JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI e-ISSN: 2614-8811
Published by Departement of Mathematics, Hasanuddin University, Indonesia
https://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk/index

Vol. 19, No. 2, January 2023, pp. 304-316
DOI: 10.20956/j.v19i2.23263

The Construction of Armendariz Ring using Formal Triangle Matrix Ring

Konstruksi Gelanggang Armendariz menggunakan Gelanggang Matriks Segitiga Formal

Aidah Nabilah Anwar[1]*, Amir Kamal Amir[2*], Nurdin[3*]

[*]*Program Studi Magister Matematika, FMIPA-Universitas Hasanuddin, Indonesia*

Email: *aidahnabilahanwar.28@gmail.com*[1], *amirkamalamir@yahoo.com*[2], *nurdin1701@gmail.com*[3]

Received: 29 September 2022; Accepted: 23 November 2022; Published: 5 January 2023

Abstract

Trinion and Quaternion numbers are one of the *hypercomplex* numbers which is an extensions of the *complex* number. From Trinion and Quaternion numbers, a bimodule can be formed which is an ordered pair of Trinion and Quaternion. Furthermore, Trinion number, Quaternion number, and their bimodule can be formed into a 2×2 Formal Triangle Matrix. The Formal Triangle Matrix is better known as the Upper Triangle Matrix. Since Trinion number, Quaternion number and their bimodule are rings, then the Formal Triangle Matrix can be called as the Formal Triangular Matrix Ring. The purpose of this study is to construct the Armendariz Ring using the Formal Triangular Matrix Ring. The obtained results will show that the Formal Triangular Matrix Rings are the σ-Skew Armendariz Ring and the σ-Skew π-Armendariz Ring, where σ is a Ring Endomorphism and π is σ-derivation.

Keywords : Trinion, Quaternion, Bimodule, Formal Triangular Matrix Ring, Armendariz Ring.

Abstrak

Bilangan Trinion dan Quaternion adalah salah satu dari bilangan *hypercomplex* yang merupakan perluasan dari bilangan *complex.* Dari bilangan Trinion dan Quaternion dapat terbentuk suatu bimodul yang merupakan pasangan terurut dari Trinion dan Quaternion. Selanjutnya, bilangan Trinion, Quaternion dan bimodulnya dikemas kedalam bentuk Matriks Segitiga Formal yang berordo 2×2. Matriks Segitiga Formal lebih dikenal sebagai Matriks Segitiga Atas. Dikarenakan bilangan Trinion, Quaternion dan bimodulnya merupakan gelanggang, maka Matriks Segitiga Formal tersebut dapat disebut Gelanggang Matriks Segitiga Formal. Tujuan dari penelitian ini ialah untuk mengkonstruksi Gelanggang Armendariz menggunakan Gelanggang Matriks Segitiga Formal. Hasil yang akan diperoleh menunjukkan bahwa Gelanggang Matriks Segitiga Formal merupakan Gelanggang σ-Skew Armendariz dan Gelanggang σ-Skew π-Armendariz, dimana σ adalah endomorfisma Gelanggang Matriks Segitiga Formal dan π adalah σ derivatif.

Kata kunci : Trinion, Quaternion, Bimodul, Gelanggang Matriks Segitiga Formal, Gelanggang Armendariz

1. PENDAHULUAN

Dalam aljabar abstrak, bilangan *hypercomplex* adalah perluasan dari bilangan *complex* yang memiliki lebih dari satu bagian imajiner. Bilangan *hypercomplex* diantaranya ialah Trinion dan Quaternion. Trinion ($\mathbb{T}$) merupakan kombinasi linear dari satu bagian riil dan dua bagian imajiner. Himpunan bilangan Trinion dapat dituliskan dalam bentuk

$$\mathbb{T} = \{a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\},$$

dimana $\boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{j}^2 = -\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{ij} = \boldsymbol{ji} = -1$. Sedangkan, Quaternion ($\mathbb{H}$) merupakan kombinasi linear dari satu bagian riil dan tiga bagian imajiner. Himpunan bilangan Quaternion dapat dituliskan dalam bentuk

$$\mathbb{H} = \{q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k} \mid q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\},$$

dimana $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{-1}$.

Untuk penjelasan lebih lanjut mengenai Trinion dan Quaternion dapat dilihat pada [1] [9]. Dalam penelitian ini akan ditunjukkan proses pengkonstruksian Gelanggang Armendariz menggunakan Gelanggang Matriks Segitiga Formal. Namun, sebelumnya perlu diketahui definisi mengenai Bimodul, Gelanggang Polinomial Miring dan Gelanggang Armendariz. Penjelasan definisi berikut dapat dilihat pada [4],[8],[10] dan [11].

Definisi 1.1. *Matriks Segitiga Formal* ($\mathcal{T}$) *yang berordo* 2×2 *juga dikenal sebagai Matriks Segitiga Atas berordo* 2×2 *dengan bentuk sebagai berikut :*

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{pmatrix} \middle| \, a_1, a_2, a_3 \in R \right\}$$

dimana R adalah suatu gelanggang.

Definisi 1.2. *Suatu gelanggang polinom miring* $R[x;\sigma]$ *dengan* σ *adalah endomorfisma Gelanggang* R *disebut sebagai gelanggang* $\boldsymbol{\sigma}$ *-* ***skew Armendariz*** *jika dua polinomial* $f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i,\ g(x) = \sum_{j=0}^{m} g_j x^j \in R[x;\sigma]\backslash\{0\}$ *sedemikian sehingga* $f(x)g(x) = 0$, *maka* $f_i g_j = 0$ *untuk setiap* $0 \le i \le n$ *dan* $0 \le j \le m$.

