

Dynamics Analysis of Predator-Prey Model with Double Allee Effects and Holling Type II Functional Response

Analisis Dinamik Model Mangsa Pemangsa dengan Efek Allee Ganda dan Fungsi Respon Holling Tipe II

Ismi Ra'yan^{1*}, Syamsuddin Toaha^{2*}, Jeffry Kusuma^{3*}

Abstract

In this article, a predator prey model with double Allee effects and Holling type II functional response is discussed. Strong and weak Allee effects were analyzed separately. The dynamic behavior of the model is analyzed by determining the equilibrium point and stability around the equilibrium point. From the analysis result, it is obtained that the trivial equilibrium point is locally asymptotically stable for the case of the strong Allee effect and the saddle unstable for the case of the weak Allee effect, while the boundary and coexistence equilibrium points are locally asymptotically stable if it satisfies several parameter conditions. Numerical simulations are carried out around the coexistence equilibrium point. The simulation results show that the Allee effect threshold affects prey population growth when experiencing a strong Allee effect. The growth of the prey population also depends on the initial conditions of the prey and predator population density. Furthermore, when the prey population experiences a weak Allee effect, there is no threshold must be exceeded for the population to survive so that for each initial condition however, the population will not experience extinction.

Keywords: *Predator-Prey, Double Allee Effect, Functional Response, Holling Type II.*

Abstrak

Pada artikel ini dibahas model mangsa pemangsa dengan efek Allee ganda dan fungsi respon Holling tipe II. Efek Allee kuat dan lemah dianalisis secara terpisah. Perilaku dinamik model dianalisis dengan menentukan titik kesetimbangan dan kestabilan di sekitar titik kesetimbangan. Dari hasil analisis diperoleh titik kesetimbangan trivial bersifat stabil asimtotik lokal untuk kasus efek Allee kuat dan tidak stabil pelana untuk kasus efek Allee lemah, sedangkan titik kesetimbangan batas dan koeksistensi bersifat stabil asimtotik lokal jika memenuhi syarat parameter yang telah ditentukan. Simulasi numerik dilakukan di sekitar titik kesetimbangan koeksistensi. Hasil simulasi menunjukkan bahwa ambang batas efek Allee mempengaruhi pertumbuhan populasi mangsa ketika mengalami efek Allee kuat. Pertumbuhan populasi mangsa juga bergantung pada kondisi awal kepadatan populasi mangsa dan pemangsa. Selanjutnya, ketika populasi mangsa mengalami efek Allee lemah, tidak ada

* Program Studi Magister Matematika FMIPA-UNHAS

Email: ¹ismirayyan596@gmail.com, ²syamsuddint@yahoo.com, ³jeffry.kusuma@gmail.com



ambang batas yang harus dilampaui agar populasi dapat bertahan sehingga untuk setiap kondisi awal bagaimanapun, populasi tidak akan mengalami kepunahan.

Kata kunci: Mangsa Pemangsa, Efek Allee Ganda, Fungsi Respon, Holling Tipe II.

1. Pendahuluan

Dinamika populasi merupakan suatu kajian mengenai perubahan yang terjadi dalam suatu populasi yang diakibatkan oleh interaksi antara individu ataupun dengan lingkungannya. Proses dinamika populasi dapat dimodelkan secara matematis dengan menggunakan persamaan differensial yang melibatkan waktu yang kontinu atau waktu yang diskrit [20]. Salah satu model matematika yang digunakan untuk menggambarkan perubahan populasi secara dinamik adalah model mangsa pemangsa. Model Lotka-Volterra adalah model mangsa pemangsa yang paling sederhana. Model ini mengasumsikan bahwa populasi mengalami pertumbuhan dan peluruhan secara ekponensial. Pemangsaan bergantung pada kemungkinan interaksi langsung pemangsa terhadap mangsa, dan pertumbuhan pemangsa tergantung pada tangkapan mangsa. Model mangsa pemangsa Lotka-Volterra telah banyak mengalami perkembangan dan modifikasi yang disesuaikan dengan kondisi yang ada di alam [12].

Salah satu fenomena yang menarik untuk dikaji dalam dinamika populasi adalah efek Allee. Efek Allee merujuk pada korelasi positif antara laju pertumbuhan populasi dengan kepadatan populasi. Efek Allee pertama kali diperkenalkan oleh Warder Cyle Allee pada tahun 1931 [1]. Efek Allee mengurangi laju pertumbuhan populasi ketika kepadatan populasi rendah. Secara umum, efek Allee disebabkan oleh berbagai faktor biologis seperti berkurangnya pertahanan terhadap predator, kompetisi intraspesifik, penyimpangan genetik, kesulitan mendapatkan pasangan, disfungsi sosial dan kekurangan pakan hingga mengakibatkan populasi mengalami kepadatan rendah [3, 4, 6, 9].

Efek Allee dibagi menjadi dua jenis utama, yaitu efek Allee kuat dan efek Allee lemah. Efek Allee kuat adalah fenomena ketika populasi menunjukkan ukuran atau kepadatan kritis (ambang batas Allee). Jika kepadatan populasi berada di bawah ambang batas Allee, maka populasi akan mengalami tingkat pertumbuhan negatif dan populasi akan menurun. Sedangkan jika kepadatan populasi berada di atas ambang batas Allee, maka populasi akan mengalami pertumbuhan positif dan menghasilkan konvergensi terhadap daya dukung. Selanjutnya, kondisi efek Allee lemah menyebabkan populasi mengalami penurunan tingkat pertumbuhan pada kepadatan rendah tetapi tidak mengalami pertumbuhan negatif. Oleh karena itu, tidak ada ambang batas yang harus dilampaui agar populasi dapat bertahan hidup [5, 15, 16, 19].

