JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA & KOMPUTASI E-ISSN: 2614-8811
https://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk/index
Vol. 18, No. 1, 93-101, September, 2021
DOI: 10.20956/j.v18i1.14394

Fixed Point Theorem on Contractive Mapping in Standard 2-Normed Spaces

Teorema Titik Tetap pada Pemetaan Kontraktif di Ruang Bernorma-2 Standar

Salsabila Ammari[1*], Muh. Nur[2*], Naimah Aris[3*]

Abstract

This paper discussed about the proof of the fixed point theorem on the standard 2-normed spaces by using completeness. The completeness of the standard 2-normed spaces is shown by defining a new norm. Two linear independent vectors on standard 2-normed spaces are used to define the new norm, namely $\|\boldsymbol{x}\|^* = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|$ *which has been shown to be equivalent to standard norm.*

Keywords: *standard 2-normed spaces, completeness, fixed point theorem.*

Abstrak

Pada tulisan ini dibahas pembuktian teorema titik tetap pada ruang bernorma-2 standar dengan menggunakan kelengkapan. Kelengkapan dari ruang bernorma-2 standar ditunjukkan dengan mendefinisikan norma baru. Dua buah vektor bebas linier pada ruang bernorma-2 standar digunakan untuk mendefinisikan norma baru, yakni $\|\boldsymbol{x}\|^* = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|$ yang telah ditunjukkan ekuivalen dengan norma standar.

Kata kunci: ruang bernorma-2 standar, kelengkapan, teorema titik tetap.

1. PENDAHULUAN

Ruang bernorma merupakan ruang vektor yang didalamnya terdapat fungsi norma dan memenuhi sifat-sifat ruang bernorma. Secara geometri, norma dapat dipandang sebagai alat ukur panjang dari suatu vektor.

Definisi 1.1 [10] *Misalkan X merupakan ruang vektor. Norma pada X adalah fungsi $\|\boldsymbol{x}\|: X \to \mathbb{R}$ sehingga untuk semua $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ berlaku:*

1. $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$
2. $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ *jika dan hanya jika* $\boldsymbol{x} = 0$
3. $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$
4. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

**Program Studi Matematika, FMIPA-UNHAS*
Email Address: *[1]salsabilacaca.sa@gmail.com, [2]muhammadnur@unhas.ac.id, [3]newima@gmail.com*

Ruang bernorma tidak terbatas pada ruang bernorma, terdapat pula ruang bernorma-2 hingga ruang bernorma-n untuk n ≥ 2. Konsep tentang ruang bernorma-2 pertama kali diperkenalkan oleh Gahler pada pertengahan tahun 1960-an [7].

Definisi 1.2 [3] *Misalkan X adalah ruang vektor riil berdimensi d, dengan $d \geq 2$. Suatu fungsi bernilai riil tak negatif yang didefinisikan sebagai suatu pemetaan $\|\boldsymbol{x}\|: X \times X \to \mathbb{R}$, sehingga untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ memenuhi sifat-sifat dibawah ini:*

1. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = 0$ *jika dan hanya jika x dan y bergantung linier*
2. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\|$
3. $\|\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$
4. $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|$,

disebut sebagai norma-2 di X, dan pasangan $(X, \|.,.\|)$ disebut suatu ruang bernorma-2.

Salah satu topik yang banyak dikembangkan oleh peneliti adalah teorema titik tetap pada pemetaan kontaktif di ruang Banach yang dilengkapi dengan norma-2. Beberapa penelitian yang telah membahas tentang topik tersebut diantaranya Gunawan [5], Nur, [14], serta Rumlawang [17]. Oleh karena itu, pada penelitian kali ini akan membahas kembali mengenai teorema titik tetap pada pemetaan kontraktif di ruang bernorma-2 standar.