Definisi 1.3. *Misalkan $R[x;\sigma,\delta]$ adalah suatu gelanggang polinom mirng dengan σ adalah endomorfisma gelanggang dan δ adalah σ - derivatif. Gelanggang R disebut sebagai* ***Gelanggang σ - skew π - Armendariz*** *jika dua polinomial $f(x),g(x) \in R[x;\sigma,\delta]\backslash\{0\}$ sedemikian sehingga $f(x)g(x) \in N(R[x;\sigma,\delta])$ dimana $N(R[x;\sigma,\delta])$ adalah himpunan semua elemen nilpoten dari $R[x;\sigma,\delta]$. Maka, $f_i g_j \in N(R[x;\sigma,\delta])$ untuk setiap $0 \le i \le n$ dan $0 \le j \le m$.*

2. HASIL DAN PEMBAHASAN

Diberikan bimodul yang merupakan pasangan terurut dari gelanggang Trinion dan Gelanggang Quaternion sebagai berikut.

Teorema 2.1. *Misalkan himpunan M adalah kumpulan bimodul yang merupakan pasangan terurut antara dua gelanggang berbeda yaitu Gelanggang Trinion ($\mathbb{T}$) dan Gelanggang Quaternion ($\mathbb{H}$) dengan bentuk sebagai berikut :*

$$M = \{(r,s) \mid r \in \mathbb{T}, s \in \mathbb{H}\}$$

dimana operasi pernjumlahan dan perkaliannya mengikut pada operasi penjumlahan dan perkalian dalam Trinion dan Quaternion. Untuk setiap $(r_1,s_1),(r_2,s_2) \in M$, maka berlaku :

1. $(r_1,s_1) + (r_2,s_2) = (r_1 + r_2\, , s_1 + s_2)$
2. $(r_1,s_1) \cdot (r_2,s_2) = (r_1 \cdot r_2\, , s_1 \cdot s_2)$

Diberikan pula Matriks Segitiga Formal dengan elemen di dalam matriks tersebut berupa Gelanggang Trinion, Gelanggang Quaternion dan Bimodulnya beserta endomorfismanya sebagai berikut.

Teorema 2.2. *Matriks segitiga formal dengan elemen matriks didalamnya berupa gelanggang Trinion, gelanggang Quaternion dan Bimodulnya dapat disebut sebagai Gelanggang Polinom Miring Matriks Segitiga Formal yang berbentuk sebagai berikut :*

$$\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} r & (r,s) \\ 0 & s \end{pmatrix} \middle| \, r \in \mathbb{T}, (r,s) \in M, s \in \mathbb{H} \right\}$$

dimana aturan perkaliannya mengikut kepada aturan perkalian dari masing masing gelanggang.

Teorema 2.3. *Misalkan $\mathcal{T}[x;\sigma,\pi]$ adalah Gelanggang Polinom Miring Matriks Segitiga Formal yang berbentuk :*

$$\mathcal{T}[x;\sigma,\pi] = \sum_k \begin{pmatrix} (r_0 + r_1\boldsymbol{i} + r_2\boldsymbol{j}) & (p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j}\, , q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\boldsymbol{i} + s_2\boldsymbol{j} + s_3\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}_k x^k$$

dengan σ adalah endomorfisma gelanggang, dimana

$$\sigma \begin{pmatrix} (r_0 + r_1\boldsymbol{i} + r_2\boldsymbol{j}) & (p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j}\, , q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\boldsymbol{i} + s_2\boldsymbol{j} + s_3\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (r_0 - r_2\boldsymbol{i} - r_1\boldsymbol{j}) & (p_0 - p_2\boldsymbol{i} - p_1\boldsymbol{j}\,, q_0 - q_3\boldsymbol{i} - q_2\boldsymbol{j} - q_1\boldsymbol{k}) \\ 0 & (s_0 - s_3\boldsymbol{i} - s_2\boldsymbol{j} - s_1\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}.$$

dan σ-derivatif yang digunakan bernilai 0. Maka, $\mathcal{T}[x;\sigma,\pi]$ termasuk Gelanggang σ-Skew Armendariz dan Gelanggang σ-Skew π-Armendariz.

Bukti :

Ambil,

$$f(x), g(x) \in \mathcal{T}[x;\sigma]\backslash\{0\}$$

Kasus 1

Misalkan, $f(x) = f_0 + f_1x$, dimana

$$f_i = \begin{pmatrix} (r_0 + r_1\boldsymbol{i} + r_2\boldsymbol{j}) & (p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j}\,, q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\boldsymbol{i} + s_2\boldsymbol{j} + s_3\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}_i$$

Dan, $g(x) = g_0 + g_1x$, dimana

$$g_j = \begin{pmatrix} (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}) & (x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j}\,, y_0 + y_1\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + y_3\boldsymbol{k}) \\ 0 & (b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}_j$$

untuk setiap $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = 0\ dan\ 1$.

Maka, $f(x)g(x) = (f_0 + f_1x)(g_0 + g_1x)$

$$= f_0\, g_0 + (f_0\, g_1 + f_1\, \sigma(g_0))\, x + f_1\, \sigma(g_1)\, x^2$$

$$= 0$$

Dari perkalian $\mathrm{f}(x)g(x)$ diperoleh tiga hal, yaitu

1. $f_0\, g_0 = 0$
2. $f_0\, g_1 + f_1\, \sigma(g_0) = 0$
3. $f_1\, \sigma(g_1) = 0$

Tiga hal tersebut akan menjadi modal awal dalam penentuan bentuk umum $f(x), g(x)$.

