JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA & KOMPUTASI E-ISSN: 2614-8811
https://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk/index
Vol. 18, No. 2, 169-173, January, 2022
DOI: 10.20956/j.v18i2.16669

Direct Sums of Prime Subsemimodules

Jumlah Langsung Subsemimodul Prima

Andi Muhammad Anwar [1*#], Hanni Garminia [2*], Irawati [3*]

Abstract

Let R be a commutative semiring. A semimodule M over a semiring R is a fully prime semimodule if each proper subsemimodule of M is prime. This research aims to investigate the characterization of direct sums of prime subsemimodules.

Keywords: prime subsemimodules, fully prime semimodules, semirings.

Abstrak

Misalkan R adalah semiring komutatif. Semimodul M atas semiring R merupakan semimodul prima penuh apabila semua subsemimodul sejatinya merupakan subsemimodul prima. Penelitian ini bertujuan menyelidiki karakterisasi jumlah langsung dari subsemimodul prima.

Kata Kunci: subsemimodul prima, semimodul, semiring.

1. Pendahuluan

Semiring pertama kali diperkenalkan secara eksplisit oleh Vandiver pada tahun 1934 sebagai struktur aljabar yang memiliki dua operasi seperti gelanggang (ring) namun hukum pembatalan pada penjumlahan tidak berlaku [6]. Semiring digunakan dalam pendefinisian semimodul seperti pada definisi perkalian scalar modul yang melibatkan gelanggang. Semimodul atas semiring pertama kali diperkenalkan secara terstruktur oleh Takahashi pada tahun 1981 [4]. Selanjutnya, semimodul banyak dikerjakan oleh matematikawan dengan memperluas sifat-sifat yang berlaku pada struktur modul. Salah satu yang dikembangkan adalah ideal prima pada semiring dan subsemimodul prima dari semimodul.

Konsep subsemimodul prima di semimodul merupakan pengembangan dari konsep submodul prima di teori modul. Penelitian-penelitian yang telah dikerjakan sebelumnya terkait subsemimodul

[*] *Kelompok Keahlian Aljabar, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Teknologi Bandung*
[#] *Departement of Mathematics, Hasanuddin University, Makassar, Indonesia*
Email address:[1]*andimuhammadanwar08@gmail.com*, [2] *garminia@math.itb.ac.id* , [3]*irawati@math.itb.ac.id*

prima dapat dilihat di [5] , [2], [3], dan [1]. Hasil utama dalam tulisan ini membahas mengenai jumlah langsung dari subsemimodul prima.

2. Beberapa Definisi dan Notasi

Semiring memiliki definisi yang hampir serupa dengan gelanggang namun diperlemah karena ada satu hukum yang ditiadakan yaitu hukum pembatalan pada operasi penjumlahan. Karena ditidakannya hukum pembatalan ini sehingga semiring menjadi lebih menarik untuk dikaji lebih jauh terkait sifat-sifat dan karakterisasinya.

Semiring $(R, +, \cdot)$ merupakan himpunan tak kosong R dengan dua operasi biner yaitu operasi penjumlahan "+" dan operasi perkalian "· " dan memenuhi beberapa kondisi:

(1) $(R, +)$ memenuhi sifat asosiatif, komutatif, dan memiliki unsur identitas 0_R,
(2) $(R, \cdot)$ memenuhi sifat asosiatif dan memiliki unsur identitas 1_R ,
(3) memenuhi sifat distributf kiri dan kanan yaitu $(r + r')s = rs + r's$ dan $s(r + r') = sr + sr'$ untuk setiap $r, r', s \in R$,
(4) untuk setiap $r \in R$ memenuhi $0_R r = 0_R = r0_R$, dan
(5) $1_R \neq 0_R$.

