

Total Vertex Irregularity Strength Of Prismatic Graph Amalgamation

Nilai Total Ketidakteraturan Titik Pada Amalgamasi Graf Prisma

Junianto Sesa*¹, La Ode Muhlis*²

*Universitas Papua, Indonesia

*Email address:*¹ j.sesa@unipa.ac.id,² l.mukhlis@unipa.ac.id

Received: 17 October 2022; Accepted: 5 February 2023; Published: 5 May 2023

Abstract

The total vertex irregularity strength of the graph G is the minimum the largest label used to label a graph with vertex irregularity total k -labeling, denoted by $tvs(G)$. This study aims to ascertain the total vertex irregularity strength in prismatic graph amalgamation for $n \geq 4$. Determination of the total vertex irregularity strength in prismatic graph amalgamation is done by ascertaining the largest lower limit and the smallest upper limit. The lower limit is analyzed based on the graph properties and other supporting theorems, while the upper limit is analyzed by labeling the vertices and edges of the prismatic amalgamation graph. Based on the results of this study, the total vertex irregularity strength in prismatic graph amalgamation is obtained, namely $tvs(4(P_{2,n})) = 2n$, for $n \geq 4$.

Keywords: Amalgamation, Graph Prism, Total Vertex Irregularity Strength

Abstrak

Nilai total ketakteraturan titik dari graf G yaitu label terbesar minimum yang digunakan untuk melabeli graf dengan pelabelan- k total tak teratur titik yang dinotasikan dengan $tvs(G)$. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada amalgamasi graf prisma untuk $n \geq 4$. Penentuan nilai total ketidakteraturan titik pada amalgamasi graf prisma dilakukan dengan menentukan batas bawah terbesar dan batas atas terkecil. Batas bawah dianalisis berdasarkan sifat-sifat graf dan teorema pendukung lainnya, sedangkan batas atas dianalisis dengan pemberian label pada titik dan sisi pada amalgamasi graf prisma. Berdasarkan hasil penelitian ini diperoleh nilai total ketidakteraturan titik pada amalgamasi graf prisma, $tvs(4(P_{2,n})) = 2n$, untuk $n \geq 4$.



Kata kunci: Amalgamasi, Graf Prisma, Nilai Total Ketidakteraturan Titik

1. PENDAHULUAN

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang banyak digunakan untuk mempermudah suatu penyelesaian masalah. Dengan merepresentasikan persoalan ke dalam bentuk graf, maka persoalan dijelaskan secara lebih sederhana.

Pada abad ke – 18, Euler memperkenalkan dasar pengembangan teori graf. Pada saat itu di kota Koningsberg, terdapat suatu sungai yang membelah kota menjadi empat daratan yang terpisah. Daratan tersebut dihubungkan oleh tujuh jembatan. Warga kota tersebut ingin melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat awal. Euler membuktikan, dengan menggunakan suatu bentuk representasi tertentu, bahwa hal itu tidak mungkin. Bentuk representasi itu berkembang menjadi teori graf yang kita kenal saat ini.

Wallis mendefinisikan pelabelan pada suatu graf sebagai suatu fungsi yang memetakan unsur-unsur graf ke suatu himpunan bilangan [15]. Suatu pelabelan dengan domain berupa himpunan titik dari suatu graf disebut pelabelan titik, sedangkan pelabelan dengan domain berupa himpunan sisi dari suatu graf disebut pelabelan sisi. Apabila domain dari pemetaan tersebut adalah gabungan himpunan titik dan himpunan sisi maka pelabelan tersebut dinamakan pelabelan total.

Pelabelan sisi dan titik dari graf dapat dilakukan dengan banyak cara. Salah satu cara yang dapat digunakan adalah melabelinya dengan bilangan. Ada banyak pelabelan graf yang telah dikembangkan, diantaranya adalah pelabelan graceful, pelabelan harmoni, pelabelan total tidak teratur, pelabelan ajaib dan pelabelan anti Ajaib.

Salah satu jenis pelabelan pada graf adalah pelabelan tidak teratur. Pelabelan tidak teratur (irregular labeling) pada graf G didefinisikan sebagai suatu pemetaan yang memetakan sisi dari G ke himpunan bilangan bulat positif, sedemikian sehingga semua titiknya mempunyai bobot yang berbeda [5]. Pada tahun 2007, Baca dkk. memperkenalkan pelabelan tidak teratur lainnya yang didasarkan pada pelabelan total, yaitu pelabelan total tidak teratur sisi dan pelabelan total tidak teratur titik [4].