1. Akan ditunjukkan $f_0\, g_0 = 0$

$$f_0\, g_0 = \left[\begin{pmatrix} (r_0 + r_1\boldsymbol{i} + r_2\boldsymbol{j}) & (p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j}\,, q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\boldsymbol{i} + s_2\boldsymbol{j} + s_3\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}_0\right]$$

$$\left[\begin{pmatrix} (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}) & (x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j}\,, y_0 + y_1\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + y_3\boldsymbol{k}) \\ 0 & (b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}_0\right]$$

Untuk memudahkan perhitungan, maka perkalian matriks diatas akan dipisah berdasarkan elemen matriks.

$\boldsymbol{A_{11}} = \{(r_0 + r_1\boldsymbol{i} + r_2\boldsymbol{j})_0\}\{(a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j})_0\}$

Karena diketahui bahwa $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{ji} = -1, \boldsymbol{i^2} = \boldsymbol{j}, \boldsymbol{j^2} = -1$, maka

$= (r_0a_0 - r_1\, a_2 - r_2\, a_1) + (r_0a_1 + r_1a_0 - r_2\, a_2)\boldsymbol{i} + (r_0a_2 + r_1\, a_1 + r_2\, a_0)\boldsymbol{j}$

$= 0$

Atau,

$$\left.\begin{array}{ll} (i). & r_0 a_0 - r_1\, a_2 - r_2\, a_1 = 0 \\ (ii). & r_0 a_1 + r_1 a_0 - r_2\, a_2 = 0 \\ (iii). & r_0 a_2 + r_1\, a_1 + r_2\, a_0 = 0 \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Berdasarkan Persamaan (1) diperoleh,

$$a_0 \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} -r_2 \\ r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} -r_1 \\ -r_2 \\ r_0 \end{pmatrix} = 0$$

Karena diantara a_0, a_1, a_2 ada yang tidak nol, maka vektor-vektor

$$\left\{ \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r_2 \\ r_0 \\ r_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r_1 \\ -r_2 \\ r_0 \end{pmatrix} \right\}$$

tidak bebas linear (bergantung linear). Oleh karena itu,

$$det\left(\begin{bmatrix} r_0 & -r_2 & -r_1 \\ r_1 & r_0 & -r_2 \\ r_2 & r_1 & r_0 \end{bmatrix} \right) = 0$$

Atau, $r_0^3 - r_1^3 + r_2^3 + 3r_0 r_1 r_2 = 0$ .... (2)

Berdasarkan Persamaan (2) dapat disimpulkan $r_0 = -r_1 = r_2$. Selanjutnya, apabila nilai $r_0 = -r_1 = r_2$ disubtitusikan ke persamaan (1), maka diperoleh $-a_0 + a_1 - a_2 = 0$ sehingga disimpulkan $a_1 = a_0 + a_2$.

$\boldsymbol{A_{22}} = \{(s_0 + s_1\boldsymbol{i} + s_2\boldsymbol{j} + s_3\boldsymbol{k})_0\}\{(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k})_0\}$

Karena diketahui bahwa $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i^2} = \boldsymbol{j^2} = \boldsymbol{k^2} = -1$, maka

$$= (s_0 b_0 - s_1 b_1 - s_2 b_2 - s_3 b_3) + (s_0 b_1 + s_1 b_0 + s_2 b_3 - s_3 b_2)\boldsymbol{i}$$
$$+ (s_0 b_2 - s_1 b_3 + s_2 b_0 + s_3 b_1)\boldsymbol{j} + (s_0 b_3 + s_1 b_2 - s_2 b_1 + s_3 b_0)\boldsymbol{k}$$
$$= 0$$

Atau,

$$\left.\begin{array}{ll} (i). & s_0 b_0 - s_1 b_1 - s_2 b_2 - s_3 b_3 = 0 \\ (ii). & s_0 b_1 + s_1 b_0 + s_2 b_3 - s_3 b_2 = 0 \\ (iii). & s_0 b_2 - s_1 b_3 + s_2 b_0 + s_3 b_1 = 0 \\ (iv). & s_0 b_3 + s_1 b_2 - s_2 b_1 + s_3 b_0 = 0 \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Berdasarkan Persamaan (3) diperoleh,

$$s_0 \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -b_1 \\ b_0 \\ -b_3 \\ b_2 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_3 \\ b_0 \\ -b_1 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} -b_3 \\ -b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = 0$$

Karena diantara s_0, s_1, s_2, s_3 ada yang tidak nol, maka vektor-vektor

$$\left\{ \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_1 \\ b_0 \\ -b_3 \\ b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_3 \\ b_0 \\ -b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b_3 \\ -b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} \right\}$$

tidak bebas linear (bergantung linear). Oleh karena itu,

$$det\left(\begin{bmatrix} b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ b_1 & b_0 & b_3 & -b_2 \\ b_2 & -b_3 & b_0 & b_1 \\ b_3 & b_2 & -b_1 & b_0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Atau, $b_0^4 - b_1^4 + b_2^4 - b_3^4 + 2b_0^2 b_2^2 - 2b_1^2 b_3^2 = 0$ .... (4)

Berdasarkan Persamaan (4) dapat disimpulkan $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ dengan s_0, s_1, s_2, s_3 sebarang.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A_{12}} &= \{(r_0 + r_1\boldsymbol{i} + r_2\boldsymbol{j})_0\}\,\{(x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j})\,,(y_0 + y_1\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + y_3\boldsymbol{k})_0\} \\ &\quad + \{(p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j}), (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k})_0\}\{(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k})_0\} \\ &= \{(r_0 + r_1\boldsymbol{i} + r_2\boldsymbol{j})(x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j})\,,(y_0 + y_1\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + y_3\boldsymbol{k})\} \\ &\quad + \{(p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j})\,,(q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k})(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k})\} \\ &= \{(r_0 + r_1\boldsymbol{i} + r_2\boldsymbol{j})(x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j}) + (p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j})\} \\ &\quad ,\{(y_0 + y_1\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + y_3\boldsymbol{k}) + (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k})(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k})\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Untuk lebih memudahkan perhitungan, bagian Trinion dan Quaternion akan dipisah.