Struktur semiring R merupakan semiring komutatif apabila memenuhi sifat komutatif pada operasi perkalian yaitu untuk setiap $r, s \in R$ memenuhi $rs = sr$. Pada tulisan ini semiring R yang dibicarakan adalah semiring komutatif. Misalkan I subhimpunan tak kosong dari R, maka I dikatakan ideal kiri dari R apabila tertutup terhadap operasi penjumlahan dan memenuhi jika $r \in R$ dan $i \in I$ maka $ri \in I$ (ideal kanan apabila $ir \in I$). Apabila memenuhi ideal kanan dan kiri maka cukup dikatakan sebagai ideal dari semiring R.

Contoh 1:

1. Ada beberapa contoh dari semiring yang sangat sederhana namun sering digunakan yaitu bilangan bulat positif ($\mathbb{Z}^+$), bilangan rasional positif ($\mathbb{R}^+$), dan bilangan riil positif ($\mathbb{R}^+$). Semua gelanggang (ring) juga merupakan semiring, namun jelas tidak untuk sebaliknya.
2. Salah satu contoh semiring adalah aljabar Boolean. Misalkan aljabar Boolean $B = \{1,2,3,4,6,12\}$ dengan operasinya didefinisikan $a + b = KPK(a, b)$ dan $a \cdot b = FPB(a, b)$ dengan $a, b \in B$ serta identitas penjumlahan dan perkaliannya adalah $0_B = 1$ dan $1_B = 12$. Unsur di B yang memilki invers pada penjumlahan hanyalah unsur identitas yaitu 1. Aljabar Boolean B merupakan semiring komutatif. Subimpunan $I = \{1,2,4\}$ dari B merupakan contoh ideal dari semiring B.

Struktur berikutnya adalah struktur semimodul dimana struktur ini juga merupakan struktur modul yang diperlemah dikarenakan perkalian skalarnya menggunakan struktur semiring. Misalkan R merupakan semiring komutatif. Semimodul kiri atas semiring R (R-semimodul) adalah himpunan tak kosong M dengan operasi penjumlahan yang memenuhi sifat asosiatif, komutatif, dan memiliki unsur identitas yaitu 0_M serta pekalian skalar $R \times M \to M$ dengan pemetaannya $(r, m) \mapsto rm$ dan memenuhi:

(1) $r(a + b) = ra + rb$, $(r + s)a = ra + sa$, dan $(rs)a = r(sa)$ untuk setiap $r, s \in R$ dan $a, b \in M$.
(2) $1_R a = a$, untuk setiap $a \in M$, dan
(3) $r0_M = 0_M = 0_R a$, untuk setiap $r \in R$ dan $a \in M$.

Semimodul kanan atas semiring R memiliki definisi serupa dengan semimodul kiri namun pada tulisan ini semimodul yang dikerjakan adalah semimodul kiri.

Misalkan N merupakan subhimpunan tak kosong dari R-semimodul maka N merupakan subsemimodul apabila memenuhi definisi semimodul. Misalkan N merupakan subsemimodul dari R-semimodul M, maka jelas himpunan $(N: M) = \{r \in R | rM \subseteq N\}$ merupakan ideal dari R. Subsemimodul sejati N dari M merupakan subsemimodul prima apabila untuk setiap $r \in R$ dan $m \in M$ yang memenuhi $rm \in N$ maka $r \in (N: M)$ atau $m \in N$.

Contoh 2:

1. Semiring R merupakan semimodul atas dirinya sendiri dengan operasi perkalian di R didefinisikan sebagai perkalian skalarnya.
2. Misalkan himpunan $B^2 = \{(b_1, b_2) | b_1, b_2 \in B\}$ dengan B merupakan semiring yang telah diberikan pada Contoh 1 dan didefinisikan operasinya adalah $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ untuk setiap $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in B^2$. Selanjutnya didefinisikan operasi perkalan skalarnya adalah $r(b_1, b_2) = (rb_1, rb_2)$ untuk setiap $r \in B$ dan $(b_1, b_2) \in B^2$. Himpunan B^2 dan operasinya merupakan semimodul atas semiring B. Salah satu contoh subsemimodul dari B^2 adalah $N_1 = \{(n_1, n_2) | n_1 \in \{1,2,4\}\, dan\, n_2 \in \{1,3\}\}$. Subsemimodul N bukanlah subsemimodul prima karena terdapat $3 \in B$ dan $(2,6) \in B^2$ yang memenuhi $3(2,6) = (1,3) \in N$ namun $3 \notin (N: B^2)$ dan $(2,6) \notin N_1$. Contoh subsemimodul prima dari B^2 adalah $N_2 = \{(n_1, n_2) | n_1, n_2 \in \{1,2,4\}\}$.

