

Stability and Bifurcation Analysis of Mathematical Models of Meningitis Transmission with Vaccination and treatment

Analisis Kestabilan dan Bifurkasi pada Model Matematika Penyebaran Penyakit Meningitis dengan Perlakuan Vaksinasi dan Pengobatan

Rabiatul Adawiyah^{1*}, Syamsuddin Toaha^{2*}, Kasbawati^{3*}

Abstract

Meningitis is an infectious disease that occurs in inflammation of the meninges and the spinal cord in consequence of bacteria and viruses. Vaccination and treatment using antibiotics is used to increase growth rate in infected people so that the spread rate can be reduced. This study aims to see the effect of vaccination and treatment using some compartments: susceptible, carrier, infected without symptoms, infected with symptoms, recovery without disability, and recovery with disability; show the sensitivity analysis in order to discover the parameter that affect basic reproduction number (R_0) and bifurcations analysis. The result from sensitivity found the relation between parameter and R_0 that can increase and decrease the R_0 value. This study also showed the influence of stability change from equilibrium point caused by the parameter β value change form bifurcations analysis. Models simulation show that the effect of vaccination and treatment for spread of meningitis can be handled.

Keywords: Model of Meningitis Disease, Sensitivity of R_0 , Bifurcations.

Abstrak

Meningitis adalah suatu penyakit menular yang terjadi pada peradangan meninges dan sumsum tulang belakang yang disebabkan oleh bakteri dan virus. Upaya vaksinasi dan pengobatan berupa pemberian antibiotik dilakukan untuk meningkatkan laju penyembuhan bagi individu terinfeksi sehingga menekan laju penyebaran penyakit meningitis pada suatu populasi. Tujuan dari penelitian ini ialah untuk melihat pengaruh dari perlakuan vaksinasi dan pengobatan dengan memperhatikan beberapa kompartemen, yaitu *susceptible*, *carrier*, *infected without symptoms*, *infected with symptoms*, *recovery without disability*, dan *recovery with disability*, menunjukkan analisis sensitivitas untuk mengetahui parameter yang berpengaruh pada bilangan reproduksi dasar (R_0), dan analisis bifurkasi. Hasil yang diperoleh dari analisis sensitivitas, yaitu ditemukan hubungan parameter dengan R_0 yang dapat meningkatkan dan menurunkan nilai R_0 , dan analisis bifurkasi menunjukkan pengaruh perubahan kestabilan titik ekuilibrium akibat perubahan nilai parameter β . Simulasi model menunjukkan bahwa pemberian vaksinasi dan pengobatan dapat mengendalikan penyebaran penyakit meningitis

Kata kunci: Model Penyebaran Meningitis, Sensitivitas R_0 , Bifurkasi.

1. Pendahuluan

Model Matematika merupakan suatu cara untuk mengimplementasikan permasalahan kompleks ke dalam bentuk matematika [16]. Pemodelan matematika dapat digunakan untuk menganalisis penyebaran suatu penyakit. Fajri, N[7] telah membahas model penyebaran penyakit malaria yang memperhatikan efek dari vaksinasi. Selain itu, dinamika pemodelan populasi yang memiliki kecanduan terhadap penggunaan sosial media yang dikaji oleh Alemneh, dkk[3] dengan mempertimbangkan faktor strategi pembelajaran dan pendampingan terhadap individu yang memiliki kecanduan berat pada media sosial. Sementara itu, model yang dibahas oleh Afifah, dkk[1] tentang penyakit meningitis yang memperhatikan kestabilan titik kesetimbangan endemik dan non endemik dengan fungsi lyapunov.

*Program Studi Magister Matematika, FMIPA-UNHAS

Email address: ¹ade.rabiatul@gmail.com, ²syamsuddint@gmail.com, ³kasbawati@gmail.com



Meningitis adalah suatu penyakit berbahaya dan menular yang menyerang dan terjadinya peradangan pada meninges yang melindungi sistem syaraf pusat dan sumsum tulang belakang. Penyakit ini dapat menyebabkan kecacatan hingga kematian. Meningitis yang disebabkan oleh beberapa bakteri, yaitu *Haemophilus Inflenzae*, *Neisseria meningitidis*, dan *Streptococcus pneumoniae*, biasanya disebut meningitis bakterialis. Kasus lain terjadi pada Jirapa, Ghana, penyakit meningitis yang terjadi pada negara tersebut ialah meningitis yang disebabkan oleh penumpukan cairan pada otak dan terjadi keracunan darah[17]. Peristiwa endemik penyakit meningitis ini kebanyakan terjadi di negara-negara barat seperti Firlandia, Belanda, dan Amerika adalah 0.7-0.9 per 100.000 individu tiap tahunnya dalam sepuluh sampai dua puluh tahun belakangan ini. Negara-negara Afrika memiliki peristiwa endemik sebanyak 10-40 per 100.000 individu tiap tahunnya[6]. Pada negara-negara Asia Tenggara, peristiwa endemik sebanyak 18.3-24.6 per 100.000 individu dengan kejadian tertinggi jatuh pada Negara Thailand dan terendah pada Negara India [13].