Penelitian ekologi terbaru menunjukkan kemungkinan bahwa dua atau lebih efek Allee dapat mempengaruhi pertumbuhan populasi secara simultan [3]. Pengaruh gabungan dari beberapa fenomena ini dikenal sebagai efek Allee ganda. Beberapa tahun terakhir penelitian mengenai efek Allee ganda telah banyak dilakukan, seperti Gonzalez-Olivares, dkk [7] menganalisis model mangsa pemangsa pada waktu kontinu dengan mempertimbangkan efek Allee ganda pada pertumbuhan populasi mangsa dan fungsi respon Holling tipe I untuk menggambarkan interaksi mangsa dan pemangsa. Pal dan Saha [11] menganalisis kestabilan dan bifurkasi model mangsa pemangsa dengan efek Allee ganda dan fungsi respon rasio dependent Holling tipe II. Fungsi respon ini didasari bahwa populasi pemangsa tidak hanya bergantung pada populasi mangsa, namun juga populasi pemangsa itu sendiri. Singh dkk., [14] menganalisis perilaku dinamik model mangsa pemangsa Leslie-Gower yang dimodifikasi dengan efek Allee ganda pada pertumbuhan populasi mangsa. Liu dan Dai [10] menganalisis model mangsa pemangsa dengan efek Allee ganda pada pertumbuhan populasi mangsa dan imigrasi pada pemangsa secara periodik.

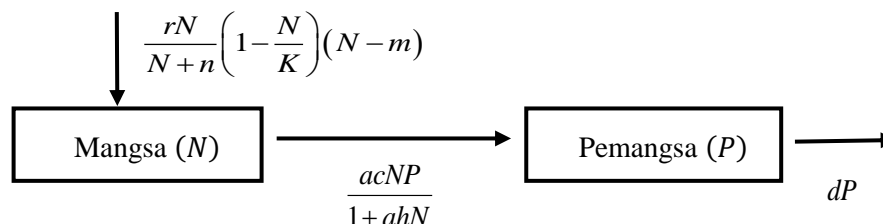
Dalam dinamika populasi, proses pemangsaan dinyatakan dalam bentuk fungsi respon. C.S. Holling memperkenalkan tiga jenis fungsi respon. Salah satu yang paling sering digunakan adalah

fungsi respon Holling tipe II [18]. Fungsi respon ini mengasumsikan bahwa tingkat konsumsi melambat dengan bertambahnya populasi karena keterbatasan kapasitas dalam mencari dan mengolah makanan [8]. Beberapa peneliti telah mengkaji modifikasi model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II, seperti Tian dan Xu [17] membahas dinamika global model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II di mana populasi pemangsa dibagi menjadi dua tahapan struktur. Pribylova dan Peniaskova [13] juga meneliti tentang model mangsa pemangsa dengan fungsi respon Holling tipe II. Dalam penelitian tersebut, Pribylova dan Peniaskova menyatakan bahwa waktu pencarian dan penanganan mangsa oleh pemangsa dapat mempengaruhi dinamika sistem mangsa pemangsa.

Pada artikel ini, dibahas analisis dinamik model mangsa pemangsa dengan efek Allee ganda dan fungsi respon Holling tipe II. Analisis dilakukan untuk mengetahui perilaku dari populasi mangsa dan pemangsa ketika terjadi efek Allee kuat dan lemah pada pertumbuhan populasi mangsa dengan fungsi respon Holling tipe II yang menggambarkan interaksi antara populasi mangsa dan pemangsa. Perilaku dinamik model dianalisis dengan menentukan titik kesetimbangan dan analisis kestabilan lokal di sekitar titik kesetimbangan.

2. Model Matematika

Model dinamika populasi mangsa pemangsa pada penelitian ini dikembangkan dari penelitian Gonzalez-Olivares, dkk [7] yang bentuk interaksinya dapat dilihat pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1. Diagram Kompartemen Model Mangsa Pemangsa.

Dari gambar 2.1 terlihat bahwa laju perubahan kepadatan populasi mangsa dipengaruhi oleh dua komponen efek Allee yang dimodifikasi dengan fungsi pertumbuhan logistik. Fungsi $(N - m)$ menyatakan bahwa ketika $N < m$ maka laju perubahan kepadatan populasi mangsa akan menurun dan menuju titik punah. Sedangkan ketika $N > m$ maka laju perubahan kepadatan populasi mangsa akan meningkat dan konvergen ke daya dukung lingkungan (K). Selanjutnya, fungsi $\frac{rN}{N+n}$ dinyatakan sebagai bentuk pendekatan dinamika populasi dimana perbedaan antara individu yang subur dan tidak subur tidak dijelaskan secara eksplisit pada model. Diasumsikan bahwa faktor tersebut menunjukkan dampak dari efek Allee dikarenakan populasi yang tidak subur n [2, 4, 11]. Efek Allee pada populasi mangsa dinyatakan efek Allee kuat jika $m > 0$ dan efek Allee lemah jika $m < 0$.

Pada penelitian ini, kepadatan populasi mangsa berkurang karena interaksi antar populasi mangsa dan pemangsa yang digambarkan dengan fungsi respon Holling tipe II. Bentuk interaksi tersebut merupakan pengembangan dari model penelitian Gonzalez-Olivares, dkk [7] dengan asumsi bahwa pemangsa membutuhkan waktu dalam mencari dan mengkonsumsi mangsanya. Selanjutnya, laju perubahan kepadatan populasi pemangsa bergantung pada proses pemangsaan dan berkurang dengan laju kematian alami. Berdasarkan uraian di atas, model mangsa pemangsa dituliskan dalam bentuk persamaan diferensial berikut.