Semimodul dapat dikategorikan berdasarkan pada subsemimodul primanya. Semimodul M atas semiring R merupakan semimodul prima apabila $\{0_M\}$ merupakan subsemimodul prima. Semimodul M atas semiring R merupakan semimodul prima penuh apabila semua subsemimodul sejatinya merupakan subsemimodul prima.

Contoh 3:

1. Jelas $\mathbb{Z}^+$ merupakan semimodul prima atas semiring $\mathbb{Z}^+$.
2. Semimodul B^2 pada Contoh 2 bukanlah semimodul prima karena terdapat $2 \in B$ dan $(3,1) \in B^2$ yang memenuhi $2(3,1) = (1,1)$ tetapi $2 \notin (\{(1,1)\}: B^2)$.
3. Misalkan himpunan $C = \{1,2,4,8\}$ dengan aturan operasi yang serupa dengan semiring B sehingga C juga merupakan semiring. Semiring C merupakan semimodul atas dirinya sendiri dan juga merupakan semimodul prima penuh.

3. Jumlah Langsung Subsemimodul Prima

Pada bagian ini akan dibahas hasil yang diperoleh mengenai jumlah langsung dari subsemimodul prima. Namun, sebelumnya akan dibahas terlebih dahulu mengenai definisi jumlah langsung. Misalkan $\{M_i | i \in I\}$ merupakan keluarga subsemimodul pada semimodul M, maka semimodul $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ merupakan jumlah langsung apabila $M = \sum_{i \in I} M_i$ dan untuk setiap $m \in M$ selalu dapat dituliskan secara tunggal sebagai $\sum_{i \in I} m_i$ dimana $m_i \in M_i$ dan terdapat berhingga tak nol m_i.

Contoh 4:

1. Himpunan $M = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix};\ a \in 2\mathbb{Z}^{+} \text{dan } b \in 3\mathbb{Z}^{+}\right\}$ dengan operasi tambah pada matriks adalah semimodul atas semiring $\mathbb{Z}^{+}$. Semimodul M merupakan jumlah langsung dari subsemimodul $N_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ a \in 2\mathbb{Z}^{+}\right\}$ dan $N_2 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix};\ a \in 3\mathbb{Z}^{+}\right\}$.
2. Misalkan B merupakan semiring pada Contoh 1, sehingga B juga merupakan semimodul atas dirinya sendiri. Himpunan $N_1 = \{1,2,4\}$ dan $N_2 = \{1,3\}$ merupakan subsemimodul atas B dan $B = N_1 \oplus N_2$.

Berdasarkan definisi jumlah langsung di atas, struktur semimodul yang merupakan hasil utama pada tulisan ini adalah semimodul yang merupakan jumlah langsung dari subsemimodul prima. Namun, sebelum membahas hasil tersebut, berikut ditunjukkan terlebih dahulu bahwa subsemimodul dari subsemimodul prima merupakan subsemimodul prima.

Proposisi 3.1. Misalkan R merupakan semiring, M merupakan R-semimodul, dan N_1, N_2 merupakan subsemimodul dari M dan $N_2 \subseteq N_1$, jika N_2 merupakan subsemimodul prima dari M maka N_2 merupakan subsemimodul prima dari N_1.