Gejala utama yang dirasakan adalah sakit kepala yang sangat hebat, mual-muntah, leher kaku, demam tinggi, hingga sensitif terhadap cahaya. Rata-rata masa inkubasi virus adalah empat hari, bahkan dapat berkisar dua sampai sepuluh hari. Jika seseorang telah terpapar, sebaiknya dalam waktu 24 jam setelah diagnosa ditegakkan diberikan pengobatan berupa antibiotik. Pencegahan penyakit meningitis pada resiko tinggi dilakukan dengan cara meminimalkan kontak antara keluarga yang sakit dengan keluarga yang ada di rumah dan menjalankan karantina. Penanganan dengan tepat sangat diperlukan bagi individu yang terpapar dikarenakan penyakit ini merupakan penyakit yang berbahaya dan dapat menular dengan cepat. Oleh karena itu, perlu dilakukan berbagai upaya untuk mengontrol penyebaran penyakit meningitis di antaranya melakukan vaksin dan pengobatan berupa pemberian antibiotik[11]. Terdapat vaksin untuk melindungi individu yang memiliki resiko kontak langsung dengan individu terinfeksi meskipun terjadi *outbreak*. Antibiotik dapat diberikan pada seluruh individu yang mungkin terkena meningitis bahkan sebelum menunjukkan gejala[2].

Berdasarkan uraian tersebut, penyakit meningitis adalah suatu fenomena yang dapat dikaji melalui model matematika. Dalam pemodelan matematika ini, diharapkan dapat menggambarkan prediksi dan upaya pencegahan penyakit meningitis. Salma dan Ibrahim [8] telah mengkaji model matematika dari penyakit meningitis yang terjadi pada Sub-Sarahan Afrika dengan menggunakan 6 kompartemen, yaitu *Susceptible (S)*, *Vaccinated (V)*, *Carrier (C)*, *Infected (I)*, *Recovered with disability (R₁)*, dan *Recovered with disability (R₂)*. Penelitian ini memiliki fokus pada efektivitas vaksinasi yang dilakukan, namun setelah dilakukan evaluasi penyakit meningitis tetap ada. Hasil simulasi menunjukkan bahwa penyakit dapat dikendalikan jika vaksinasi bekerja dengan baik dan efisien. Pemodelan matematika penyakit meningitis juga dikaji oleh Asamoah, dkk [3] menggunakan 4 kompartemen, yaitu *susceptible (S)*, *carrier (C)*, *il (I)*, dan *recovered (R)*. Peneliti menggunakan *sensitivity heat map* dan spektrum sensitivitas parameter untuk menguji sensitivitas kompartemen dan parameter. Pada *sensitivity heat map* menunjukkan bahwa keadaan variabel yang paling sensitif untuk semua kompartemen selama tidak terjadi transmisi musiman adalah kompartemen pemulihan dan diikuti oleh kompartemen rentan. Sementara itu, peneliti menggunakan kontrol optimal untuk mempelajari dampak dari terbatasnya antibiotik dan tempat tidur rumah sakit.

Selanjutnya, pengembangan lain dari model akan memperlihatkan fakta pada kehidupan nyata bahwa penyakit meningitis merupakan penyakit menular yang membahayakan dapat mengakibatkan terjadinya disabilitas terhadap individu yang telah mendapatkan pengobatan[10]. Berdasarkan hal tersebut, dilakukan juga penambahan kompartemen berupa individu yang terjangkit tanpa adanya gejala (*Infected without Symptoms*), pengalihan kompartemen individu yang telah tervaksin (*Vaccinated*) menjadi parameter perlakuan vaksinasi dan pengobatan pada model yang akan dikembangkan.

Pada artikel ini akan dikembangkan menjadi enam kompartemen, yaitu *susceptible (S)*, *carrier (C)*, *infected without symptoms (I_A)*, *infected with symptoms (I_S)*, *recovery without disability (R₁)*, *recovery with disability (R₂)* dengan menambahkan perlakuan vaksinasi dan pengobatan. Selanjutnya, analisis model dimulai dari analisis titik ekuilibrium endemik dan non endemik, penentuan bilangan reproduksi dasar (R_0), analisis sensitivitas parameter, dan analisis bifurkasi.

2. Model Matematika

Laju Penyebaran penyakit meningitis biasanya terdiri dari kompartemen *susceptible (s)*, *carrier (c)*, *infected (i)*, dan *recovery (r)*. Pada artikel ini, model penyakit meningitis dikembangkan sehingga memiliki enam kompartemen, yaitu *susceptible (S)*, *carrier (C)*, *infected without symptoms (I_A)*, *infected with symptoms (I_S)*, *recovery without disability (R₁)*, *recovery with disability (R₂)*. Diasumsikan bahwa setiap individu yang lahir sehat dan rentan terhadap

penyakit meningitis dengan laju Λ ke dalam kompartemen S . Populasi S yang mendapatkan perlakuan vaksinasi mendapatkan kekebalan sementara dengan laju $\beta\tau_1$ ke dalam kompartemen C dan yang gagal mendapatkan kekebalan dengan laju $\beta(1-\tau_1)$ ke dalam kompartemen I_A . Diasumsikan C hanya membawa virus tanpa terinfeksi karena memiliki kekebalan sementara sehingga dapat berpindah ke kompartemen (R_1) dengan laju perpindahan ϵ dan populasi yang tidak memiliki kekebalan tubuh akan terinfeksi dengan menunjukkan gelajanya dengan laju δ ke dalam kompartemen I_S . Individu yang terkena infeksi namun belum menunjukkan gejala akan menyebar dalam masa inkubasi virus selama beberapa hari dan kemudian menunjukkan gejala sehingga berpindah ke kompartemen I_S dengan laju ω .