1. Trinion

   $= [(r_0 + r_1\boldsymbol{i} + r_2\boldsymbol{j})(x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j})] + (p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j})$

   Karena diketahui bahwa $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{ji} = -1, \boldsymbol{i^2} = \boldsymbol{j}, \boldsymbol{j^2} = -1$, maka

   $$\begin{aligned} &= (r_0x_0 - r_1x_2 - r_2x_1 + p_0) + (r_0x_1 + r_1x_0 - r_2x_2 + p_1)\boldsymbol{i} \\ &\quad + (r_0x_2 + r_1x_1 + r_2x_0 + p_2)\boldsymbol{j} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Atau,

   (i). $r_0x_0 - r_1x_2 - r_2x_1 = -p_0$ .... (5)

   (ii). $r_0x_1 + r_1x_0 - r_2x_2 = -p_1$ .... (6)

   (iii). $r_0x_2 + r_1x_1 + r_2x_0 = -p_2$ .... (7)

   Pada $\boldsymbol{A_{11}}$ telah diketahui bahwa $r_0 = -r_1 = r_2$, maka

   (i). $r_1(-x_0 + x_1 - x_2) = -p_0$ .... (8)

   (ii). $r_1(x_0 - x_1 + x_2) = -p_1$ .... (9)

   (iii). $r_1(-x_0 + x_1 - x_2) = -p_2$ .... (10)

   Dari pers. (8), pers. (9) dan pers. (10) diperoleh $p_0 = -p_1 = p_2$. Dimana $p_1 = -r_1(x_0 - x_1 + x_2)$. Karena diketahui $p_0 = -p_1$, maka dari pers. (5) dan pers. (6) diperoleh $x_1 = x_0 + x_2$ sehingga disimpulkan $p_0 = p_1 = p_2 = 0$.

2. Quaternion

$$= (y_0 + y_1\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + y_3\boldsymbol{k})$$
$$+ [(q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k})(b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k})]$$

Karena diketahui bahwa $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i^2} = \boldsymbol{j^2} = \boldsymbol{k^2} = -1$, maka

$$= (q_0b_0 - q_1b_1 - q_2b_2 - q_3b_3 + y_0) + (q_0b_1 + q_1b_0 + q_2b_3 - q_3b_2 + y_1)\boldsymbol{i}$$
$$+ (q_0b_2 - q_1b_3 + q_2b_0 + q_3b_1 + y_2)\boldsymbol{j} + (q_0b_3 + q_1b_2 - q_2b_1 + q_3b_0 + y_3)\boldsymbol{k}$$
$$= 0$$

Atau,

(i). $q_0b_0 - q_1b_1 - q_2b_2 - q_3b_3 = -y_0$

(ii). $q_0b_1 + q_1b_0 + q_2b_3 - q_3b_2 = -y_1$

(iii). $q_0b_2 - q_1b_3 + q_2b_0 + q_3b_1 = -y_2$

(iv). $q_0b_3 + q_1b_2 - q_2b_1 + q_3b_0 = -y_3$

Pada $\boldsymbol{A_{22}}$ telah diketahui bahwa $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$, sehingga dapat disimpulkan $y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$ dan $q_0, q_1, q_2, q_3 \neq 0$. Selanjutnya, apabila dituliskan kembali kedalam bentuk matriks, maka matriks f_0 dan g_0 adalah sebagai berikut

$$f_0 = \left[\begin{pmatrix} (r_0 - r_0\boldsymbol{i} + r_0\boldsymbol{j}) & 0\,, (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\boldsymbol{i} + s_2\boldsymbol{j} + s_3\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}_0\right]$$

$$g_0 = \left[\begin{pmatrix} (a_0 + (a_0 + a_2)\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} & (x_0 + (x_0 + x_2)\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j}\,, 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_0\right]$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa hasil perkalian f_0g_0 akan bernilai 0 jika bentuk matriks f_0 dan g_0 seperti diatas.

2. Akan ditunjukkan $f_1\,\sigma(g_1) = 0$

$$f_1\,\sigma(g_1) = \left[\begin{pmatrix} (r_0 + r_1\boldsymbol{i} + r_2\boldsymbol{j}) & (p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j})\,, (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\boldsymbol{i} + s_2\boldsymbol{j} + s_3\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}_1\right]$$
$$\sigma\left[\begin{pmatrix} (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}) & (x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j})\,, (y_0 + y_1\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + y_3\boldsymbol{k}) \\ 0 & (b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}_1\right]$$
$$= \left[\begin{pmatrix} (r_0 + r_1\boldsymbol{i} + r_2\boldsymbol{j}) & (p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j})\,, (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\boldsymbol{i} + s_2\boldsymbol{j} + s_3\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}_1\right]$$
$$\left[\begin{pmatrix} (a_0 - a_2\boldsymbol{i} - a_1\boldsymbol{j}) & (x_0 - x_2\boldsymbol{i} - x_1\boldsymbol{j})\,, (y_0 - y_3\boldsymbol{i} - y_2\boldsymbol{j} - y_1\boldsymbol{k}) \\ 0 & (b_0 - b_3\boldsymbol{i} - b_2\boldsymbol{j} - b_1\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}_1\right]$$

Untuk memudahkan perhitungan, maka perkalian matriks diatas akan dipisah berdasarkan elemen matriks.