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dT} &= \frac{rN}{N+n} \left(1 - \frac{N}{K}\right) (N-m) - \frac{aN P}{1+ahN} \\ \frac{dP}{dT} &= \frac{acNP}{1+ahN} - dP\end{aligned}\quad (2.1)$$

Diasumsikan bahwa kondisi awal memenuhi $N(0) > 0$ dan $P(0) > 0$, dengan N dan P masing-masing menyatakan kepadatan populasi mangsa dan pemangsa. Parameter r, K, a, c, h dan d adalah parameter positif yang dijelaskan dalam Tabel 2.1. Sementara m adalah ambang batas efek Allee dan n adalah parameter pembantu efek Allee dengan $n > 0$ dan $m > -n$.

Keterangan variabel dan parameter model (2.1) diberikan dalam Tabel 2.1.

Tabel 2.1. Deskripsi Variabel dan Parameter Model

Variabel/ Parameter	Keterangan	Dimensi
N	Kepadatan populasi mangsa	Mangsa
P	Kepadatan populasi pemangsa	Pemangsa
r	Tingkat pertumbuhan intrinsik mangsa	[Waktu] ⁻¹
K	Daya dukung lingkungan	Biomassa
m	Konstanta efek Allee	Biomassa
n	Parameter pembantu efek Allee	Biomassa
a	Tingkat konsumsi maksimum pemangsa terhadap mangsa	[Waktu] ⁻¹ [Pemangsa] ⁻¹
c	Tingkat konversi dari mangsa ke pemangsa	[Pemangsa][Mangsa] ⁻¹
h	Waktu penanganan pemangsa terhadap mangsa	[Waktu][Pemangsa] [Mangsa] ⁻¹
d	Laju kematian alami pemangsa	[Waktu] ⁻¹

Persamaan (2.1) dapat disederhanakan dengan melakukan nondimensionalisasi variabel dan parameter menggunakan persamaan-persamaan berikut.

$$x = ahN, \quad y = \frac{ah}{c} P, \quad t = Tr.$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{x(x-\eta)}{x+\theta} \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\varepsilon xy}{1+x} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\varepsilon xy}{1+x} - \mu y\end{aligned}\quad (2.2)$$

dengan kondisi awal $x(0) > 0$ dan $y(0) > 0$, di mana

$$k = ahK, \quad \eta = ahm, \quad \theta = ahn, \quad \varepsilon = \frac{c}{rh}, \quad \mu = \frac{d}{r}.$$

3. Analisis Dinamik

Titik kesetimbangan model (2.2) diperoleh dengan menyelesaikan persamaan berikut.

$$\begin{aligned} \frac{x(x-\eta)}{x+\theta} \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{\varepsilon xy}{1+x} &= 0 \\ \frac{\varepsilon xy}{1+x} - \mu y &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dari persamaan (2.3) diperoleh titik kesetimbangan untuk kasus efek Allee kuat dan efek Allee lemah sebagai berikut.

3.1. Efek Allee Kuat

Untuk kasus efek Allee kuat di mana $\eta > 0$ diperoleh titik kesetimbangan yaitu:

1. Titik kesetimbangan trivial $E_0 = (0, 0)$
2. Titik kesetimbangan batas $E_1 = (k, 0)$ dan $E_2 = (\eta, 0)$
3. Titik kesetimbangan koeksistensi $E_3 = (x^*, y^*)$ di mana

$$x^* = \frac{\mu}{\varepsilon - \mu} \quad \text{dan} \quad y^* = \frac{(\eta\mu - \eta\varepsilon + \mu)(k\mu - k\varepsilon + \mu)}{k(\mu\theta - \varepsilon\theta - \mu)(\mu - \varepsilon)^2}$$

yang eksis jika $\varepsilon > \mu$ dan $\eta < x^* < k$. Hal ini menunjukkan bahwa aksistensi populasi mangsa dan pemangsa terpenuhi jika laju predasi lebih besar dari kematian alami pemangsa kemudian kepadatan populasi mangsa lebih besar dari ambang batas efek Allee dan lebih kecil dari daya dukung lingkungan.

Selanjutnya, akan dianalisis kestabilan lokal dari titik kesetimbangan kasus efek Allee kuat.

Teorema 1.

1. Titik kesetimbangan trivial $E_0 = (0, 0)$ stabil asimtotik lokal.
2. Titik kesetimbangan batas $E_1 = (k, 0)$ stabil asimtotik lokal jika $k > \eta$ dan $\frac{k\varepsilon}{1+k} < \mu$.
3. Titik kesetimbangan batas $E_2 = (\eta, 0)$ stabil asimtotik lokal jika $k < \eta$ dan $\frac{\eta\varepsilon}{1+\eta} < \mu$.
4. Titik kesetimbangan koeksistensi $E_3 = (x^*, y^*)$ stabil asimtotik lokal jika

$$\frac{\mu(\eta\mu - \eta\varepsilon + k\mu - k\varepsilon + 2\mu)}{k(\mu\theta - \varepsilon\theta - \mu)(\mu - \varepsilon)} > - \frac{\mu(\eta\mu - \eta\varepsilon + \mu)(k\mu - k\varepsilon + \mu)(\theta - 1)}{\varepsilon k(\mu\theta - \varepsilon\theta - \mu)^2}$$

dan

$$\frac{\mu(\eta\mu - \eta\varepsilon + \mu)(k\mu - k\varepsilon + \mu)}{\varepsilon k(\mu\theta - \varepsilon\theta - \mu)} > 0$$

dengan $\eta < \frac{2\mu}{\varepsilon - \mu} - k$.

Bukti.

1. Matriks Jacobi dari model (2.2) pada titik kesetimbangan E_0 adalah

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -\frac{\eta}{\theta} & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

Dari matriks $J(E_0)$ diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -\frac{\eta}{\theta} < 0$ dan $\lambda_2 = -\mu < 0$. Karena kedua nilai eigen matriks $J(E_0)$ bernilai negatif, maka titik kesetimbangan E_0 stabil asimtotik lokal.