2. HASIL UTAMA

2.1 Ruang Bernorma-2 Standar

Definisi 2.1 [14] *Misalkan X adalah ruang hasil kali dalam dengan dimensi $d \geq 2$. Ruang vektor X yang dilengkapi dengan norma-2 standar, yang didefinisikan sebagai*

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \\ \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$

dengan $\langle .,. \rangle$ menyatakan hasil kali dalam pada X, merupakan ruang bernorma-2 standar.

Proposisi 2.1 *Ruang bernorma-2 standar merupakan ruang bernorma-2.*

Bukti.

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan bahwa $\|.,.\|$ yang didefinisikan pada Definisi 2.1 memenuhi sifat-sifat norma-2.

1. Akan ditunjukkan bahwa $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ bergantung linier.

(⇨)Misalkan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = 0$. Andaikan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ bebas linier, dengan menggunakan metode Gram-Schmidt diperoleh $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}'$ yang saling ortogonal. Dengan demikian,

$$\begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \\ \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}' \rangle & \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \rangle \\ \langle \boldsymbol{y}', \boldsymbol{x}' \rangle & \langle \boldsymbol{y}', \boldsymbol{y}' \rangle \end{vmatrix}.$$

Karena $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}'$ saling ortogonal, maka $\langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \rangle = \langle \boldsymbol{y}', \boldsymbol{x}' \rangle = 0$. Sehingga diperoleh,

$$\begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}' \rangle & \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \rangle \\ \langle \boldsymbol{y}', \boldsymbol{x}' \rangle & \langle \boldsymbol{y}', \boldsymbol{y}' \rangle \end{vmatrix} = \langle \boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}' \rangle \langle \boldsymbol{y}', \boldsymbol{y}' \rangle.$$

Dengan demikian,

$$\begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \\ \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \end{vmatrix} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle \\ \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} \rangle & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \neq 0.$$

Hal ini bertentangan dengan pemisalan di awal, yakni $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = 0$ sehingga pengandaian salah. Dengan demikian, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ bergantung linier.

Jurnal Matematika, Statistika & Komputasi
Salsabila Ammari, Muh. Nur, Naimah Aris

($\Leftarrow$)Misalkan $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ bergantung linier. Artinya, dapat ditulis $\boldsymbol{x} = k\boldsymbol{y}$ dengan $k \in \mathbb{R}$. Dengan menggunakan sifat-sifat hasil kali dalam, diperoleh

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|^2 = \begin{vmatrix} k^2\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle & k\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \\ k\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \end{vmatrix}.$$

Selanjutnya menggunakan sifat determinan, diperoleh

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|^2 = k^2(\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle^2 - \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle^2) = 0.$$

$\|.,.\|$ memenuhi aksioma 1 norma-2.

2. Akan ditunjukkan bahwa $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\|$.

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \\ \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle \\ \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\|.$$

$\|.,.\|$ memenuhi aksioma 2 norma-2.

3. Akan ditunjukkan bahwa $\|\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|$.

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}\| &= \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}\rangle \\ \langle \alpha\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle & \langle \alpha\boldsymbol{y}, \alpha\boldsymbol{y}\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \\ &= \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle & \alpha\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \\ \alpha\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle & \alpha^2\langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha| \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \\ \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \\ &= |\alpha|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\|. \end{aligned}$$

$\|.,.\|$ memenuhi aksioma 3 norma-2.

4. Akan ditunjukkan bahwa $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|$.

Karena

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| = \begin{vmatrix} \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\rangle \\ \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}\rangle & \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\rangle \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}|\boldsymbol{y}\rangle^{\frac{1}{2}}$$

diperoleh,

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|^2 &= \langle \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle. \\ &= \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}|\boldsymbol{z}\rangle + 2\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle + \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}|\boldsymbol{z}\rangle. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan Ketaksamaan Cauchy-Schwarz, maka

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|^2 &\leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|^2 + 2\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\|\|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|^2 \\ &= (\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}\|). \end{aligned}$$

Jadi, aksioma 4 norma-2 terpenuhi.

