j = \frac{k^2-3k+4}{2}$.

$r\left(x_{1,j+1}|\Pi\right) = (1,0,\dots,2,2,1)$

$r\left(x_{i,j+1}|\Pi\right) = (i, i-1, i+1, \dots, i+1, 0)$, jika $2 \le i \le \left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil$, $n \ge 5$

$r\left(x_{i,j+1}|\Pi\right) = \left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - i, i-1, i+1, \dots, i+1, 0\right)$, jika $\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil + 1 \le i \le \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1$, $n \ge 6$

$r\left(x_{i,j+1}|\Pi\right) = \left(0, i-1, n-i+1, n-i+1, i - \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + 1\right)$, jika $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \le i \le n - \left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil$, $n \ge 5$

$r\left(x_{i,j+1}|\Pi\right) = (0, n-i+1, n-i+1, n-i+1, n-i+2)$, jika $n - \left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil + 1 \le i \le n-2$, $n \ge 6$

$r\left(x_{n-1,j+1}|\Pi\right) = (1,1,2,2,\dots,0)$

$\vdots$

$r\left(x_{1,m}|\Pi\right) = (1,2,2,2\dots,2,0,1)$

$r\left(x_{i,m}|\Pi\right) = (i, i+1, \dots, i+1, i-1, 0)$, jika $2 \le i \le \left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil$, $n \ge 5$

$r\left(x_{i,m}|\Pi\right) = \left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - i, i+1, \dots, i+1, i-1, 0\right)$, jika $\left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil + 1 \le i \le \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil - 1$, $n \ge 6$

$r\left(x_{i,m}|\Pi\right) = \left(0, n-i+1, n-i+1, i-1, i - \left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil + 1\right)$, jika $\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil \le i \le n - \left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil$, $n \ge 5$

$r\left(x_{i,m}|\Pi\right) = (1, n-i+1, n-i+1, \dots, n-i+1, 0, n-i+2)$, jika $n - \left\lceil\frac{n}{4}\right\rceil + 1 \le i \le n-2$, $n \ge 6$

$r(x_{n-1,m}|\Pi) = (1,2,2, \dots ,2,1,0)$

Dapat dilihat bahwa representasi titik $x_{l,j}$ terhadap Π untuk setiap i, semuanya berbeda. Dengan kata lain, untuk setiap $u, v \in V(Amal(C_n)_{m'}),\ r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$.

Jadi Π adalah partisi pembeda graf $Amal(C_{l+1})_m$ sehingga diperoleh

$$pd(Amal(C_{l+1})_m) \leq k. \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\text{(a)}$$

Selanjutnya, menentukan batas bawah dari dimensi partisi $Amal(C_n)_m$. Ambil sembarang himpunan partisi dari graf $Amal(C_n)_m$ sebut Π' dengan $|\Pi'| = k - 1$. Pilih $S_1, S_2, S_3, S_4 \dots, S_{k-1}$ dan distribusi anggota-anggota S_k ke $S_1, S_2, S_3, S_4 \dots, S_{k-1}$. Tanpa mengurangi perumuman, untuk $k \geq 5$ dimisalkan

$$\begin{aligned} S_1' &= S_1 \cup \left\{x_{2,m}, x_{3,m}, \dots, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor,m}, x_{n-1,m}\right\} \\ &= \{c\} \cup \left\{x_{1,1}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1,1}, \dots, x_{n-2,1}\right\} \cup \\ &\left\{x_{1,2}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1,2}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+2,2}, \dots, x_{n-2,2}\right\} \cup \left\{x_{1,4}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1,4}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+2,4}, \dots, x_{n-2,4}\right\} \cup \\ &\left\{x_{1,7}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1,7}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+2,7}, \dots, x_{n-2,7}\right\} \cup \dots \cup \left\{x_{1,l}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1,l}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+2,l}, \dots, x_{n-2,l}\right\} \cup \\ &\left\{x_{2,m}, x_{3,m}, \dots, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor,m}, x_{n-1,m}\right\};\ \text{dengan} \\ &j = 1,2, \dots, \textstyle\sum_{i=0}^{r} 1 + i\,; r = 0,1,2, \dots, k-2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2' &= S_2 \cup \left\{x_{2,m-1}, x_{3,m-1}, \dots, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor,m-1}, x_{n-1,m-1}\right\} = \left\{x_{n-1,1}, x_{2,1}, x_{3,1}, \dots, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor,1}\right\} \cup \\ &\left\{x_{1,3}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1,3}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+2,3}, \dots, x_{n-2,3}\right\} \cup \left\{x_{1,5}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1,5}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+2,5}, \dots, x_{n-2,5}\right\} \cup \\ &\left\{x_{1,8}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1,8}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+2,8}, \dots, x_{l-2,8}\right\} \cup \dots \cup \left\{x_{1,j}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1,j}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+2,j}, \dots, x_{l-2,j}\right\} \cup \\ &\left\{x_{2,m-1}, x_{3,m-1}, \dots, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor,m-1}, x_{n-1,m-1}\right\};\ j = 3,5, \dots, \textstyle\sum_{i=1}^{r} 2 + i\,; r = 1,2, \dots, k-2; \end{aligned}$$