2. Matriks Jacobi dari model (2.2) pada titik kesetimbangan E_1 adalah

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -\frac{(k-\eta)}{k+\theta} & -\frac{k\varepsilon}{1+k} \\ 0 & \frac{k\varepsilon}{1+k} - \mu \end{bmatrix}$$

Dari matriks $J(E_1)$ diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -\frac{(k-\eta)}{k+\theta}$ dan $\lambda_2 = \frac{k\varepsilon}{1+k} - \mu$. Titik kesetimbangan E_1 stabil asimtotik lokal jika $k > \eta$ dan $\frac{k\varepsilon}{1+k} < \mu$.

3. Matriks Jacobi dari model (2.2) pada titik kesetimbangan E_2 adalah

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} \frac{\eta(k-\eta)}{k(\eta+\theta)} & -\frac{\eta\varepsilon}{1+\eta} \\ 0 & \frac{\eta\varepsilon}{1+\eta} - \mu \end{bmatrix}$$

Dari matriks $J(E_2)$ diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = \frac{\eta(k-\eta)}{k(\eta+\theta)}$ dan $\lambda_2 = \frac{\eta\varepsilon}{1+\eta} - \mu$. Titik kesetimbangan E_2 stabil asimtotik lokal jika $k < \eta$ dan $\frac{\eta\varepsilon}{1+\eta} < \mu$.

4. Matriks Jacobi dari model (2.2) pada titik kesetimbangan E_3 adalah

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} -\frac{\mu(\eta\mu - \eta\varepsilon + k\mu - k\varepsilon + 2\mu)}{k(\mu\theta - \varepsilon\theta - \mu)(\mu - \varepsilon)} & -\frac{\mu(\eta\mu - \eta\varepsilon + \mu)(k\mu - k\varepsilon + \mu)(\theta - 1)}{\varepsilon k(\mu\theta - \varepsilon\theta - \mu)^2} & -\mu \\ \frac{(\eta\mu - \eta\varepsilon + \mu)(k\mu - k\varepsilon + \mu)}{\varepsilon k(\mu\theta - \varepsilon\theta - \mu)} & & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks $J(E_3)$ diperoleh trace dan determinan sebagai berikut

$$\text{trace}(J(E_3)) = -\frac{\mu(\eta\mu - \eta\varepsilon + k\mu - k\varepsilon + 2\mu)}{k(\mu\theta - \varepsilon\theta - \mu)(\mu - \varepsilon)} - \frac{\mu(\eta\mu - \eta\varepsilon + \mu)(k\mu - k\varepsilon + \mu)(\theta - 1)}{\varepsilon k(\mu\theta - \varepsilon\theta - \mu)^2}$$

$$\det(J(E_3)) = \frac{\mu(\eta\mu - \eta\varepsilon + \mu)(k\mu - k\varepsilon + \mu)}{\varepsilon k(\mu\theta - \varepsilon\theta - \mu)}$$

Titik kesetimbangan E_3 stabil asimtotik lokal jika $\text{trace}(J(E_3)) < 0$ dan $\det(J(E_3)) > 0$.

Berdasarkan syarat eksistensi titik kesetimbangan E_3 diperoleh $\det(J(E_3)) > 0$.

Selanjutnya, $\text{trace}(J(E_3)) < 0$ jika

$$\frac{\mu(\eta\mu - \eta\varepsilon + k\mu - k\varepsilon + 2\mu)}{k(\mu\theta - \varepsilon\theta - \mu)(\mu - \varepsilon)} > -\frac{\mu(\eta\mu - \eta\varepsilon + \mu)(k\mu - k\varepsilon + \mu)(\theta - 1)}{\varepsilon k(\mu\theta - \varepsilon\theta - \mu)^2}$$

dengan $\eta < \frac{2\mu}{\varepsilon - \mu} - k$.

3.2. Efek Allee Lemah

Untuk kasus efek Allee lemah di mana $\eta < 0$ diperoleh titik kesetimbangan yaitu:

1. Titik kesetimbangan trivial $e_0 = (0, 0)$
2. Titik kesetimbangan batas $e_1 = (k, 0)$
3. Titik kesetimbangan koeksistensi $e_2 = (\bar{x}, \bar{y})$ di mana

$$\bar{x} = \frac{\mu}{\varepsilon - \mu} \quad \text{dan} \quad \bar{y} = \frac{(\eta\varepsilon - \eta\mu + \mu)(k\varepsilon - k\mu - \mu)}{k(\varepsilon\theta - \mu\theta + \mu)(\mu - \varepsilon)^2}$$

yang eksis jika $\varepsilon > \mu$ dan $\bar{x} < k$. Hal ini menunjukkan bahwa aksistensi populasi mangsa dan pemangsa terpenuhi jika laju predasi lebih besar dari kematian alami pemangsa dan kepadatan populasi mangsa lebih kecil dari daya dukung lingkungan.

Selanjutnya akan dianalisis kestabilan lokal dari titik kesetimbangan kasus efek Allee lemah

Teorema 2.

1. Titik kesetimbangan trivial $e_0 = (0, 0)$ tidak stabil pelana.
2. Titik kesetimbangan batas $e_1 = (k, 0)$ stabil asimtotik lokal jika $\frac{k\varepsilon}{1+k} < \mu$.
3. Titik kesetimbangan koeksistensi $e_2 = (\bar{x}, \bar{y})$ stabil asimtotik lokal jika

$$\frac{\mu(\eta\mu - \eta\varepsilon - k\mu + k\varepsilon - 2\mu)}{k(\mu\theta - \varepsilon\theta - \mu)(\mu - \varepsilon)} < -\frac{\mu(\eta\mu - \eta\varepsilon - \mu)(k\mu - k\varepsilon + \mu)(\theta - 1)}{\varepsilon k(\mu\theta - \varepsilon\theta - \mu)^2}$$

dan

$$-\frac{\mu(\eta\mu - \eta\varepsilon - \mu)(k\mu - k\varepsilon + \mu)}{\varepsilon k(\mu\theta - \varepsilon\theta - \mu)} > 0$$

$$\text{dengan } \eta > k - \frac{2\mu}{\varepsilon - \mu}.$$

Bukti.