Dengan demikian, $\|.,.\|$ merupakan norma-2. ■

Misalkan $(X, \|.,.\|)$ ruang bernorma-2 standar dan $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ adalah himpunan bebas linier di X, didefinisikan sebuah fungsi di X:

$$\|\boldsymbol{x}\|^* = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|. \qquad (4.1)$$

Proposisi 2.2 $(X, \|.\|^*)$ *merupakan ruang bernorma, dengan* $\|.\|^*$ *yang telah didefinisikan pada Fungsi (4.1).*

Bukti.

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan bahwa $\|.\|^*$ memenuhi sifat-sifat norma.

1. $\|\boldsymbol{x}\|^* \geq 0$ dan $\|\boldsymbol{x}\|^* = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = 0$.

   Karena $\|.,.\|$ merupakan norma-2, maka $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| \geq 0$ dan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\| \geq 0$. Dengan demikian,
   $$\|\boldsymbol{x}\|^* = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\| \geq 0.$$
   Selanjutnya,
   ($\Rightarrow$) Misalkan $\boldsymbol{x} = 0$. Diperoleh bahwa $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| = 0$ dan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\| = 0$. Dengan demikian,
   $$\|\boldsymbol{x}\|^* = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\| = 0.$$
   ($\Leftarrow$) Misalkan $\|\boldsymbol{x}\|^* = 0$ maka diperoleh,
   $$\|\boldsymbol{x}\|^* = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\| = 0$$
   Karena $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| \geq 0$ dan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\| \geq 0$, maka $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\| = 0$. Oleh karena itu, $\boldsymbol{x} = 0$.
   Dengan demikian, $\|\boldsymbol{x}\|^* = 0$ jika dan hanya jika $\boldsymbol{x} = 0$.
   $\|.\|^*$ memenuhi sifat-1 norma.
2. $\|\alpha\boldsymbol{x}\|^* = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|^*$.
   $$\|\alpha\boldsymbol{x}\|^* = \|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| + \|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|$$
   diperoleh,
   $$\begin{aligned}\|\alpha\boldsymbol{x}\|^* &= \|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| + \|\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\| \\ &= |\alpha|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| + |\alpha|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\| \\ &= |\alpha|(\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|) \\ &= |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|^*.\end{aligned}$$
   $\|.\|^*$ memenuhi sifat-2 norma.
3. $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^* \leq \|\boldsymbol{x}\|^* + \|\boldsymbol{y}\|^*$.

   Karena
   $$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^* = \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_1}\| + \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_2}\|$$
   diperoleh,
   $$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_1}\| + \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_2}\| &\leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_1}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\| + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_2}\| \\ &= \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\| + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_1}\| + \|\boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_2}\| \\ &= \|\boldsymbol{x}\|^* + \|\boldsymbol{y}\|^*\end{aligned}$$
   Dengan demikian, $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^* \leq \|\boldsymbol{x}\|^* + \|\boldsymbol{y}\|^*$.
   $\|.\|^*$ memenuhi sifat-3 norma.

Karena $\|.\|^*$ memenuhi seluruh sifat norma, maka $(X, \|.\|^*)$ merupakan ruang bernorma. ∎

Akibat 2.1 $\|\boldsymbol{x}\|_1^* = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2}\|$, *dengan* $\{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}\}$ *adalah hasil Proses Gram-Schmidt dari* $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ *juga merupakan norma di* X.

2.2 Kekonvergenan Norma-2 Standar Menggunakan Dua Vektor Bebas Linier

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa norma-2 standar dapat diwakili dengan dua buah vektor bebas linier.

Definisi 2.2 [5] *Barisan* (x_n) *di ruang bernorma-2* $(X, \|.,.\|)$ *dikatakan konvergen ke* $\boldsymbol{x}$ *dalam norma-2 jika dan hanya jika untuk setiap* $\boldsymbol{z} \in X$ *berlaku*

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| = 0.$$

Teorema 2.1 *Suatu barisan* (x_n) *di* X *konvergen ke* x *pada norma-2 standar di* X *jika dan hanya jika* $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| = 0$ *dan* $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\| = 0$ *dengan* $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ *bebas linier.*

Bukti.

Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa (x_n) konvergen ke $\boldsymbol{x}$ pada X di norma-2 standar jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1}\| = 0$ dan $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2}\| = 0$ dengan $\{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}\}$ himpunan bebas linier pada X.

(⇒) Misalkan (x_n) konvergen ke $\boldsymbol{x}$ pada X di norma-2 standar, maka $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| = 0$ untuk setiap $\boldsymbol{z} \in X$. Karena $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| = 0$ berlaku untuk setiap $\boldsymbol{z} \in X$, maka berlaku pula untuk $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b_1}$ dan $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b_2}$ dengan $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2} \in X$. Dengan demikian, $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1}\| = 0$ dan $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2}\| = 0$.

(⇐) Akan ditunjukkan bahwa jika $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1}\| = 0$ dan $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2}\| = 0$ maka (x_n) konvergen ke $\boldsymbol{x}$ di norma-2 standar. Jika (x_n) konvergen ke $\boldsymbol{x}$ di norma-2 standar, maka diperoleh $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| = 0$ untuk setiap $\boldsymbol{z} \in X$.

Misalkan $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_i}\| = 0$ untuk $i = 1,2$. Dengan menggunakan Ketaksamaan Hadamard $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$, maka diperoleh,

$$\begin{aligned}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| &\leq \|x_n - \boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{z}\|.\\ &\leq [\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1}\| + \|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2}\|]\|\boldsymbol{z}\|.\end{aligned}$$

Karena $\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_i}\| \to 0$ untuk $n \to \infty$, maka $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\| = 0$. Dengan demikian, (x_n) konvergen ke $\boldsymbol{x}$ di norma-2 standar.

Selanjutnya, ambil $k, l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, akan ditunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| = 0$ dan $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\| = 0$ jika dan hanya jika $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1}\| = 0$ dan $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2}\| = 0$.

Karena $\{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}\}$ merupakan hasil Gram-Schmidt dari $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$, maka dapat ditulis

$$\boldsymbol{b_1} = k\boldsymbol{a_1} \;\; ; \;\; \boldsymbol{b_2} = l\boldsymbol{a_1} + l\boldsymbol{a_2}.$$

Berdasarkan sifat norma-2 diperoleh,

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1}\| = \|\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{a_1}\| = |k|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|$$

dan

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2}\| \leq |l_1|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| + |l_2|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|.$$

Misalkan $s_1 = \frac{1}{l_2}; s_2 = \frac{l_1}{l_2 k}$, maka diperoleh,

$$\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| = \left\|\boldsymbol{x}, \frac{\boldsymbol{b_1}}{k}\right\| = \left|\frac{1}{k}\right| \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1}\|$$

dan

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\| &= \|\boldsymbol{x}, s_1\boldsymbol{b_2} - s_2\boldsymbol{b_1}\| = \|\boldsymbol{x}, s_1\boldsymbol{b_2} + (-s_2\boldsymbol{b_1})\|\\ &\leq \|\boldsymbol{x}, s_1\boldsymbol{b_2}\| + \|\boldsymbol{x}, -s_2\boldsymbol{b_1}\| = |s_1|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2}\| + |s_2|\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1}\|.\end{aligned}$$

(⇒)Misalkan $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| = 0$ dan $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\| = 0$. Perhatikan bahwa,

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1}\| = \lim_{n\to\infty}|k|\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| = |k|\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| = 0,$$

sehingga diperoleh $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1}\| = 0$. Selanjutnya perhatikan,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2}\| &\leq \lim_{n\to\infty}(|l_1|\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\|) + \lim_{n\to\infty}(|l_2|\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|)\\ &= |l_1|\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| + |l_2|\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|\\ &= 0.\end{aligned}$$

Karena $\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2}\| \geq 0$, maka $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2}\| = 0$.