$$S_3' = S_3 \cup \left\{x_{2,m-2}, x_{3,m-2}, \dots, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, m-2}, x_{n-1,m-2}\right\} = \left\{x_{n-1,2}, x_{2,2}, x_{3,2}, \dots, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, 2}\right\} \cup \left\{x_{n-1,3}, x_{2,3}, x_{3,3}, \dots, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor 3}\right\} \cup \left\{x_{1,6}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1,6}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+2,6}, \dots, x_{n-2,6}\right\} \cup \left\{x_{1,9}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1,9}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+2,9}, \dots, x_{n-2,9}\right\} \cup \dots \cup \left\{x_{1,j}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1,j}, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+2,j}, \dots, x_{n-2,j}\right\} \cup \left\{x_{2,m-2}, x_{3,m-2}, \dots, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, m-2}, x_{n-1,m-2}\right\};\ j = 6,9 \dots, \textstyle\sum_{i=1}^{r} 3 + i\,; r = 2, \dots, k-2;\ .$$

$$\vdots$$

$$S_{k-1}' = S_{k-1} \cup \left\{x_{n-1,l}, x_{2,l}, x_{3,l}, \dots, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, l}\right\} = \left\{x_{n-1,j}, x_{2,j}, x_{3,j}, \dots, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, j}, x_{2,j+1}, x_{3,j+1}, \dots, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, j+1}, \dots, x_{2,m-1}, x_{3,m-1}, \dots, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, m-1}, x_{n-1,m-1}\right\} \cup \left\{x_{2,m}, x_{3,m}, \dots, x_{n-1,m}\right\} \cup \left\{x_{n-1,l}, x_{2,l}, x_{3,l}, \dots, x_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, l}\right\} \text{ dengan } j = \frac{(k-1)^2 - 3(k-1) + 4}{2} \text{ untuk } l = \frac{k^2 - 3k + 4}{2}.$$

Perhatikan titik-titik $x_{a,i}$ dan titik $x_{a,m-i}$ untuk $2 \le a \le \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$, berada pada kelas partisi yang sama yakni pada partisi S_{i+1}. Tetangga $x_{a,i}$ dan $x_{a,m-i}$ juga berada pada kelas partisi yang sama. Menurut Proposisi 3.1 titik-titik $x_{a,i}$ dan titik $x_{a,m-i}$ adalah titik setara, sehingga menurut Lema 3.1, $\Pi' = \{S_1', S_2', S_3', \dots, S_{k-1}'\}$ bukan partisi pembeda untuk graf $Amal(C_n)_m$. Akibatnya

$$pd(Amal(C_n)_m) \ge k. \qquad \dots\dots (b)$$

Berdasarkan Persamaan (a) dan (b) diperoleh $pd(Amal(C_n)_m) = k$.

4. Kesimpulan

Berdasarkan Teorema 2.1 dan Proposisi 3.2 dapat disimpulkan bahwa untuk suatu $k \ge 3$, $pd(Amal(C_n)_m) = k$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}, n \ge 3$ dan $m \in I_k$.

5. Saran

Penelitian perlu dilanjutkan yakni menyelidiki apakah $pd(Amal(C_n)_m) = k$ untuk setiap $n, k \in \mathbb{N}$ dengan $n, k \ge 3$ dan $m \in I_k$.

Daftar Pustaka

[1] Asmiati, 2012. Partition Dimension of Amalgamation of Stars. *Bulletin of Mathematics*. 02(04): 161-167.

[2] Asmiati, 2016. Dimensi Partisi nGraf Amalgamasi Bintang yang Dihubungkan Suatu Lintasan. *Jurnal Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung*. 19(3): 93-95.

[3] Chartrand, G., dan Oellermann, O. R. 1993. *Applied and Algorithmic graph Theory*. McGraw–Hill, Inc, New York–St. Louis–San Francisco.

[4] Chartrand, G., Salehi, E., dan Zang, P. 1998. On The Partition Dimension of Graph. *Congressus Numerantium*. Vol. 130: 157-168.

[5] Chartrand, G., Salehi, E., dan Zang, P. 2000. The Partition Dimension of Graph. *Aequationes Mathematicae*. 59: 45-54.

[6] Daming, A., S., Hasmawati, Haryanto, L., Nurwahyu B., 2020. Dimensi Partisi Graf Hasil Amalgamasi Siklus, *JMSK*, VOL.6, No.2, 199-207

[7] Darmaji, 2011. *Dimensi Partisi Graf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Graf Terhubung. Disertasi*. Bandung: Institut Teknologi Bandung, Indonesia.

[8] Diestel R. 2005. *Graph Theory*, Third Edition. Springer-Verlag Heidelberg. New York.

[9] Fitriani, D., Salman, A. N. M. 2016. Rainbow connection number of amalgamation of some graphs. *AKCE International journal of graphs and combinatorics*. 13 : 90–99.

[10] Juan, R., Yero, I. G., dan Lemanska, M. 2014. On the Partition Dimension of Trees. *Discrete Applied Mathematics*. 166: 204-209.