Beberapa peneliti telah menentukan nilai total ketidakteraturan pada beberapa graf antara lain [1], [2], [3], [8], [9], [11], [12], [13], dan [14]. Pada tahun 2014, Martin Baca telah menentukan nilai total ketidakteraturan sisi pada graf prisma yang diperumum [6]. Namun Martin belum menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf prisma. Salah hal yang menarik pada graf prisma adalah dapat digabungkan dengan menggunakan operasi amalgamasi sehingga menghasilkan sebuah graf baru. Oleh karena itu, dalam penelitian ini akan menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf amalgamasi prisma.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Pada sub bab tinjauan pustaka diberikan beberapa definisi dan konsep dasar pada teori graf, terminologi graf, jenis-jenis graf, serta penjelasan mengenai pelabelan graf yang akan digunakan untuk menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada amalgamasi graf prisma.



2.1 Pengertian Graf

Secara umum graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pengaitan titik-titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan sebagai suatu gambar. Pada tahun 2012, Harju [7] telah mendefinisikan graf sebagai berikut.

Definisi 2.1.1 Sebuah graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , dengan V adalah himpunan tak kosong dari simpul-simpul (vertices) pada G . Sedangkan E adalah himpunan sisi (edge) pada G yang menghubungkan sepasang simpul. Himpunan simpul pada G dinotasikan sebagai V , dan himpunan rusuk pada G dinotasikan sebagai E .

Graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E dinotasikan dengan $G = (V, E)$. Sisi pada graf digambarkan sebagai garis yang kedua ujungnya merupakan titik dinyatakan dengan $e = uv$. Banyaknya unsur dari G disebut order dari G dan banyaknya unsur dari G disebut ukuran (size) dari G .

2.2 Terminologi Graf

Dalam mempelajari graf terdapat beberapa terminologi yang berkaitan dengan graf. Berikut didefinisikan beberapa terminologi graf.

Definisi 2.2.1 Dua buah titik pada graf dikatakan bertetangga (adjacent) bila keduanya dihubungkan oleh sebuah sisi. Dengan kata lain, u bertetangga dengan v jika (uv) adalah sebuah sisi pada graf G .

Definisi 2.2.2 Misalkan graf G dan $\{u, v\} \in (G)$, jika $e = (uv) \in (G)$ maka sisi e dikatakan terkait (incident) dengan titik u dan titik v .

Definisi 2.2.3 Misalkan v adalah titik dalam suatu graf G . Derajat titik v adalah banyaknya sisi yang terkait dengan titik v , dinotasikan dengan $deg(v)$, dimana $\Delta(G)$ merupakan derajat maksimum titik dari G dan $\delta(G)$ merupakan derajat minimum titik dari G .

2.3 Jenis-Jenis Graf

Terdapat beberapa jenis graf sederhana khusus yang sering ditemukan pada pembahasan mengenai teori graf. Berikut terdapat beberapa graf sederhana khusus, yaitu :

1) Graf Lintasan

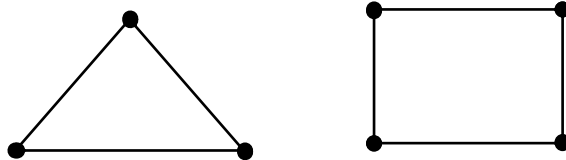
Graf lintasan merupakan suatu lintasan yang panjangnya $n - 1$ dari simpul awal v_1 kesimpul tujuan v_n di dalam graf G ialah barisan berselang-seling simpul simpul dan sisi-sisi yang berbentuk $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ sedemikian sehingga $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$ adalah sisi-sisi dari graf



Gambar 2.3.1 Graf Lintasan P_3

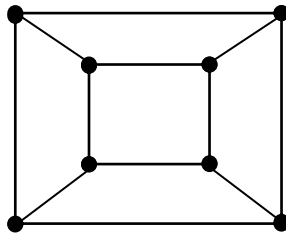
2) Graf Lingkaran

Graf lingkaran adalah graf sederhana terhubung yang setiap simpulnya berderajat dua. Graf lingkaran dengan n simpul dilambangkan dengan C_n . Jika simpul-simpul pada C_n adalah v_1, v_2, \dots, v_n maka sisi-sisinya adalah $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$.