(⇐) Misalkan $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1}\| = 0$ dan $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2}\| = 0$. Dengan cara yang sama, diperoleh $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| = 0$ dan $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\| = 0$.

Dengan demikian, barisan (x_n) di X konvergen ke $\boldsymbol{x}$ pada norma-2 standar di X jika dan hanya jika $lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| = 0$ dan $lim_{n\to\infty}\|x_n - \boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\| = 0$. ■

Akibat 2.2 *Ruang X yang dilengkapi* $\|.\|^*$ *lengkap jika dan hanya jika X yang dilengkapi* $\|.\|_1^*$ *lengkap.*

2.3 Kelengkapan Norma-2 Standar

Selanjutnya, akan dibahas mengenai kelengkapan norma-2 standar dengan menggunakan norma biasa.

Proposisi 2.3 $\|.\|_1^*$ *ekuivalen dengan norma standar* $\|.\|$ *di* X, *yakni* $\|\boldsymbol{x}\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$. *Artinya,*

$$\|x\| \leq \|x\|_1^* \leq 2\|x\|.$$

Bukti.

Ambil sebarang $\boldsymbol{x} \in X$. Karena $\{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}\}$ merupakan hasil Gram-Schmidt dari $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$, maka $\{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}\}$ merupakan himpunan ortonormal pada X, diperoleh $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1}\rangle^2$ dan $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2}\rangle^2$.

Berdasarkan Ketaksamaan Bessel $\sum_{i=1}^{2}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_i}\rangle^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2$, diperoleh

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}\|^2 &\leq 2\|\boldsymbol{x}\|^2 - \sum_{i=1}^{2}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_i}\rangle^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1}\rangle^2 + \|\boldsymbol{x}\|^2 - \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2}\rangle^2 \\ &= \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1}\|^2 + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2}\|^2.\end{aligned}$$

Karena

$$(\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2}\|)^2 \geq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1}\|^2 + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2}\|^2,$$

maka

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1}\|^2 + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2}\|^2 \leq (\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2}\|)^2$$
$$\|\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2}\| = \|\boldsymbol{x}\|_1^*.$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa $\|\boldsymbol{x}\|_1^* = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2}\| = \sum_{i=1}^{2}\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_i}\|$. Dengan menggunakan Ketaksamaan Hadamard $\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ diperoleh,

$$\sum_{i=1}^{2}\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_i}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|(\|\boldsymbol{b_1}\| + \|\boldsymbol{b_2}\|).$$

Ingat bahwa $\{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}\}$ merupakan himpunan ortonormal pada X sehingga $\|\boldsymbol{b_i}\| = 1$ untuk $i = 1,2$. Dengan demikian,

$$\sum_{i=1}^{2}\|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_i}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|(1+1) = 2\|\boldsymbol{x}\|.$$

Jadi, diperoleh bahwa $\|\boldsymbol{x}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|_1^* \leq 2\|\boldsymbol{x}\|$.

$\therefore$ $\|.\|_1^*$ ekuivalen dengan $\|.\|$. ■

Definisi 2.3 [5] *Barisan* (x_n) *dikatakan Cauchy apabila untuk setiap* $\boldsymbol{z} \in X$ *dan untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sehingga* $\|x_m - x_n, \boldsymbol{z}\| < \varepsilon$ *untuk setiap* $m, n \geq n_0$. *Jika setiap barisan Cauchy di* $(X, \|.,.\|)$ *konvergen ke suatu* $\boldsymbol{x} \in X$, *maka X dikatakan lengkap.*

Teorema 2.2 *Barisan* (x_n) *di X konvergen pada ruang bernorma-2 standar* $(X, \|.,.\|)$ *jika dan hanya jika barisan itu konvergen di ruang bernorma* $(X, \|.\|)$, *dan barisan* (x_n) *di X Cauchy di ruang bernorma-2 standar* $(X, \|.,.\|)$ *jika dan hanya jika barisan itu Cauchy di ruang bernorma* $(X, \|.\|)$.