Selanjutnya, individu I_S yang telah terinfeksi akan diberikan perlakuan berupa pengobatan dengan waktu dan penanganan yang tepat akan berpindah ke dalam kompartemen R_1 dengan laju $\chi\tau_2$. Namun individu yang mendapatkan penanganan yang terlambat sehingga dapat menyebabkan disabilitas akan berpindah ke kompartemen R_2 dengan laju $\chi(1-\tau_2)$. Kelompok populasi yang telah sembuh (R_1 dan R_2) yang memiliki *side effect* disabilitas ataupun tidak memiliki laju perpindahan yang sama menuju kompartemen S dan tetap rentan terkena infeksi sehingga kedua kelompok populasi tersebut masuk ke dalam kompartemen S dengan laju yang sama, yaitu ψ . Serta diasumsikan pula terjadi kematian alami di setiap kelompok individu dengan laju μ . Model matematika penyebaran penyakit meningitis diberikan oleh persamaan (2.1).

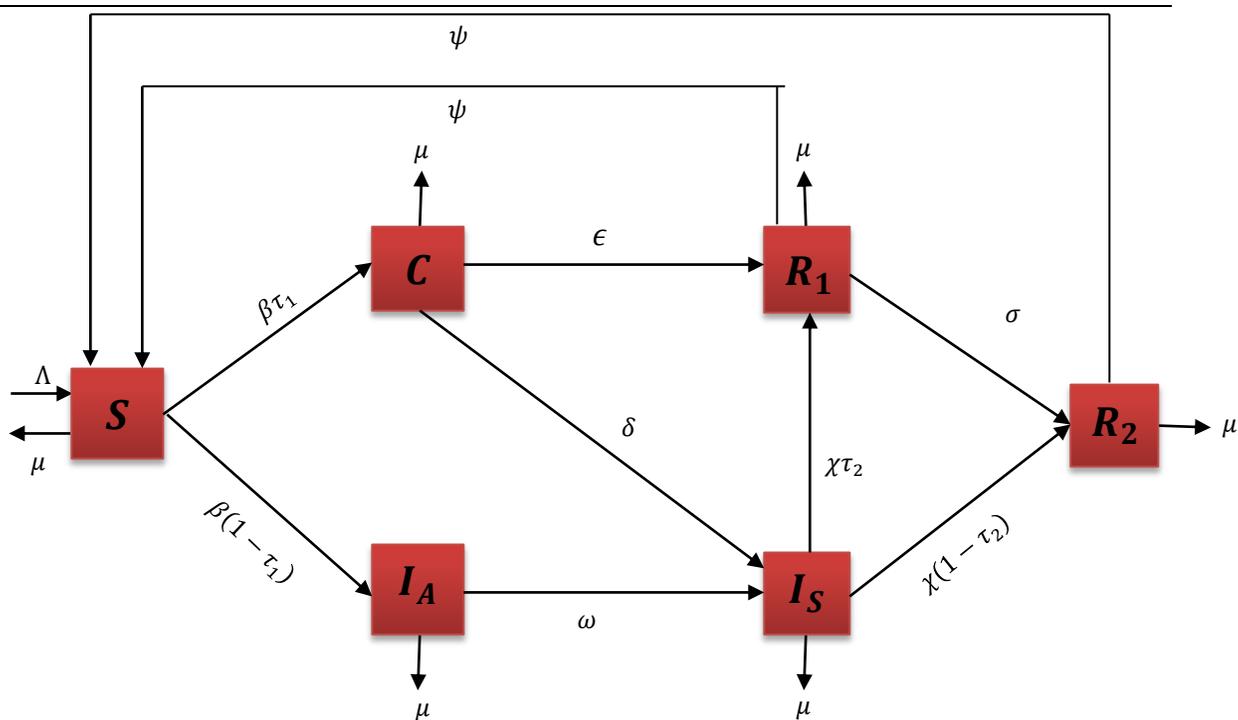
$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \Lambda + \psi(R_1 + R_2) - \beta S \frac{I_S}{N} - \mu S, \\
 \frac{dC}{dt} &= \tau_1 \beta S \frac{I_S}{N} - (\mu + \epsilon + \delta)C, \\
 \frac{dI_A}{dt} &= (1 - \tau_1) \beta S \frac{I_S}{N} - (\mu + \omega)I_A, \\
 \frac{dI_S}{dt} &= \omega I_A + \delta C - (\mu + \chi)I_S, \\
 \frac{dR_1}{dt} &= \epsilon C + \tau_2 \chi I_S - (\mu + \psi + \sigma)R_1, \\
 \frac{dR_2}{dt} &= (1 - \tau_2) \chi I_S + \sigma R_1 - (\mu + \psi)R_2,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

total populasi $N = S + C + I_A + I_S + R_1 + R_2$ dengan $\frac{dS}{dt}, \frac{dC}{dt}, \frac{dI_A}{dt}, \frac{dI_S}{dt}, \frac{dR_1}{dt}$, dan $\frac{dR_2}{dt}$ berturut-turut merupakan laju perubahan populasi rentan, pembawa virus/bakteri, terinfeksi tanpa gejala, terinfeksi dengan gejala, sembuh tanpa disabilitas, sembuh disertai disabilitas terhadap waktu. Nilai parameter dalam persamaan (2.1) diasumsikan bernilai positif. Secara skematis proses penyebaran penyakit meningitis dapat dilihat pada Gambar 2.1 serta keterangan pada Tabel 2.1 sebagai berikut.

Tabel 2.1 Keterangan Variabel dan Parameter Sistem Persamaan (2.1).