$\boldsymbol{A_{11}} = \{(r_0 + r_1\boldsymbol{i} + r_2\boldsymbol{j})_1\}\{(a_0 - a_2\boldsymbol{i} - a_1\boldsymbol{j})_1\}$

Karena diketahui bahwa $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{ji} = -1, \boldsymbol{i^2} = \boldsymbol{j}, \boldsymbol{j^2} = -1$, maka

$= (r_0 a_0 + r_1\, a_1 + r_2\, a_2) + (r_1 a_0 - r_0 a_2 + \ r_2\, a_1)\boldsymbol{i} + (r_2\, a_0 - r_0 a_1 - r_1\, a_2)\boldsymbol{j}$

$= 0$

Atau,

$$\left.\begin{array}{ll} (i). & r_0 a_0 + r_1\, a_1 + r_2\, a_2 = 0 \\ (ii). & r_1 a_0 - r_0 a_2 + \ r_2\, a_1 = 0 \\ (iii). & r_2\, a_0 - r_0 a_1 - r_1\, a_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{...} \ (11)$$

Sehingga dari persamaan (1) diperoleh,

$$a_0 \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ -r_0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} r_2 \\ -r_0 \\ -r_1 \end{pmatrix} = 0$$

Karena diantara a_0, a_1, a_2 ada yang tidak nol, maka vektor-vektor

$$\left\{ \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ -r_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_2 \\ -r_0 \\ -r_1 \end{pmatrix} \right\}$$

tidak bebas linear (bergantung linear). Oleh karena itu,

$$det\left(\begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 \\ r_1 & r_2 & -r_0 \\ r_2 & -r_0 & -r_1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Atau, $r_0^3 - r_1^3 + r_2^3 + 3r_0 r_1 r_2 = 0$ .... (12)

Berdasarkan Persamaan (12) dapat disimpulkan $r_0 = -r_1 = r_2$. Selanjutnya, apabila nilai $r_0 = -r_1 = r_2$ disubtitusikan ke persamaan (11), maka diperoleh $-a_0 + a_1 - a_2 = 0$ sehingga disimpulkan $a_1 = a_0 + a_2$.

$\boldsymbol{A_{22}} = \{(s_0 + s_1\boldsymbol{i} + s_2\boldsymbol{j} + s_3\boldsymbol{k})_1\}\{(b_0 - b_3\boldsymbol{i} - b_2\boldsymbol{j} - b_1\boldsymbol{k})_1\}$

Karena diketahui bahwa $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}^2 = \boldsymbol{k}^2 = -1$, maka

$= (s_0 b_0 + s_1 b_3 + s_2 b_2 + s_3 b_1) + (s_1 b_0 - s_0 b_3 - \ s_2 b_1 + s_3 b_2)\boldsymbol{i}$

$\quad + (s_1 b_1 - s_0 b_2 + s_2 b_0 - s_3 b_3)\boldsymbol{j} + (s_3 b_0 - s_0 b_1 - s_1 b_2 + \ s_2 b_3)\boldsymbol{k}$

$= 0$

Atau,

$$\left.\begin{array}{ll} (i). & s_0 b_0 + s_1 b_3 + s_2 b_2 + s_3 b_1 = 0 \\ (ii). & s_1 b_0 - s_0 b_3 - s_2 b_1 + s_3 b_2 = 0 \\ (iii). & s_1 b_1 - s_0 b_2 + s_2 b_0 - s_3 b_3 = 0 \\ (iv). & s_3 b_0 - s_0 b_1 - s_1 b_2 + s_2 b_3 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{.................................} \ (13)$$

Sehingga dari persamaan (13) diperoleh,

$$s_0 \begin{pmatrix} b_0 \\ -b_3 \\ -b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} b_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ b_0 \\ b_3 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -b_3 \\ b_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Karena diantara s_0, s_1, s_2, s_3 ada yang tidak nol, maka vektor-vektor

$$\left\{\begin{pmatrix} b_0 \\ -b_3 \\ -b_2 \\ -b_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_3 \\ b_0 \\ b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_2 \\ -b_1 \\ b_0 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ -b_3 \\ b_0 \end{pmatrix}\right\}$$

tidak bebas linear (bergantung linear). Oleh karena itu,

$$det\left(\begin{bmatrix} b_0 & b_3 & b_2 & b_1 \\ -b_3 & b_0 & -b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 & b_0 & -b_3 \\ -b_1 & -b_2 & b_3 & b_0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Atau, $b_0^4 - b_1^4 + b_2^4 - b_3^4 + 2b_0^2 b_2^2 - 2b_1^2 b_3^2 = 0$ .... (14)