Gambar 2.3.2 Graf Lingkaran C_3 dan C_4

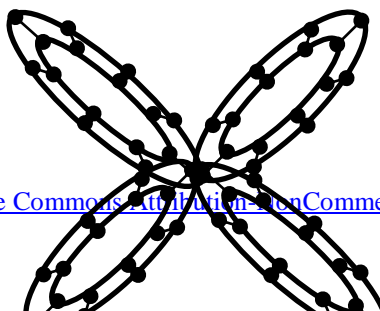
3) Graf Prisma

Graf prisma disimbolkan $P_{n,m}$ adalah graf hasil kali kartesius $P_n \times C_m$ dimana P_n adalah sebuah lintasan dengan m titik dan C_n adalah graf lingkaran dengan n titik.

Gambar 2.3.3 Graf Prisma $P_{2,4}$

4) Amalgamasi Graf Prisma

Misalkan $\{G_i | i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$ untuk m bilangan bulat positif dan $m \geq 2$, merupakan kumpulan graf berhingga dan masing-masing G_i memiliki titik tetap v_{oi} yang disebut terminal. Amalgamasi $Amal(G_i, v_{oi})$ adalah graf yang dibentuk dengan mengambil semua G_i dan menyatukan terminalnya



2.4 Pelabelan Graf

Penelitian mengenai teori graf terus mengalami perkembangan. Salah satu pembahasan yang terus berkembang adalah pelabelan pada graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum.

Definisi 2.4.1 *Pelabelan graf adalah suatu fungsi yang memasangkan elemen-elemen graf ke suatu himpunan bilangan bulat positif, umumnya himpunan bilangan bulat positif.*

Himpunan bilangan yang menjadi kodomain dari pelabelan disebut himpunan label. Suatu pelabelan graf disebut pelabelan titik jika domain dari fungsinya adalah himpunan titik, dan disebut pelabelan sisi jika domainnya adalah himpunan sisi dan jika domainnya adalah gabungan dari himpunan titik dan himpunan sisi maka pelabelan tersebut disebut pelabelan total.

Definisi 2.4.2 *Bobot titik v pada pelabelan total adalah label titik ditambah dengan jumlah semua label sisi yang terkait dengan v , yaitu*

$$wt(v) = f(v) + \sum_{uv \in E} f(uv).$$

Definisi 2.4.3 *Misalkan $G(V, E)$ adalah graf sederhana. Pelabelan total $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ disebut suatu pelabelan- k total tidak teratur titik (total vertex irregular k -labeling) pada graf G jika untuk setiap dua titik yang berbeda pada V , berlaku $wt(x) \neq wt(y)$ dimana*

$$wt(x) = f(x) + \sum_{xu \in E} f(xu).$$

Definisi 2.4.4 *Nilai total ketidakteraturan titik (total vertex irregularity strength) dari G , dinotasikan dengan (G) , adalah bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pelabelan- k total tidak teratur titik.*

Nuridin [10] memberikan batas bawah untuk nilai total ketidakteraturan titik pada graf G , sebagai berikut:

Teorema 2.4.1 *Misalkan G adalah suatu graf yang mempunyai n_i titik berderajat i dengan $i = \delta, \delta + 1, \delta + 2, \dots, \Delta$ dengan δ dan Δ adalah derajat minimum dan maksimum titik dari G , maka*



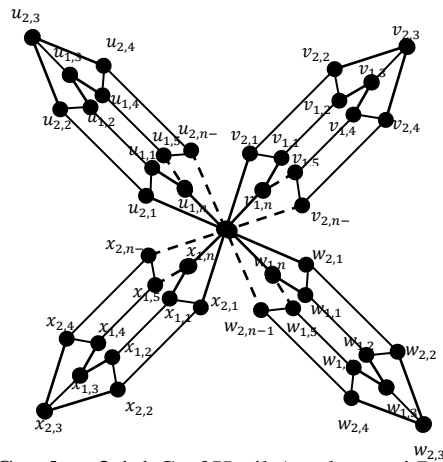
$$tvs(G) \geq maks \left\{ \left\lceil \frac{\delta + n_\delta}{\delta + 1} \right\rceil, \left\lceil \frac{\delta + n_\delta + n_{\delta+1}}{\delta + 2} \right\rceil, \dots, \left\lceil \frac{\delta + \sum_{i=\delta}^{\Delta} n_i}{\Delta + 1} \right\rceil \right\}.$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Hasil Penelitian

3.1.1 Amalgamasi Graf Prisma

Definisi 3.1.1.1 Misalkan $P_{2,n}$ adalah graf prisma, dimana n bilangan bulat positif dan $n \geq 2$. Setiap graf $P_{2,n}$, memiliki titik terminal G_i . Amalgamasi graf prisma adalah graf yang dibentuk oleh semua titik terminal G_i direkatkan menjadi satu titik.