1. Matriks Jacobi dari model (2.2) pada titik kesetimbangan e_0 adalah

$$J(e_0) = \begin{bmatrix} -\frac{\eta}{\theta} & 0 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

Dari matriks $J(e_0)$ diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -\frac{\eta}{\theta}$ dan $\lambda_2 = -\mu < 0$. Karena $\eta < 0$, maka

$\lambda_1 > 0$ sehingga titik kesetimbangan e_0 tidak stabil pelana.

2. Matriks Jacobi dari model (2.2) pada titik kesetimbangan e_1 adalah

$$J(e_1) = \begin{bmatrix} -\frac{(k-\eta)}{k+\theta} & -\frac{k\varepsilon}{1+k} \\ 0 & \frac{k\varepsilon}{1+k} - \mu \end{bmatrix}$$

Dari matriks $J(e_1)$ diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -\frac{(k-\eta)}{k+\theta} < 0$ dengan $\eta < 0$ dan

$\lambda_2 = \frac{k\varepsilon}{1+k} - \mu$. Selanjutnya, titik kesetimbangan e_1 stabil asimtotik lokal jika $\frac{k\varepsilon}{1+k} < \mu$.

3. Matriks Jacobi dari model (2.2) pada titik kesetimbangan e_2 adalah

$$J(e_2) = \begin{bmatrix} \frac{\mu(\eta\mu - \eta\varepsilon - k\mu + k\varepsilon - 2\mu)}{k(\mu\theta - \varepsilon\theta - \mu)(\mu - \varepsilon)} + \frac{\mu(\eta\mu - \eta\varepsilon - \mu)(k\mu - k\varepsilon + \mu)(\theta - 1)}{\varepsilon k(\mu\theta - \varepsilon\theta - \mu)^2} & -\mu \\ -\frac{(\eta\mu - \eta\varepsilon - \mu)(k\mu - k\varepsilon + \mu)}{\varepsilon k(\mu\theta - \varepsilon\theta - \mu)} & 0 \end{bmatrix}$$

Dari matriks $J(e_2)$ diperoleh trace dan determinan sebagai berikut

$$\text{trace}(J(e_2)) = \frac{\mu(\eta\mu - \eta\varepsilon - k\mu + k\varepsilon - 2\mu)}{k(\mu\theta - \varepsilon\theta - \mu)(\mu - \varepsilon)} + \frac{\mu(\eta\mu - \eta\varepsilon - \mu)(k\mu - k\varepsilon + \mu)(\theta - 1)}{\varepsilon k(\mu\theta - \varepsilon\theta - \mu)^2}$$

$$\det(J(e_2)) = -\frac{\mu(\eta\mu - \eta\varepsilon - \mu)(k\mu - k\varepsilon + \mu)}{\varepsilon k(\mu\theta - \varepsilon\theta - \mu)}$$

Titik kesetimbangan e_2 stabil asimtotik lokal jika $\text{trace}(J(e_2)) < 0$ dan $\det(J(e_2)) > 0$.

Berdasarkan syarat eksistensi titik kesetimbangan e_2 diperoleh $\det(J(e_2)) > 0$. Selanjutnya,

$\text{trace}(J(e_2)) < 0$ jika

$$\frac{\mu(\eta\mu - \eta\varepsilon - k\mu + k\varepsilon - 2\mu)}{k(\mu\theta - \varepsilon\theta - \mu)(\mu - \varepsilon)} < -\frac{\mu(\eta\mu - \eta\varepsilon - \mu)(k\mu - k\varepsilon + \mu)(\theta - 1)}{\varepsilon k(\mu\theta - \varepsilon\theta - \mu)^2}$$

dengan $\eta > k - \frac{2\mu}{\varepsilon - \mu}$.

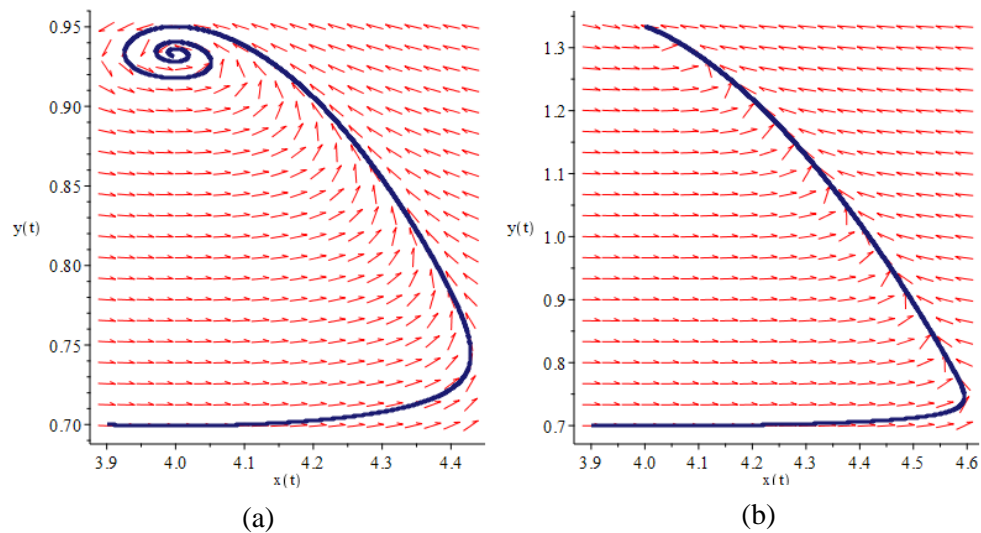
4. Simulasi Numerik

Simulasi numerik diberikan untuk menggambarkan perilaku dinamik model mangsa pemangsa dalam jangka waktu tertentu. Pada bagian ini, simulasi dilakukan pada titik kesetimbangan koeksistensi yaitu kondisi di mana kedua populasi dapat bertahan dan tidak punah. Simulasi model (2.2) menggunakan parameter yang memenuhi syarat kestabilan titik kesetimbangan koeksistensi yaitu sebagai berikut.