Simbol	Deskripsi	Nilai	Satuan	Referensi
$N(t)$	Total populasi pada waktu t	-	Orang	-
$S(t)$	Kelompok individu yang rentan terkena penyakit meningitis pada waktu t	-	Orang	-
$C(t)$	Kelompok individu pembawa bakteri atau virus meningitis pada waktu t	-	Orang	-
$I_A(t)$	Kelompok individu terinfeksi tanpa gejala pada waktu t	-	Orang	-
$I_S(t)$	Kelompok individu terinfeksi dengan gejala pada waktu t	-	Orang	-
$R_1(t)$	Kelompok individu yang sembuh sementara setelah mendapatkan pengobatan pada waktu t	-	Orang	-
$R_2(t)$	Kelompok individu yang sembuh setelah mendapatkan pengobatan tetapi mengalami disabilitas pada waktu t	-	Orang	-
Λ	Laju pertambahan individu rentan melalui proses kelahiran	100-10000	Orang/tahun	[4]
μ	Laju kematian alami	0.002	1/tahun	Asumsi

β	Laju perpindahan kelompok individu S ke I_A	0.2-0.88	1/tahun	[4]
ϵ	Laju perpindahan kelompok individu C ke R_1	0.3	1/tahun	[8]
ψ	Laju perpindahan kelompok individu R_1 dan R_2 ke S	0.5	1/tahun	[8]
δ	Laju perpindahan kelompok individu C ke I_S	0.1-0.52	1/tahun	[4]
ω	Laju perpindahan kelompok individu I_A ke I_S	0.2	1/tahun	[8]
σ	Laju perpindahan kelompok individu R_1 ke R_2	0.15	1/tahun	[8]
χ	Laju perpindahan kelompok individu I_S ke R_1	0.1-0.9	1/tahun	[4]
τ_1	Proporsi perlakuan vaksinasi	0-1	-	[4]
τ_2	Proporsi perlakuan pengobatan	0-1	-	[4]



Gambar 2.1. Skema Penyebaran Penyakit Meningitis

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Titik Ekuilibrium Sistem

Pada bagian ini, akan dilakukan analisis dengan menentukan titik ekuilibrium endemik dan non endemik pada sistem persamaan (2.1). Keadaan titik tetap ekuilibrium model dipenuhi ketika $\frac{dS}{dt} = \frac{dC}{dt} = \frac{dI_A}{dt} = \frac{dI_S}{dt} = \frac{dR_1}{dt} = \frac{dR_2}{dt} = 0$. Titik ekuilibrium non endemik adalah suatu keadaan dimana semua kompartemen yang berhubungan dengan penyakit bernilai nol atau pada saat itu tidak terjadi penyebaran penyakit di suatu poulasi, diperoleh titik ekuilibrium non endemik, yaitu $E_1 = (S, C, I_A, I_S, R_1, R_2) = (\frac{\pi}{\mu}, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Titik ekuilibrium endemik adalah suatu keadaan terjadi penyebaran penyakit pada suatu popuasi dan terjadi pada saat $C > 0, I_A > 0$ dan $I_S > 0$. Dari sistem persamaan (2.1) diperoleh titik ekuilibrium endemik, yaitu $E_2(S^*, C^*, I_A^*, I_S^*, R_1^*, R_2^*) = (\frac{\Lambda + \psi(R_1^* + R_2^*)}{\beta I_S^* + \mu}, \frac{\tau_1 \beta S^* I_S^*}{(\mu + \epsilon + \delta)}, \frac{(1 - \tau_1) \beta S^* I_S^*}{\mu + \omega}, I_S^*, \frac{\epsilon C^* + \tau_2 \chi I_S^*}{\mu + \psi + \sigma}, \frac{(1 - \tau_2) \chi I_S^* + \sigma R_1^*}{\mu + \psi})$.

3.2 Penentuan Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar yang dinotasikan dengan R_0 merupakan nilai harapan banyaknya populasi rentan yang menjadi terinfeksi selama masa infeksi berlangsung. Penentuan bilangan R_0 dilakukan dengan menggunakan pendekatan matriks *The Next Generation* berdasarkan subpopulasi terinfeksi pada persamaan (2.1), yaitu:

$$\frac{dC}{dt} = \tau_1 \beta S \frac{I_S}{N} - (\mu + \epsilon + \delta)C,$$

$$\begin{aligned}\frac{dI_A}{dt} &= (1 - \tau_1)\beta S \frac{I_S}{N} - (\mu + \omega)I_A, \\ \frac{dI_S}{dt} &= \omega I_A + \delta C - (\mu + \chi)I_S.\end{aligned}$$

Misalkan $F_i(x)$ adalah laju penambahan infeksi baru pada kompartemen C dan $V_i(x)$ adalah laju perpindahan individu pada kompartemen C , sehingga diperoleh $F_i(x)$ dan $V_i(x)$ sebagai berikut:

$$F_i(x) = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta\tau_1 S \frac{I_S}{N} \\ \beta(1 - \tau_1) S \frac{I_S}{N} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$V_i(x) = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mu + \epsilon + \delta)C \\ (\mu + \omega)I_A \\ \omega I_A + \delta C - (\mu + \chi)I_S \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Dengan demikian, matriks jacobi dari persamaan (3.1) dan (3.2) diperoleh:

$$F = \frac{\partial F_i(E_1)}{\partial (C, I_A, I_S)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \beta\tau_1 \frac{\Lambda}{\mu} \\ 0 & 0 & \beta(1 - \tau_1) \frac{\Lambda}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$V = \frac{\partial V_i(E_1)}{\partial (C, I_A, I_S)} = \begin{bmatrix} (\mu + \epsilon + \delta) & 0 & 0 \\ 0 & (\mu + \omega) & 0 \\ -\omega & -\delta & (\mu + \chi) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Oleh karena itu, bilangan reproduksi dasar (R_0) diperoleh:

$$R_0 = \frac{\Lambda\beta(\delta\mu\tau_1 - \mu\omega\tau_1 - \omega\tau_1\epsilon + \delta\omega + \mu\omega + \omega\epsilon)}{\mu(\chi\delta\mu + \chi\delta\omega + \chi\mu^2 + \chi\mu\omega + \chi\omega\epsilon + \delta\mu^2 + \delta\mu\omega + \mu^3 + \mu^2\omega + \mu^2\epsilon + \mu\omega\epsilon)} \quad (3.5)$$

3.3 Analisis Sensitivitas

Analisis sensitivitas dilakukan untuk menunjukkan pengaruh parameter-parameter terhadap bilangan reproduksi dasar.

Definisi 3.1 *Normalisasi indeks sensitivitas diperoleh dengan normalisasi dari variabel v yang terdiferensial oleh parameter p , yang didefinisikan sebagai berikut;*

$$C_p^v = \frac{\partial v}{\partial p} \times \frac{p}{v} \quad (3.6)$$

di mana v adalah variabel yang akan dianalisis dengan p [2].

Selanjutnya, berdasarkan model penyebaran penyakit meningitis, variabel yang akan diukur adalah bilangan R_0 terhadap parameter yang mempengaruhi. Adapun hasil analisis sensitivitas sebagai berikut:

$$\begin{aligned}C_\Lambda^{R_0} &= \frac{\partial R_0}{\partial \Lambda} \times \frac{\Lambda}{R_0} = 1 \\ C_\beta^{R_0} &= \frac{\partial R_0}{\partial \beta} \times \frac{\beta}{R_0} = 1 \\ C_{\tau_1}^{R_0} &= \frac{\partial R_0}{\partial \tau_1} \times \frac{\tau_1}{R_0} = -\frac{(\mu\omega + \omega\epsilon - \delta\mu)\tau_1}{\delta\mu\tau_1 - \mu\omega\tau_1 - \omega\tau_1\epsilon + \delta\omega + \mu\omega + \omega\epsilon} \\ C_\chi^{R_0} &= \frac{\partial R_0}{\partial \chi} \times \frac{\chi}{R_0} \\ &= -\frac{(\delta\mu + \delta\omega + \mu^2 + \mu\omega + \mu\epsilon + \omega\epsilon)\chi}{\chi\delta\mu + \chi\delta\omega + \chi\mu^2 + \chi\mu\omega + \chi\mu\epsilon + \chi\omega\epsilon + \delta\mu^2 + \delta\mu\omega + \mu^3 + \mu^2\omega + \mu^2\epsilon + \mu\omega\epsilon}\end{aligned} \quad (3.7)$$

dan untuk parameter lainnya dilakukan dengan cara yang sama. Selanjutnya indeks parameter yang diperoleh dengan mensubstitusi nilai parameter pada Tabel 2.1 akan disajikan pada Tabel 3.1.

Tabel 3.1. Ekspresi Sensitivitas Parameter terhadap R_0

Parameter (P)	Nilai R_0 ($P + 10\%$)	Nilai R_0 ($P - 10\%$)	Indeks
Λ	0,7983971240	0,6532340105	Positif
β	0,7983971240	0,65323201065	Positif
τ_1	0,7266705047	0,07269147726	Negatif
χ	0,6619004388	0,8057918385	Negatif
δ	0,7268702769	0,7267040654	Positif
μ	0,6588451525	0,8100230308	Negatif
ω	0,7275228660	0,7260742616	Positif
ϵ	0,7267955353	0,7269497791	Negatif

3.4 Analisis Bifurkasi

Bifurkasi adalah suatu perubahan kestabilan sistem akibat adanya perubahan parameter. Pada bagian ini, akan dilakukan analisis bifurkasi pada parameter β . Persamaan bifurkasi ditentukan oleh $\frac{dI_S}{dt} = \omega I_A^* + \delta C^* - (\mu + \chi)I_S^* = 0$ dengan mensubstitusi I_A^* dan C^* . Maka, diperoleh persamaan bifurkasi untuk parameter β sebagai berikut:

$$F(I_S) = AI_S^{*2} + BI_S^* + C = 0 \quad (3.8)$$

dengan,

$$A = bd\omega\psi j\chi\tau_2 + ad\omega\psi j\chi(1 - \tau_2) + d\omega\psi j\sigma\chi\tau_2 + bf\psi\delta\beta\tau_1\chi\tau_2 + af\psi\delta\beta\tau_1\chi(1 - \tau_2) + f\psi\delta\beta\tau_1\sigma\chi\tau_2 + fg\psi b\epsilon\beta\tau_1 + fg\psi\sigma\epsilon\beta\tau_1 - abdfg\beta$$