Bukti.

Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa barisan (x_n) di X konvergen pada ruang bernorma-2 standar $(X,\|.,.\|)$ jika dan hanya jika barisan itu konvergen di ruang bernorma $(X,\|.\|)$.

$(\Rightarrow)$ Misalkan diketahui (x_n) konvergen ke $\boldsymbol{x}$ dalam ruang norma-2 $(X,\|.,.\|)$. Berdasarkan Teorema 2.1, diperoleh $\lim_{n\to\infty}\|x_n-\boldsymbol{x},\boldsymbol{b_1}\|=0$ dan $\lim_{n\to\infty}\|x_n-\boldsymbol{x},\boldsymbol{b_2}\|=0$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|x_n-\boldsymbol{x}\|_1^* &= \lim_{n\to\infty}(\|x_n-\boldsymbol{x},\boldsymbol{b_1}\|+\|x_n-\boldsymbol{x},\boldsymbol{b_2}\|)\\ &= \lim_{n\to\infty}\|x_n-\boldsymbol{x},\boldsymbol{b_1}\|+\lim_{n\to\infty}\|x_n-\boldsymbol{x},\boldsymbol{b_2}\|\\ &= 0.\end{aligned}$$

Karena $\|.\|_1^*$ ekuivalen dengan $\|.\|$, maka $\lim_{n\to\infty}\|x_n-\boldsymbol{x}\|=0$. Berdasarkan definisi kekonvergenan, maka (x_n) konvergen ke $\boldsymbol{x}$ pada ruang bernorma$(X,\|.\|)$.

$(\Leftarrow)$ Ambil sebarang $\boldsymbol{z}\in X$. Misalkan (x_n) konvergen ke $\boldsymbol{x}$ dalam ruang norma $(X,\|.\|)$, maka diperoleh bahwa untuk setiap $\varepsilon>0$ terdapat $n_0\in\mathbb{N}$, sehingga $\|x_n-\boldsymbol{x}\|<\frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{z}\|}$ untuk $n\geq n_0$. Menurut Ketaksamaan Hadamard, diperoleh,

$$\|x_n-\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\|\leq\|x_n-\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{z}\|<\varepsilon$$

untuk setiap $n\geq n_0$. Dengan demikian, (x_n) konvergen ke $\boldsymbol{x}$ dalam ruang norma-2 $(X,\|.,.\|)$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa barisan (x_n) d*i* X Cauchy di ruang bernorma-2 standar $(X,\|.,.\|)$ jika dan hanya jika barisan itu Cauchy di ruang bernorma $(X,\|.\|)$.

$(\Rightarrow)$ Misalkan diketahui (x_n) Cauchy di ruang norma-2 $(X,\|.,.\|)$, diperoleh bahwa $\lim_{m,n\to\infty}\|x_m-x_n,\boldsymbol{z}\|=0$. Berdasarkan Teorema 2.1 maka $\lim_{m,n\to\infty}\|x_m-x_n,\boldsymbol{b_1}\|=0$ dan $\lim_{m,n\to\infty}\|x_m-x_n,\boldsymbol{b_2}\|=0$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}\lim_{m,n\to\infty}\|x_m-x_n\|_1^* &= \lim_{m,n\to\infty}(\|x_m-x_n,\boldsymbol{b_1}\|+\|x_m-x_n,\boldsymbol{b_2}\|)\\ &= \lim_{m,n\to\infty}\|x_m-x_n,\boldsymbol{b_1}\|+\lim_{m,n\to\infty}\|x_m-x_n,\boldsymbol{b_2}\|\\ &= 0.\end{aligned}$$

Karena sebelumnya telah ditunjukkan bahwa $\|.\|_1^*$ ekuivalen dengan $\|.\|$, maka $\lim_{m,n\to\infty}\|x_m-x_n\|=0$. Atau dapat ditulis, terdapat $\varepsilon>0$ untuk setiap $n_0\in\mathbb{N}$ sehingga $\|x_m-x_n\|<\varepsilon$ untuk $m,n\geq n_0$. Akibatnya (x_n) Cauchy di ruang bernorma $(X,\|.\|)$.