$$k = 5, \theta = 0.5, \varepsilon = 0.25, \mu = 0.2 \quad (4.1)$$

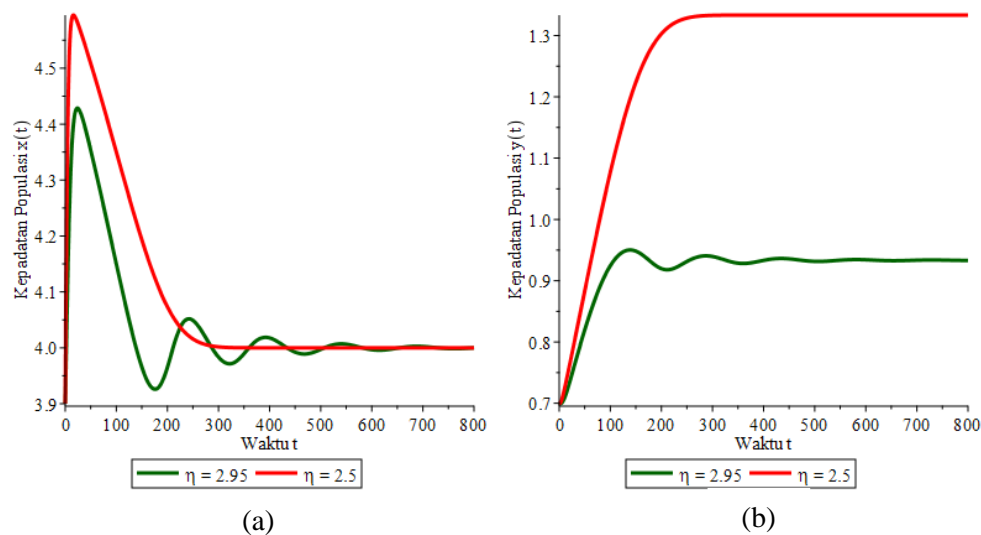
4.1 Efek Allee Kuat

Untuk mengetahui pengaruh efek Allee kuat terhadap kepadatan populasi mangsa dan pemangsa digunakan nilai ambang batas efek Allee (η) yang divariasikan. Pertama, ketika $\eta = 2.95$ diperoleh titik kesetimbangan $E_3 = (4, 0.93333)$. Nilai eigen yang bersesuaian yaitu $\lambda_1 = -0.00652 + 0.04217I$ dan $\lambda_2 = -0.00652 - 0.04217I$. Karena bagian real dari nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ maka titik kesetimbangan $E_3 = (4, 0.93333)$ bersifat stabil asimtotik lokal. Kedua, ketika $\eta = 2.5$ diperoleh titik kesetimbangan $E_3 = (4, 1.33333)$. Nilai eigen yang bersesuaian yaitu $\lambda_1 = -0.04741 + 0.02047I$ dan $\lambda_2 = -0.04741 - 0.02047I$. Karena bagian real dari nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ maka titik kesetimbangan $E_3 = (4, 1.33333)$ bersifat stabil asimtotik lokal.



Gambar 4.1. Potret Fase Populasi Mangsa (x) dan Pemangsa (y) dengan
(a) $\eta = 2.95$ dan (b) $\eta = 2.5$.

Potret fase pada Gambar 4.1 menunjukkan bahwa ketika diberikan nilai ambang batas efek Allee $\eta = 2.95$ dan $\eta = 2.5$ dengan nilai awal $x(0) = 3.9$ dan $y(0) = 0.7$, diperoleh titik kesetimbangan E_3 bersifat stabil di mana solusi bergerak mendekati titik kesetimbangan.



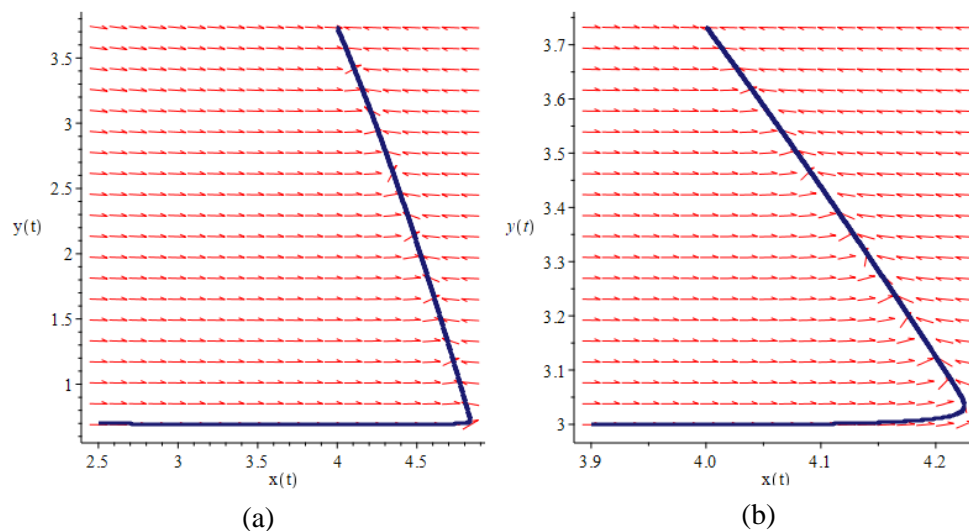
Gambar 4.2. Kurva Solusi Populasi (a) Mangsa (x) dan (b) Pemangsa (y) dengan Kondisi Awal $x(0) = 3.9$ dan $y(0) = 0.7$.