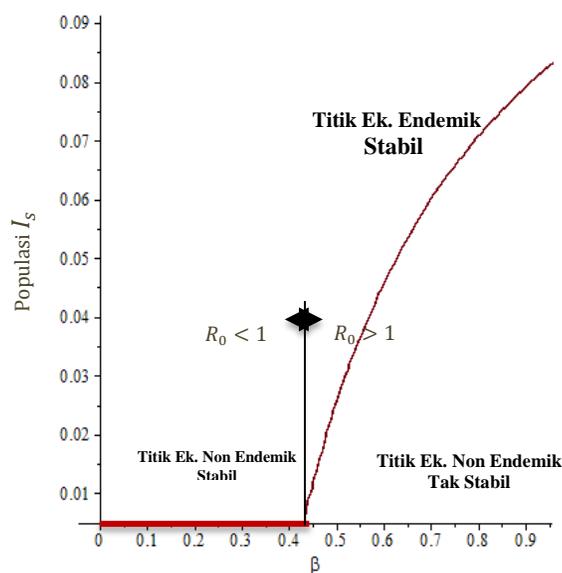
$$B = abdj\omega\Lambda + abf\Lambda\delta\beta\tau_1 - abdfg\mu$$

$$C = 0$$

Selanjutnya, parameter β dianggap sebagai peubah atau variabel dari persamaan bifurkasi sehingga ketika $R_0 = 1$, diperoleh

$$\beta^* = \frac{\mu(\chi\delta\mu + \chi\delta\omega + \chi\mu^2 + \chi\mu\omega + \chi\omega\epsilon + \delta\mu^2 + \delta\mu\omega + \mu^3 + \mu^2\omega + \mu^2\epsilon + \mu\omega\epsilon)}{\Lambda(\delta\mu\tau_1 - \mu\omega\tau_1 - \omega\tau_1\epsilon + \delta\omega + \mu\omega + \omega\epsilon)} \quad (3.9)$$

dengan bantuan *software Maple*, diperoleh diagram bifurkasi sebagai berikut:



Gambar 3.1 Diagram Bifurkasi

Berdasarkan diagram yang diperoleh dapat diketahui bahwa pada saat $I_S^* = 0$ maka populasi I_S^* tidak ada atau tidak terjadi penyebaran penyakit meningitis, sedangkan pada saat $I_S^* \neq 0$ terjadi penyebaran penyakit meningitis. Berdasarkan analisis bifurkasi yang dihasilkan, yaitu bifurkasi maju. Bifurkasi maju terjadi ketika daerah $R_0 < 1$ tidak adanya penyebaran suatu penyakit yang terjadi. Sedangkan $R_0 > 1$ terdapat kestabilan terhadap titik ekuilibrium endemik sehingga menyebabkan terjadinya penyebaran suatu penyakit [7].

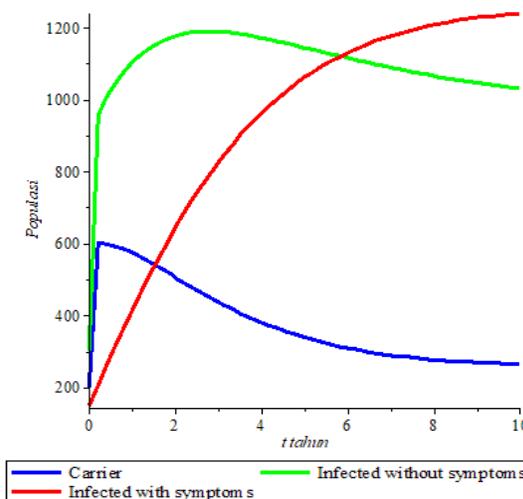
Simulasi dilakukan berdasarkan parameter β terhadap nilai R_0 . Pada saat $R_0 = 1$ nilai $\beta^* = 0.412772$, sehingga untuk mengidentifikasi nilai $R_0 < 1$ dapat dilakukan dengan mengambil nilai $\beta < \beta^*$, sebaliknya untuk nilai $R_0 > 1$ dapat dilakukan dengan mengambil nilai $\beta > \beta^*$, sehingga hasil interpretasi parameter β pada diagram bifurkasi, dapat dilihat pada tabel berikut.

Tabel 3.2. Interpretasi Parameter β terhadap Stabilitas Titik Ekuilibrium

Nilai β	Nilai R_0	T.E. Non Endemik	T.E. Endemik
0.2	0,4845284257	Stabil Asimtotik	Tidak Stabil
0.3	0.7267926385	Stabil Asimtotik	Tidak Stabil
0.4	0.9690568513	Stabil Asimtotik	Tidak Stabil
0.45	1.090188958	Tidak Stabil	Stabil Asimtotik
0.5	1.211321064	Tidak Stabil	Stabil Asimtotik
0.6	1.453585277	Tidak Stabil	Stabil Asimtotik
0.8	1.938113703	Tidak Stabil	Stabil Asimtotik