$(\Leftarrow)$ Ambil sebarang $\boldsymbol{z}\in X$. Misalkan (x_n) Cauchy di ruang bernorma $(X,\|.\|)$, maka $\|x_m-x_n\|<\frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{z}\|}$ untuk $m,n\geq n_0$. Menurut Ketaksamaan Hadamard, diperoleh,

$$\|x_m-x_n,\boldsymbol{z}\|\leq\|x_m-x_n\|\|\boldsymbol{z}\|<\varepsilon$$

untuk setiap $m,n\geq n_0$. Dengan demikian, (x_n) juga Cauchy di ruang bernorma-2 $(X,\|.,.\|)$.

∴ Teorema 2.2 terbukti. ■

Akibat 2.3 *Ruang bernorma-2 standar* $(X,\|.,.\|)$ *lengkap jika dan hanya jika ruang bernorma standar* $(X,\|.\|)$ *adalah lengkap.*

2.2 Teorema Titik Tetap pada Pemetaan Kontraktif di Ruang Bernorma-2 Standar

Dengan menggunakan hasil-hasil pada subbab sebelumnya, akan dibuktikan teorema titik tetap pada pemetaan kontraktif di ruang bernorma-2 standar.

Teorema 2.3 *Misalkan* $(X,\|.,.\|)$ *merupakan ruang Banach-2.* $\{\boldsymbol{a_1},\boldsymbol{a_2}\}$ *merupakan himpunan bebas linier dan* $T:X\to X$ *memenuhi* $\|T_{\boldsymbol{x}}-T_{\boldsymbol{y}},\boldsymbol{a_i}\|\leq k\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\boldsymbol{a_i}\|$ *untuk setiap* $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{a_i}\in X$ *dimana* $i=1,2$ *dan* $0<k<1$ *konstan, maka* T *mempunyai titik tetap yang tunggal.*

Bukti.

Ambil sebarang himpunan bebas linier $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ di $(X, \|.,.\|)$, pada Proposisi 2.2 telah ditunjukkan bahwa $\|\boldsymbol{x}\|^* = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|$ dan $\|\boldsymbol{x}\|_1^* = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_1}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b_2}\|$ merupakan norma pada X, dengan $\{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}\}$ adalah hasil Gram-Schmidt dari $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$. Karena $(X, \|.,.\|)$ merupakan ruang bernorma-2 yang lengkap, maka berdasarkan Akibat 2.3, $(X, \|.\|)$ adalah ruang bernorma yang lengkap. Diketahui pula dari Proposisi 2.3 bahwa $\|.\|$ ekuivalen dengan $\|.\|_*^1$, akibatnya $\|.\|_*^1$ lengkap. Lebih jauh pada Akibat 2.2, $\|.\|^*$ adalah lengkap.

Selanjutnya, misalkan $\|T_{\boldsymbol{x}} - T_{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{a_i}\| \leq k\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_i}\|$ untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_i} \in X$ dimana $i = 1{,}2$ dan $0 < k < 1$ konstan. Perhatikan bahwa untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X$,

$$\begin{aligned}\|T_{\boldsymbol{x}} - T_{\boldsymbol{y}}\|^* &= \|T_{\boldsymbol{x}} - T_{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{a_1}\| + \|T_{\boldsymbol{x}} - T_{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{a_2}\| \\ &\leq k\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_1}\| + k\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a_2}\| \\ &= k\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^*.\end{aligned}$$