Kurva solusi menunjukkan bahwa semakin besar nilai ambang batas efek Allee, maka kekonvergenan solusi menuju titik kesetimbangan akan semakin lama dan cenderung terjadi osilasi. Berdasarkan hasil numerik, ketika kondisi awal kepadatan populasi mangsa berada di atas ambang batas Allee dan lebih besar dari kepadatan populasi pemangsa maka mangsa akan mengalami tingkat pertumbuhan positif dan populasi akan meningkat. Hal ini dapat dilihat pada gambar 4.2. (a) di mana kepadatan populasi mangsa mengalami peningkatan yang signifikan di

awal waktu, sedangkan kepadatan populasi pemangsa pada gambar 4.2. (b) juga mengalami peningkatan dikarenakan adanya interaksi antar mangsa dan pemangsa. Kemudian pada interval waktu tertentu, kepadatan populasi mangsa mengalami penurunan dikarenakan interaksi tersebut dan akhirnya kedua populasi konvergen menuju titik kesetimbangan. Kekonvergenan tersebut menunjukkan bahwa kedua populasi mangsa dan pemangsa dapat hidup berdampingan dan tidak akan punah sampai waktu t menuju tak terhingga.

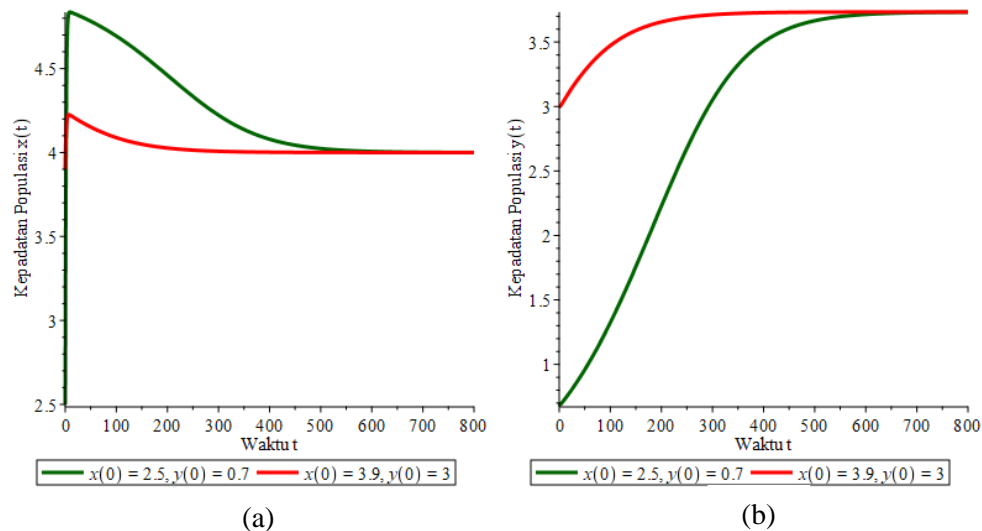
4.2 Efek Allee Lemah

Dengan menggunakan parameter pada persamaan (4.1) dan $\eta = -0.2$, diperoleh titik kesetimbangan $e_2 = (4, 3.73333)$. Nilai eigen yang bersesuaian yaitu $\lambda_1 = -0.57244$ dan $\lambda_2 = -0.01304$. Karena nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ maka titik kesetimbangan e_2 bersifat stabil asimtotik lokal. Perilaku kurva solusi di sekitar titik kesetimbangan dengan nilai awal yang berbeda ditunjukkan pada gambar berikut.



Gambar 4.3. Potret Fase Populasi Mangsa (x) dan Pemangsa (y) dengan Kondisi Awal
(a) $(x(0), y(0)) = (2.5, 0.7)$ dan (b) $(x(0), y(0)) = (3.9, 3)$.

Potret fase pada Gambar 4.3 menunjukkan bahwa ketika diberikan nilai parameter efek Allee $\eta = -0.2$, diperoleh titik kesetimbangan e_2 bersifat stabil di mana solusi bergerak mendekati titik kesetimbangan.



Gambar 4.4. Kurva Solusi Populasi (a) Mangsa (x) dan (b) Pemangsa (y) dengan $\eta = -0.2$.

Pada gambar 4.4 dapat dilihat bahwa pergerakan kurva solusi menuju titik kesetimbangan e_2 menunjukkan pola yang cenderung sama meskipun dengan kondisi awal yang berbeda. Ketika kondisi awal populasi cukup kecil yaitu $x(0) = 2.5$ dan $y(0) = 0.7$, solusi bergerak menuju titik kesetimbangan e_2 dan konvergen dengan interval waktu yang lebih lama. Selanjutnya, ketika kondisi awal populasi cukup dekat dengan titik kesetimbangan e_2 yaitu $x(0) = 3.9$ dan $y(0) = 3$, solusi bergerak menuju titik kesetimbangan e_2 dan konvergen dengan interval waktu yang lebih cepat. Hal ini bersesuaian dengan hasil analisis dinamik model untuk kasus efek Allee lemah, di mana tidak ada ambang batas yang harus dilampaui agar populasi dapat bertahan sehingga untuk setiap kondisi awal bagaimanapun, populasi mangsa akan tetap mengalami pertumbuhan positif dan terus meningkat.

Kurva solusi pada gambar 4.4. (a) menunjukkan bahwa kepadatan populasi mangsa mengalami peningkatan yang signifikan di awal waktu, begitupun dengan kepadatan populasi pemangsa pada gambar 4.4. (b) juga mengalami peningkatan dikarenakan adanya interaksi antar mangsa dan pemangsa. Kemudian pada interval waktu tertentu, kepadatan populasi mangsa mengalami penurunan dikarenakan interaksi tersebut dan akhirnya kedua populasi konvergen menuju titik kesetimbangan.