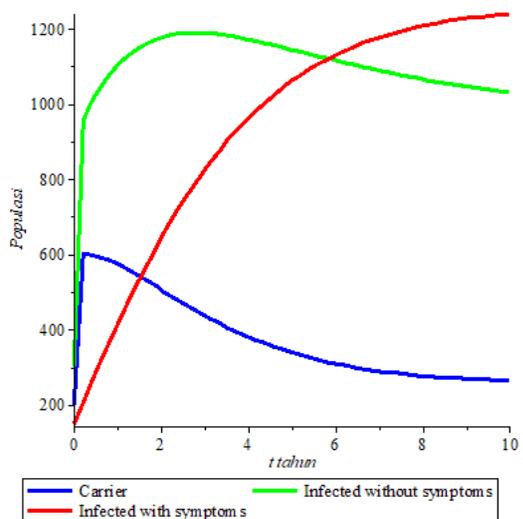
3.5 Simulasi Model

Simulasi model penyebaran penyakit meningitis untuk masing-masing populasi dilakukan dengan interpretasi parameter yang berpengaruh pada model tersebut. Dengan nilai awal $S(0) = 10.000, C = 200, I_A = 300, I_S = 150, R_1 = 1.500, R_2 = 100$. Pada Gambar 3.2 diberikan simulasi model dengan nilai parameter $\Lambda = 0.0005, \beta = 0.88, \tau_1 = 0.2, \chi = 0.15, \tau_2 = 0.5, \omega = 0.2, \mu = 0.002, \delta = 0.2, \psi = 0.5, \epsilon = 0.3, \sigma = 0.15$ dengan nilai parameter perlakuan vaksinasi dan pengobatan relatif rendah. Berdasarkan parameter tersebut diperoleh kestabilan pada titik ekuilibrium endemik yang artinya terjadinya penyebaran penyakit meningitis dalam suatu populasi.



Gambar 3.2 Grafik Subpopulasi Terinfeksi dengan Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik

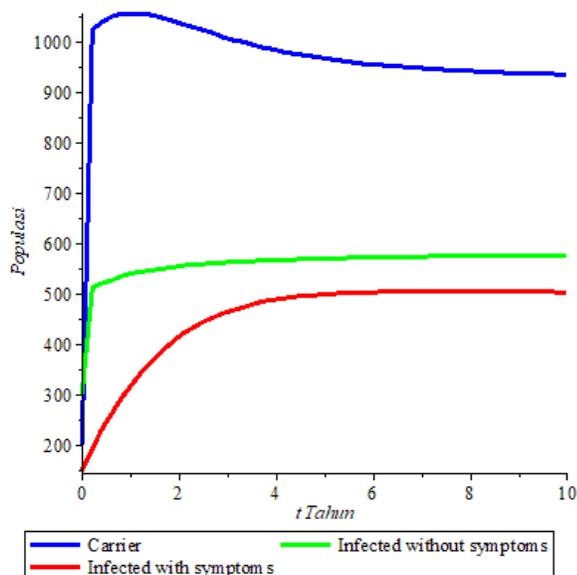
Selanjutnya, simulasi dengan menaikkan nilai interpretasi parameter vaksinasi dan pengobatan. Dengan parameter $\Lambda = 0.0005, \beta = 0.6, \tau_1 = 0.4, \chi = 0.2, \tau_2 = 0.6, \omega = 0.2, \mu = 0.002, \delta = 0.2, \psi = 0.5, \epsilon = 0.3, \sigma = 0.15$. Diperoleh kestabilan titik ekuilibrium non endemik.



Gambar 3.3 Grafik Subpopulasi Terinfeksi dengan Kestabilan Titik Ekuilibrium Non Endemik

Selanjutnya, simulasi dengan menaikkan nilai interpretasi parameter vaksinasi dan pengobatan. Dengan parameter $\Lambda = 0.0005, \beta = 0.5, \tau_1 = 0.8, \chi = 0.6, \tau_2 = 0.85, \omega =$

$0.2, \mu = 0.002, \delta = 0.2, \psi = 0.5, \epsilon = 0.3, \sigma = 0.15$. Diperoleh kestabilan titik ekuilibrium non endemik.



Gambar 3.4 Grafik Subpopulasi Terinfeksi dengan Kestabilan Titik Ekuilibrium Non Endemik

Gambar 3.2 menunjukkan bahwa rendahnya perlakuan vaksinasi dan pengobatan pada model penyebaran penyakit meningitis ini, populasi terinfeksi dengan gejala dan tanpa gejala sangat tinggi dan menyebabkan stabilnya titik ekuilibrium endemik sehingga penyebaran penyakit terus terjadi. Sedangkan, pada Gambar 3.3 ditingkatkannya perlakuan vaksinasi, populasi terinfeksi dengan gejala dan tanpa gejala semakin menurun jumlahnya sehingga diperoleh stabilitas pada titik ekuilibrium non endemik, maka penyebaran penyakit dapat dikendalikan. Selanjutnya pada Gambar 3.4 menunjukkan bahwa dengan meningkatkan lagi perlakuan vaksinasi dan pengobatan populasi terinfeksi semakin berkurang, dan populasi *carrier* terus bertambah akibat efektifitas vaksinasi yang memberikan kekebalan tubuh pada waktu t . Hal tersebut menunjukkan bahwa semakin tinggi proporsi serta efek dari perlakuan vaksinasi dan pengobatan maka semakin rendah jumlah populasi terinfeksi, penyakit meningitis di suatu populasi dapat dikendalikan penyebarannya.

4. Kesimpulan

Hasil analisis sensitivitas menunjukkan bahwa terdapat hubungan positif, yaitu laju kelahiran, interaksi populasi rentan, laju perpindahan populasi C menuju I_S , dan laju perpindahan populasi I_A menuju populasi I_S serta hubungan negatif pada parameter perlakuan vaksin, interaksi pengobatan, laju kematian, serta laju populasi C menuju populasi R_1 , yang artinya laju penyebaran akan meningkat dengan banyaknya jumlah orang yang berinteraksi dengan populasi terinfeksi dan dapat diturunkan laju penyebaran dengan memberikan perlakuan vaksinasi dan interaksi pengobatan terhadap populasi terinfeksi.