Karena $\|T_{\boldsymbol{x}} - T_{\boldsymbol{y}}\|^* \leq k\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^*$, maka T kontraktif terhadap $\|.\|^*$. Karena T kontraktif terhadap $\|.\|^*$ dan $(X, \|.\|^*)$ lengkap, maka T memiliki titik tetap yang tunggal. ■

3. KESIMPULAN

Kekonvergenan dan kelengkapan dari ruang bernorma-2 standar ditunjukkan dengan mendefinisikan norma baru. Dua buah vektor bebas linier pada norma-2 standar digunakan untuk mendefinisikan norma baru, yakni $\|\boldsymbol{x}\|^* = \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_1}\| + \|\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a_2}\|$ yang telah ditunjukkan ekuivalen dengan norma standar yakni norma yang diinduksi dari hasil kali dalam. Ekuivalensi dan kelengkapan yang telah ditunjukkan digunakan untuk membuktikan teorema titik tetap.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Anton, H. Rorres, C., 2005. *Elementary Linear Algebra*. Newyork: John Wiley & Sons Inc.

[2] Conway, J., 1997. *A Course in Functional Analysis*. Newyork: Springer-Verlag.

[3] Gähler, S., 1964. Lineare 2-Nomierte Räume. *Math Nachr*, Vol. 28, No. 1, 1-43.

[4] Gunawan, H., 2001. The Space of p-Summable Sequences and Its Natural n-Norm. *Bull Australia Math Soc*, Vol. 64, No. 1, 137-147.

[5] Gunawan, H., Mashadi. 2001. On Finite Dimensional 2-Normed Spaces. *Soochow Journal of Mathematics*, Vol. 27, No. 3, 321-329.

[6] Haase, M., 2010. *Functional Analysis: An Elementary Introduction*. Rhode Island : American Mathematical Society Providance.

[7] Handayani, A., 2013. *Skripsi: Barisan pada Ruang Norm-2*. Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi UIN Malang.

[8] Harikrishnan, K., Ravindran, T., 2011. Some Properties of Accretive Operators in Linier 2-Normed Space. *Int. Mathematical Forum*, Vol. 3, No. 59, 2941-2947.

[9] Imrona, M., 2002. *Aljabar Linier Elementer*. Bandung: Sekolah Tinggi Teknologi Telkom.

[10] Kreyszig, E., 1978. *Introductory Functional Analysis With Application*. Newyork: John Wiley dan Sons Inc.

[11] Lidiyani, Y., Shiddiq, M., 2017. Teorema Titik Tetap untuk Pemetaan Kontraksi-F yang Diperumum pada Ruang Seperti-Metrik-b. *Jurnal Matematika Murni dan Terapan "Epsilon"*, Vol. 11, No.2, 36-46.

[12] Manuhutu, J., Lesnussa, A., Batkunde, H., 2014. Ruang Norm-2 dan Ruang Hasil Kali Dalam-2. *Jurnal Matematika Integratif*, Vol. 10, No. 2, 139-145.

[13] Nur, M., 2011. *Tesis*: *Teorema Titik Tetap di Ruang Norm-n Standar*. Institut Teknologi Bandung.

[14] Nur, M., 2012. Teorema Titik Tetap di Ruang Norm-2 Standar. *Jurnal Matematika Statistika dan Komputasi*, Vol. 13, No. 1, 1-6.

[15] Resmawan., 2019. *Materi Kuliah Aljabar Linear*. Math UNG, Universitas Negeri Gorontalo.

[16] Rudin, W., 1991. *Functional Analysis*. Singapore: McGraw-Hill.

[17] Rumlawang, F. Y., 2020. Fixed Point Theorem in 2-Normed Spaces. *Tensor Pure and Applied Mathematic's Journal*, Vol. 1, No. 1, 41-46.

[18] Rynne, B.P., Youngson, M. A., 2000. *Linier Functional Analysis*. London: Springer-Verlag.