Berdasarkan Persamaan (14) dapat disimpulkan $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$ dengan s_0, s_1, s_2, s_3 sebarang.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A_{12}} &= \{(r_0 + r_1\boldsymbol{i} + r_2\boldsymbol{j})_1\}\{(x_0 - x_2\boldsymbol{i} - x_1\boldsymbol{j}), (y_0 - y_3\boldsymbol{i} - y_2\boldsymbol{j} - y_1\boldsymbol{k})_1\} \\
&\quad + \{(p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j}), (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k})_1\}\{(b_0 - b_3\boldsymbol{i} - b_2\boldsymbol{j} - b_1\boldsymbol{k})_1\} \\
&= \{(r_0 + r_1\boldsymbol{i} + r_2\boldsymbol{j})(x_0 - x_2\boldsymbol{i} - x_1\boldsymbol{j}), (y_0 - y_3\boldsymbol{i} - y_2\boldsymbol{j} - y_1\boldsymbol{k})\} \\
&\quad + \{(p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j}), (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k})(b_0 - b_3\boldsymbol{i} - b_2\boldsymbol{j} - b_1\boldsymbol{k})\} \\
&= \{(r_0 + r_1\boldsymbol{i} + r_2\boldsymbol{j})(x_0 - x_2\boldsymbol{i} - x_1\boldsymbol{j}) + (p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j})\} \\
&\quad , \{(y_0 - y_3\boldsymbol{i} - y_2\boldsymbol{j} - y_1\boldsymbol{k}) + (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k})(b_0 - b_3\boldsymbol{i} - b_2\boldsymbol{j} - b_1\boldsymbol{k})\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Untuk lebih memudahkan perhitungan, bagian Trinion dan Quaternion akan dipisah sementara.

1. Trinion

$$= (r_0 + r_1\boldsymbol{i} + r_2\boldsymbol{j})(x_0 - x_2\boldsymbol{i} - x_1\boldsymbol{j}) + (p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j})$$

Karena diketahui bahwa $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{ji} = -1, \boldsymbol{i}^2 = \boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}^2 = -1$, maka

$$\begin{aligned}
&= (r_0x_0 + r_1x_1 + r_2x_2 + p_0) + (r_1x_0 - r_0x_2 + r_2x_1 + p_1)\boldsymbol{i} \\
&\quad + (r_2x_0 - r_0x_1 - r_1x_2 + p_2)\boldsymbol{j} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Atau,

(i). $r_0x_0 + r_1x_1 + r_2x_2 = -p_0$ .... (15)

(ii). $r_1x_0 - r_0x_2 + r_2x_1 = -p_1$ .... (16)

(iii). $r_2x_0 - r_0x_1 - r_1x_2 = -p_2$ .... (17)

Pada $\boldsymbol{A_{11}}$ telah diketahui bahwa $r_0 = -r_1 = r_2$, maka

(i). $r_1(-x_0 + x_1 - x_2) = -p_0$ .... (18)

(ii). $r_1(x_0 - x_1 + x_2) = -p_1$ .... (19)

(iii). $r_1(-x_0 + x_1 - x_2) = -p_2$ .... (20)

Dari pers. (18), pers. (19) dan pers. (20) diperoleh $p_0 = -p_1 = p_2$. Dimana $p_1 = -r_1(x_0 - x_1 + x_2)$. Karena diketahui $p_0 = -p_1$, maka dari pers. (15) dan pers. (16) diperoleh $x_1 = x_0 + x_2$ sehingga disimpulkan $p_0 = p_1 = p_2 = 0$.

2. Quaternion

$$= (y_0 - y_3\boldsymbol{i} - y_2\boldsymbol{j} - y_1\boldsymbol{k})$$
$$+ (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k})(b_0 - b_3\boldsymbol{i} - b_2\boldsymbol{j} - b_1\boldsymbol{k})$$

Karena diketahui bahwa $\boldsymbol{ij} = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{jk} = \boldsymbol{i}, \boldsymbol{ki} = \boldsymbol{j}, \boldsymbol{i^2} = \boldsymbol{j^2} = \boldsymbol{k^2} = -1$, maka

$$= (q_0b_0 + q_1b_3 + q_2b_2 + q_3b_1 + y_0) + (q_1b_0 - q_0b_3 - q_2b_1 + q_3b_2 + y_1)\boldsymbol{i}$$
$$+ (q_1b_1 - q_0b_2 + q_2b_0 - q_3b_3 + y_2)\boldsymbol{j} + (q_2b_3 - q_0b_1 - q_1b_2 + q_3b_0 + y_3)\boldsymbol{k}$$
$$= 0$$

Atau,

(i). $q_0b_0 + q_1b_3 + q_2b_2 + q_3b_1 = -y_0$

(ii). $q_1b_0 - q_0b_3 - q_2b_1 + q_3b_2 = -y_1$

(iii). $q_1b_1 - q_0b_2 + q_2b_0 - q_3b_3 = -y_2$

(iv). $q_2b_3 - q_0b_1 - q_1b_2 + q_3b_0 = -y_3$

Pada $\boldsymbol{A_{22}}$ telah diketahui bahwa $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$, sehingga dapat disimpulkan $y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$ dan $q_0, q_1, q_2, q_3 \neq 0$. Selanjutnya, apabila dituliskan kembali kedalam bentuk matriks, maka matriks f_1 dan g_1 adalah sebagai berikut

$$f_1 = \left[\begin{pmatrix} (r_0 - r_0\boldsymbol{i} + r_0\boldsymbol{j}) & 0\,, (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\boldsymbol{i} + s_2\boldsymbol{j} + s_3\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}_1\right]$$

$$g_1 = \left[\begin{pmatrix} (a_0 + (a_0 + a_2)\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} & (x_0 + (x_0 + x_2)\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j}\,, 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_1\right]$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa hasil perkalian f_1g_1 akan bernilai 0 jika bentuk matriks f_1 dan g_1 seperti diatas.