Pada analisis bifurkasi yang dilakukan dapat disimpulkan bahwa terdapat perubahan kestabilan terhadap titik ekuilibrium endemik dan non endemik akibat perubahan nilai parameter β , jika nilai $\beta < \beta^*$ maka diperoleh titik ekuilibrium non endemik stabil asimtotik, sedangkan jika nilai $\beta > \beta^*$ maka diperoleh titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik. Selanjutnya, simulasi yang dilakukan dengan pengaruh perlakuan vaksinasi dan pengobatan diperoleh dua titik ekuilibrium, yaitu endemik dan non endemik. Hasil simulasi menunjukkan bahwa ketika perlakuan vaksinasi dan pengobatan yang diberikan rendah, maka kondisi endemik dapat terjadi. Sedangkan dengan menaikkan nilai efektifitas vaksinasi 80% dan pengobatan 85% maka kondisi berubah menjadi non endemik. Hal ini berarti bahwa dengan memberikan perlakuan vaksinasi dan pengobatan dapat berpengaruh terhadap pengendalian penyebaran penyakit meningitis dengan berkurangnya populasi yang terinfeksi.

Daftar Pustaka

- [1] Afifah, I., 2019. Analisis Kestabilan Global Model Penyebaran Penyakit Meningitis dengan Menggunakan Fungsi Lyapunov. *Buletin Ilmiah Math, Stat, dan Terapannya*, Vol. 8, No. 4, 829-838.
- [2] Afolabi, M.A., Adewoye, K.S., Folorunso, A.I., Omoloye, M.A., 2021. A Mathematical Model on Transmission Dynamic of Meningococcal Meningitis. *IRE Journal*, Vol 4, No. 10.
- [3] Alemneh, H.T. & Alemu, N.Y., 2021. Mathematical Modelling with Optimal Control Analysis of Social Media Addiction. *KeAi Publishing*, Vol 6, No. 21, 405-419.
- [4] Asamoah, J.K.K., Nyabadza, F., Jin, Z., Bonyah, E., Khan, M.A., Li, M.Y., & Hayat, T., 2020. Backward bifurcation and Sensitivity Analysis for Bacterial Meningitis Transmission Dynamic with A Nonlinear Recovery Rate. *Chaos, Solitons, and Fractals*, Vol 140.
- [5] Asamoah, J.K.K., Nyabadza, F., Seidu, B., Chand, M., & Duta, H., 2018. Mathematical Modelling of Bacterial Meningitis Transmission Dynamic with Control Measures. *Computation and Mathematical Methods in Medicine*, 1-21.
- [6] Brauwer, M., Tunkel, A. & Van de Beek, D., 2010. Epidemiology, Diagnosis, and Antimicrobial Treatment of Acute Bacterial Meningitis. *Clinical Microbiology*, Vol 23, N. 3, 467-492.
- [7] Fajri, N., Sianturi, P., & Bakhtiar, T., 2015. Model Matematika SIS-SI dalam Penyebaran Penyakit Malaria dengan Vaksinasi Taksempurna. *Institut Pertanian Bogor*.
- [8] Gumel, A.B., 2012. Cause of Backward Bifurcations in some Epidemiological Models. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 395, No. 12, 355-365
- [9] Ibrahim, M.E. & Salma, O.A.A., 2017. A Mathematical Model for Meningitis Disease. *Red Sea University Journal*, Vol 2, No. 2, 467-472.
- [10] IDAI., 2015. *Melengkapi/mengejari Imunisasi (Bagian III)*. <https://www.idai.or.id/artikel/klinik/imunisasi/melengkapi-mengejar-imunisasi-bagian-iii> [3 Juni 2021].
- [11] Kementerian Kesehatan., 2013. *Selamatkan Jemaah Haji dan Umroh dari Bahaya Meningitis Meningokokus*. <https://www.kemkes.go.id/article/view/2277/selamatkan-jemaah-haji-dan-umroh-dari-bahaya-meningitis-meningokokus.html> [1 Juni 2021].
- [12] Kementerian Kesehatan., 2019. *Panduan Deteksi dan Respon Penyakit Meningitis Meningokokus*. https://infeksiemerging.kemkes.go.id/PANDUAN_DETEKSI_RESPON_MM [28 Desember 2021]
- [13] Maimati, N., Isa, M.Z., Rahimi, A., Kouadio, I.K., Ghazi, H.F. & Aljunid, S.M., 2012. Incidence of Bacterial Meningitis in South East Asia Region. *BMC Public Health*, Vol. 12, No. A30.
- [14] Martinez, M.J.F., Merino, E.G., Sanchez, E.G., Sanchez, J.E.G., Rey, A.M.D., & Sanchez G.R., 2013. A Mathematical Model to Study the Meningococcal Meningitis. *Procedia Computer Science*, Vol 18, 2492-2495.
- [15] Musa, S.S., Zhao, S., Hussaini, N., Habib, A.G., & He, D., 2019. Mathematical Modeling and Analsis of Meningococcal Meningitis Transmission Dynamic. *International Journal of Biomathematics* 2050006.
- [16] Side, S. & Rangkuti, Y.M., 2015. Pemodelan Matematika dan Solusi Numerik untuk Penularan Demam Berdarah. *Perdana Publising*.
- [17] WHO., 2018. *Meningitis Meningococcal*. <https://www.who.int/emergencies/diseases/meningitis/epidemiological/en/> [9 April 2021]
- [18] Wiah, E.N. & Adetunde, I.A., 2010. A Mathematical Model of Cerebrospinal Meningitis Epidemic: A Case Study for Jirapa District, Ghana. *KMITL Sci Tech J*, Vol 10, No. 2.