5. Kesimpulan

Pada artikel ini dibahas model mangsa pemangsa dengan efek Allee ganda pada pertumbuhan populasi mangsa dan fungsi respon Holling tipe II untuk menggambarkan interaksi antar populasi mangsa dan pemangsa. Dari hasil analisis dinamik diperoleh titik kesetimbangan trivial untuk kasus efek Allee kuat bersifat stabil asimtotik lokal sedangkan untuk kasus efek Allee lemah bersifat tidak stabil pelana. Selanjutnya, titik kesetimbangan batas dan titik kesetimbangan koeksistensi populasi mangsa dan pemangsa stabil asimtotik lokal jika memenuhi syarat parameter yang telah ditentukan. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa titik kesetimbangan koeksistensi untuk kedua populasi stabil asimtotik baik ketika populasi mengalami efek Allee

kuat maupun efek Allee lemah. Hal ini menunjukkan bahwa eksistensi dari populasi mangsa dan pemangsa dapat dipertahankan. Simulasi numerik di sekitar titik kesetimbangan menunjukkan bahwa nilai ambang batas efek Allee mempengaruhi pertumbuhan populasi mangsa ketika populasi mengalami efek Allee kuat. Pertumbuhan populasi mangsa juga bergantung pada kondisi awal kepadatan populasi mangsa dan pemangsa. Selanjutnya, ketika populasi mangsa mengalami efek Allee lemah, tidak ada ambang batas yang harus dilampaui agar populasi dapat bertahan sehingga untuk setiap kondisi awal bagaimanapun, populasi tidak akan mengalami kepunahan.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Allee, W. C., 1931. *Animal Aggregations. A Study in General Sociology*. Chicago, University of Chicago Press.
- [2] Barclay, H. & Mackauer, M., 1980. The Sterile Insect Release Method for Pest Control: A Density-Dependent Model. *Environmental Entomology*, 9: 810-817.
- [3] Berec, L., Angulo, E. & Courchamp, F., 2007. Multiple Allee Effects and Population Management. *Trends in Ecology and Evolution*, Vol. 22, No. 4, 185-191.
- [4] Courchamp, F., Berec, L. & Gascoigne, J., 2009. *Allee Effects in Ecology and Conservation*. New York, Oxford University Press.
- [5] Courchamp, F., Clutton-Brock, T. & Grenfell, B., 1999. Inverse Density Dependence and the Allee Effect. *Trends in Ecology and Evolution*, Vol. 14, 405-410.
- [6] Dennis, B., 1989. Allee Effects: Population Growth, Critical Density, and the Chance of Extinction. *Natural Resource Modeling*, Vol. 3, No. 4, 481-538.
- [7] Gonzalez-Olivares, E., dkk., 2011. Consequences of Double Allee Effect on the Number if Limit Cycle in a Predator-Prey Model. *Computers and Mathematics with Applications*, 62: 3449-3463.
- [8] Holling, C. S., 1959. Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism. *The Canadian Entomologist*. Vol. 91, No. 7, 385-398.
- [9] Kuussaari, M., Saccheri, I., Camara, M. & Hanski, I., 1998. Allee Effect and Population Dynamics in the Glanvillee Fritillary Butterfly. *Oikos*, 82: 384-392.
- [10] Liu, X. & Dai, B., 2017. Dynamics of a Predator-Prey Model with Double Allee Effects and Impulse. *Nonlinear Dyn*, 88: 685-701.
- [11] Pal, P. J. & Saha, T., 2015. Qualitative Analysis of a Predator-Prey System with Double Allee Effect in Prey. *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 73, 36-63.
- [12] Panigoro, H. S. & Rahmi, E., 2018. Model Leslie-Gower dengan Efek Allee Aditif: Gangguan Periodik pada Pemanenan Proposional terhadap Predator. *Prosiding Konferensi Nasional Matematika (KNM)*, Universitas Brawijaya Malang, 24-26 Juli 2018, hal. 419-426.
- [13] Pribylova, L. & Peniaskova, A., 2017. Foraging Facilitation among Predators and Its Impact on The Stability of Predator-Prey Dynamics. *Ecological Complexity*, Vol. 29, 30-39.

- [14] Singh, M. K., Bhadauria, B. S. & Singh, B.K., 2018. Bifurction analysis of modified Leslie-Gower predator-prey model with double Allee effect. *Ain Shams Engineering Journal*, Vol. 9, No. 4, 1263-1277.
- [15] Stephens, P. A. & Sutherland, W. J., 1999. Consequences of the Allee Effect for Behaviour, Ecology and Conservation. *Trends in Ecology and Evolution*, Vol. 14, No. 10, 401-405.
- [16] Taylor, C. M. & Hastings, A., 2005. Allee Effects in Biological Invasions. *Ecology Letters*, 8: 895-908.
- [17] Tian, X. & Xu, R., 2011. Global Dynamics of a Predator-Prey System with Holling Type II Functional Response. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, Vol. 16, No. 2, 242-253.
- [18] Wang, L. & Xu, R., 2013. Global Dynamics of a Predator-Prey Model with Stage Structure and Delayed Predator Response. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, Vol. 2013, 1-10.
- [19] Wang, M. & Kot, M., 2001. Speed of Invasion in a Model with Strong or Weak Allee Effects. *Mathematical Biosciences*, 171: 83-97.
- [20] Yusrianto, Toaha, S. & Kasbawati, 2019. Analisis Kestabilan Model Mangsa Pemangsa dengan Pemanenan Ambang Batas pada Populasi Pemangsa. *Jurnal Matematika, Statistika & Komputasi*, Vol. 16, No. 1, 97-106.