Dapat dilihat bahwa matriks f_0 dan f_1 mempunyai bentuk yang sama. Begitu pula dengan g_0 dan g_1 yang mempunyai bentuk yang sama. Maka dapat disimpulkan bahwa modal kedua yang merupakan perkalian f_0g_1 dan $f_1\sigma(g_0)$ juga bernilai 0. Sehingga untuk $f(x) = f_0 + f_1x$ dan $g(x) = g_0 + g_1x$ mempunyai bentuk umum f_i dan g_i dengan $i = 0{,}1$ sebagai berikut.

$$f_i = \left[\begin{pmatrix} (r_0 - r_0\boldsymbol{i} + r_0\boldsymbol{j}) & 0\,, (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\boldsymbol{i} + s_2\boldsymbol{j} + s_3\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}_i\right]$$

$$g_i = \left[\begin{pmatrix} (a_0 + (a_0 + a_2)\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} & (x_0 + (x_0 + x_2)\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j}\,, 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_i\right]$$

Kasus 2

Misalkan, $f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2$, dimana

$$f_i = \begin{pmatrix} (r_0 + r_1\boldsymbol{i} + r_2\boldsymbol{j}) & (p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j}), (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\boldsymbol{i} + s_2\boldsymbol{j} + s_3\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}_i$$

dan, $g(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2$, dimana

$$g_j = \begin{pmatrix} (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}) & (x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j}), (y_0 + y_1\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + y_3\boldsymbol{k}) \\ 0 & (b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}_j$$

untuk setiap $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = 0, 1, dan\ 2$.

Maka,

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (f_0 + f_1x + f_2x^2)(g_0 + g_1x + g_2x^2) \\ &= f_0\, g_0 + f_0\, g_1\, x + f_0\, g_2x^2 + f_1\, \sigma(g_0)\, x + f_1\, \sigma(g_1)\, x^2 \\ &\quad + f_1\, \sigma(g_2)\, x^3 + f_2\, g_0x^2 + f_2\, g_1x^3 + f_2\, g_2x^4 \\ &= f_0\, g_0 + \big(f_0\, g_1 + f_1\, \sigma(g_0)\big)x + (f_0\, g_2 + f_1\, \sigma(g_1) + f_2\, g_0)x^2 \\ &\quad + (\, f_1\, \sigma(g_2) + f_2\, g_1)x^3 + f_2\, g_2x^4 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dari perkalian $u(x)v(x)$ diperoleh lima modal, yaitu

1. $f_0\, g_0 = 0$
2. $f_0\, g_1 + f_1\, \sigma(g_0) = 0$
3. $f_0\, g_2 + f_1\, \sigma(g_1) + f_2\, g_0 = 0$
4. $f_1\, \sigma(g_2) + f_2\, g_1 = 0$
5. $f_2\, g_2 = 0$

Berdasar pada *Kasus 1* diatas, maka dari modal pertama dan modal kelima dapat disimpulkan bahwa bentuk dari f_0 dan f_2 sama. Begitu pula dengan bentuk dari g_0 dan g_2. Maka pada modal ketiga yang merupakan perkalian antara f_0g_2 dan f_2g_0 juga akan bernilai 0. Sehingga, dari modal ketiga diperoleh

$$f_1\, \sigma(g_1) = 0.$$

Kembali berdasar pada *Kasus 1*, maka nilai dari f_1 dan g_1 adalah

$$f_1 = \left[\begin{pmatrix} (r_0 - r_0\boldsymbol{i} + r_0\boldsymbol{j}) & 0, (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\boldsymbol{i} + s_2\boldsymbol{j} + s_3\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}_1\right]$$

$$g_1 = \left[\begin{pmatrix} (a_0 + (a_0 + a_2)\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} & (x_0 + (x_0 + x_2)\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j}, 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_1\right].$$

Dapat dilihat bahwa f_0, f_1, f_2 mempunyai bentuk matriks yang sama. Begitu pula dengan g_0, g_1, g_2 yang mempuyai bentuk matriks yang sama. Sehingga untuk $f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2$ dan $g(x) = g_0 + g_1x + g_2x^2$ mempunyai bentuk umum f_i dan g_i dengan $i = 0,1,2$ sebagai berikut.

$$f_i = \left[\begin{pmatrix} (r_0 - r_0\boldsymbol{i} + r_0\boldsymbol{j}) & 0, (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\boldsymbol{i} + s_2\boldsymbol{j} + s_3\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}_i\right]$$

$$g_i = \left[\begin{pmatrix} (a_0 + (a_0 + a_2)\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} & (x_0 + (x_0 + x_2)\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j}, 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_i\right].$$

Kasus 3

Misalkan, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_n x^n$, dimana

$$f_i = \begin{pmatrix} (r_0 + r_1\boldsymbol{i} + r_2\boldsymbol{j}) & (p_0 + p_1\boldsymbol{i} + p_2\boldsymbol{j}), (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\boldsymbol{i} + s_2\boldsymbol{j} + s_3\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}_i$$

Dan, $g(x) = \sum_{j=0}^{m} g_m x^m$, dimana

$$g_j = \begin{pmatrix} (a_0 + a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}) & (x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j}), (y_0 + y_1\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + y_3\boldsymbol{k}) \\ 0 & (b_0 + b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}_j$$

untuk setiap $0 \le i \le n$ dan $0 \le j \le m$.

Maka, $f(x)g(x) = (f_0 + f_1x + \cdots + f_nx^n)(g_0 + g_1x + \cdots + g_mx^m)$

$= f_0g_0 + f_0g_1x + \cdots + f_ng_mx^{n+m}$

$= 0$

Dari perkalian $f(x)g(x)$, diperoleh sebanyak $n + m + 1$ modal. Masing-masing modal memiliki jumlahan index yang berbeda dan berada pada interval $0 \le i + j \le n + m$.