Bukti: Misalkan N_1 dan N_2 merupakan subsemimodul prima dari M dan $N_2 \subseteq N_1$. Ambil $r \in R$ dan $m \in N_1 \setminus N_2$ sehingga memenuhi $rm \in N_2$. Selanjutnya karena $N_1 \subseteq M$ maka $(N_2 : M) \subseteq (N_2 : N_1)$. Karena N_2 merupakan subsemimodul prima dari M dan $(N_2 : M) \subseteq (N_2 : N_1)$ maka $r \in (N_2 : N_1)$. Jadi diperoleh N_2 merupakan semimodul prima dari N_1. ■

Dengan menggunakan Proposisi 3.1, berikut ditunjukkan bahwa semimodul yang merupakan jumlah langsung dari dua subsemimodul prima dapat dibentuk menjadi semimodul prima penuh.

Akibat 3.2. Misalkan M merupakan semimodul atas semiring R dan $M = M_1 \oplus M_2$ dengan M_1 dan M_2 merupakan subsemimodul prima dari M. Jika subsemimodul sejati N_i dari M_i memenuhi $(N_i : M_i) \subseteq (N_i : M)$ untuk $i = 1,2$ maka subsemimodul $N = N_1 \oplus N_2$ merupakan subsemimodul prima dari M.

Bukti: Ambil sebarang N_i yang merupakan subsemimodul dari M_i untuk $i = 1,2$ sehingga $N = N_1 \oplus N_2$. Ambil $r \in R$ dan $m \in M$ sedemikian sehingga $rm \in N$. Karena $m \in M_1 \oplus M_2$ sehingga terdapat tepat satu $m_1 \in M_1$ dan $m_2 \in M_2$. Jadi diperoleh $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$. Karena $rm \in N$ dan N_i subsemimodul dari M_i untuk $i = 1,2$, maka dengan sifat ketunggalan diperoleh $rm_1 \in N_1$ dan $rm_2 \in N_2$. Apabila $N_1 = M_1$ atau $N_2 = M_2$, jelas bahwa N merupakan subsemimodul prima pada M. Jika N_1 dan N_2 merupakan subsemimodul sejati maka berdasarkan Proposisi 3.1, N_i merupakan subsemimodul prima pada M_i untuk $i = 1,2$. Jadi $r \in (N_i : M_i) \subseteq (N_i : M) \subseteq (N : M)$ atau $m_i \in N_i$ untuk $i = 1,2$. Akibatnya $r \in (N : M)$ atau $m = m_1 + m_2 \in N$. Jadi terbukti bahwa N merupakan subsemimodul prima dari M.

4. Kesimpulan

Semimodul M atas semiring R merupakan semimodul prima penuh apabila setiap subsemimodul sejatinya merupakan subsemimodul prima. Semimodul yang merupakan jumlah langsung dari dua subsemimodul prima nya yaitu $M = M_1 \oplus M_2$ memiliki subsemimodul prima yang berbentuk $N = N_1 \oplus N_2$ dengan N_1 dan N_2 masing-masing merupakan subsemimodul dari M_1 dan M_2 dan memenuhi $(N_1 : M_1) \subseteq (N_1 : M)$ dan $(N_2 : M_2) \subseteq (N_2 : M)$.

Daftar Pustaka

[1] Anwar, A. M., Garminia, H. & Irawati, 2018. On the prime subsemimodules of multiplication semimodules. *Far East Journal of Mathematical Sciences*, 106(1), 151–157.

[2] Dubey, M. & Sarohe, P., 2015. Generalizations of prime subsemimodules. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics,* 39, 469-476.

[3] Han, S.-C, 2017. Maximal and prime k-subsemimodules in semimodules over semirings. *Journal of Algebra and Its Applications*, 16, 1750130, 11pp.

[4] M. Takahashi, 1981. On the bordism categories II: Elementary properties of semimodules. *Math. Seminar Notes Kobe Univ,* 9(2), 495-530

[5] Shabir, M. & Iqbal, M.,2007. One-sided Prime Ideals in Semirings. *Kyungpook Mathematical Journal*, 47, 473–480.

[6] Vandiver, H. S., 1934. Note on a simple type of algebra in which cancellation law of addition does not hold. *Bull. Amer. Math. Soc,* 40, 914-920.