Karena gelanggang matriks segitiga formal merupakan gelanggang polinom miring, maka :

1. Untuk i ganjil, perkalian antara f_ig_j menjadi $f_i\,\sigma(g_j)$.
2. Untuk i genap, perkalian antara f_ig_j tetap.

Maka dari ketiga kasus diatas dapat disimpulkan bahwa untuk setiap $f(x), g(x) \in \mathcal{T}[x;\sigma]\backslash\{0\}$ dengan

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} (r_0 - r_0\boldsymbol{i} + r_0\boldsymbol{j}) & 0, (q_0 + q_1\boldsymbol{i} + q_2\boldsymbol{j} + q_3\boldsymbol{k}) \\ 0 & (s_0 + s_1\boldsymbol{i} + s_2\boldsymbol{j} + s_3\boldsymbol{k}) \end{pmatrix}_i x^i$$

$$g(x) = \sum_{j=0}^{m} \begin{pmatrix} (a_0 + (a_0 + a_2)\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}) & (x_0 + (x_0 + x_2)\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j}), 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_j x^j$$

sedemikian sehingga $f(x)g(x) = 0$, maka $f_ig_j = 0$, untuk setiap $0 \le i \le n$ dan $0 \le j \le m$. Maka Gelanggang Matriks Segitiga Formal merupakan **Gelanggang $\boldsymbol{\sigma}$-Skew Armendariz.**

Selanjutnya, karena $\mathcal{T}[x;\sigma]$ hanya memiliki satu elemen nilpoten yaitu 0, maka untuk setiap $f(x), g(x) \in \mathcal{T}[x;\sigma]\backslash\{0\}$ sedemikian sehingga $f(x)g(x) = 0 \in N(\mathcal{T}[x;\sigma])$, maka $f_ig_j = 0 \in N(\mathcal{T}[x;\sigma])$ untuk setiap $0 \le i \le n$ dan $0 \le j \le m$. Sehingga, Gelanggang Matriks Segtiga Formal merupakan **Gelanggang $\boldsymbol{\sigma}$-Skew $\boldsymbol{\pi}$-Armendariz.**

3. KESIMPULAN

Gelanggang Matriks Segitiga Formal $\mathcal{T}[x;\sigma]$ merupakan Gelanggang σ-Skew Armendariz karena terdapat dua polinomial $f(x), g(x) \in \mathcal{T}[x;\sigma]\backslash\{0\}$ dimana,

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\begin{pmatrix}(r_0-r_0\boldsymbol{i}+r_0\boldsymbol{j}) & 0,(q_0+q_1\boldsymbol{i}+q_2\boldsymbol{j}+q_3\boldsymbol{k})\\ 0 & (s_0+s_1\boldsymbol{i}+s_2\boldsymbol{j}+s_3\boldsymbol{k})\end{pmatrix}_i x^i$$

$$g(x)=\sum_{j=0}^{m}\begin{pmatrix}(a_0+(a_0+a_2)\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}) & (x_0+(x_0+x_2)\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}),0\\ 0 & 0\end{pmatrix}_j x^j$$

sedemikian sehingga, $f(x)g(x)=0$, maka $f_ig_j=0$. Gelanggang Matriks Segitiga Formal $\mathcal{T}[x;\sigma,\pi]$ dengan $\pi=0$ juga merupakan Gelanggang σ-Skew π-Armendariz karena memiliki satu elemen nilpoten yaitu 0. Maka, terdapat dua polinomial $f(x),g(x)\in\mathcal{T}[x;\sigma,\pi]\backslash\{0\}$ sedemikian sehingga, $f(x)g(x)=0\in N(\mathcal{T}[x;\sigma,\pi])$, maka $f_ig_j=0\in N(\mathcal{T}[x;\sigma,\pi])$ untuk setiap $0\le i\le n$ dan $0\le j\le m$.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Amir Kamal Amir, N. E. M. B. A. N. A., 2020. Center of The Skew Polynomial Ring Over Trinion Matrix. *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS),* Volume 127, pp. 29-40.

[2] Anwar, A. N., 2020. Karakteristik Polinom yang Komutatif dengan Setiap Polinom dalam Gelanggang Polinom Miring dengan Gelanggang Tumpuan Trinion.

[3] Areej M. Abduldaim, S. C., 2013. ∝-skew π-McCoy Rings. *Hindawi,* p. Volume 2013.

[4] Armendariz, E., 1973. A note on Extensions of Baer and p.p.-rings,. *J. Austral Math Soc.*

[5] Chebotar, M., 2018. On Skew Laurent Polynomial over Locally Nilpotent Rings. *Linear Algebra and Its Applications,* pp. 287-290.

[6] Ghahramani, H., 2011. Skew Polynomial Rings of Formal Triangular Matrix Rings. *Journal of Algebra,* pp. 349 (2012) 201-216.

[7] Hardy, K., 2005. *Linear Algebra For Endgineers and Scientists Using Matlab.* New Jersey: Pearson Education, Inc.

[8] Howard Anton, C. R., 2011. *Elementary Linear Algebra with Supplemental Applications*.

[9] McCoy, N. H., 1942. Remarks on Divisors of Zero. *Amer Math Monthly.*

[10] Mulkiah, 2016. *Matriks Representasi Quaternion dan Trinion.* Makassar.

[11] Sims, C. C., 1984. *Abstract Algebra A Computational Approach.* Canada: Library of Congress Cataloging.

[12] Sri Wahyuni, Y. A. N., t.thn. Sifat-Sifat Pengembangan Ring Armendariz dan Ring McCoy. *Jurnal Matematika UNAND,* pp. Vol.3 No.3 Hal.1-8.

[13] Yuwaningsih, D. A., 2020. Hasil Tambah Langsung Suatu (R,S) Modul. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications,* p. Vol 3 No.2.

[14] Zhang, X., 2018. Power-Serieswise McCoy Modules. *Mathematical Problems in Engineering.*