Gambar 3.1.1 Graf Hasil Amalgamasi Prisma 4($P_{2,n}$)

Dalam tulisan ini himpunan titik V dan himpunan sisi E untuk Amalgamasi graf prisma diberikan sebagai berikut.

Himpunan Titik

$$|V| = \{y, u_{1,i}, v_{1,i}, w_{1,i}, x_{1,i} | i = 1, 2, \dots, n\} \cup \{u_{2,i}, v_{2,i}, w_{2,i}, x_{2,i} | i = 1, 2, \dots, n - 1\}$$

Himpunan Sisi

$$|E| = \{u_{1,i}u_{2,i}, v_{1,i}v_{2,i}, w_{1,i}w_{2,i}, x_{1,i}x_{2,i} | i = 1, 2, \dots, n - 1\} \cup \{yu_{2,1}, yv_{2,1}, yw_{2,1}, yx_{2,1}, yu_{1,n}, yv_{1,n}, yw_{1,n}, yx_{1,n}, yu_{2,n-1}, yv_{2,n-1}, yw_{2,n-1}, yx_{2,n-1}\} \cup \{u_{1,i}u_{1,i+1}, v_{1,i}v_{1,i+1}, w_{1,i}w_{1,i+1}, x_{1,i}x_{1,i+1}, u_{2,i}u_{2,i+1}, v_{2,i}v_{2,i+1}, w_{2,i}w_{2,i+1}, x_{2,i}x_{2,i+1} | i = 1, 2, \dots, n - 2\}$$

3.1.2 Nilai Total Ketidakteraturan Titik Amalgamasi Graf Prisma $P_{2,n}$

Definisi 3.1.2.1 Misalkan $G(V, E)$ adalah suatu graf sederhana. Pelabelan sisi $f: V \cup E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ disebut pelabelan- k total tidak teratur titik (total vertex irregular k -labeling) pada graf G jika untuk setiap dua titik yang berbeda pada V , berlaku $wt(x) \neq wt(y)$. Dimana



$$wt(x) = f(x) + \sum_{xu \in E(G)} f(xu)$$

Dalam penentuan nilai total ketidakteraturan titik pada amalgamasi graf prisma $P_{2,n}$, diawali dengan memberikan label titik dan label sisi untuk $n = 4,5,6$ dengan mempertimbangkan hal berikut:

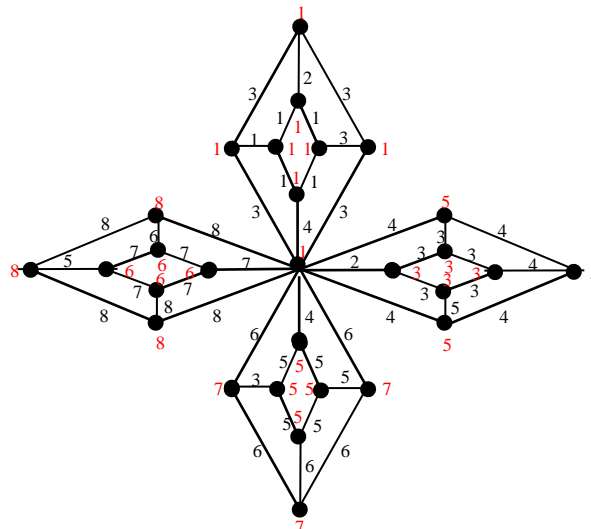
1. Batas bawah dengan menggunakan **Teorema 2.4.1**
2. Batas atas dengan pemberian label pada titik dan sisi
3. Bobot pada setiap titik berbeda
4. Mempertahankan pola pemberian label titik dan sisi

Berdasarkan **Teorema 2.4.1** untuk $n = 4,5,6$ batas bawah nilai total ketidakteraturan titik pada graf hasil amalgamasi $4(P_{2,n})$ dapat dilihat pada **Tabel 1**.

Tabel 1 Batas Bawah Pelabelan Total $4(P_{2,n})$

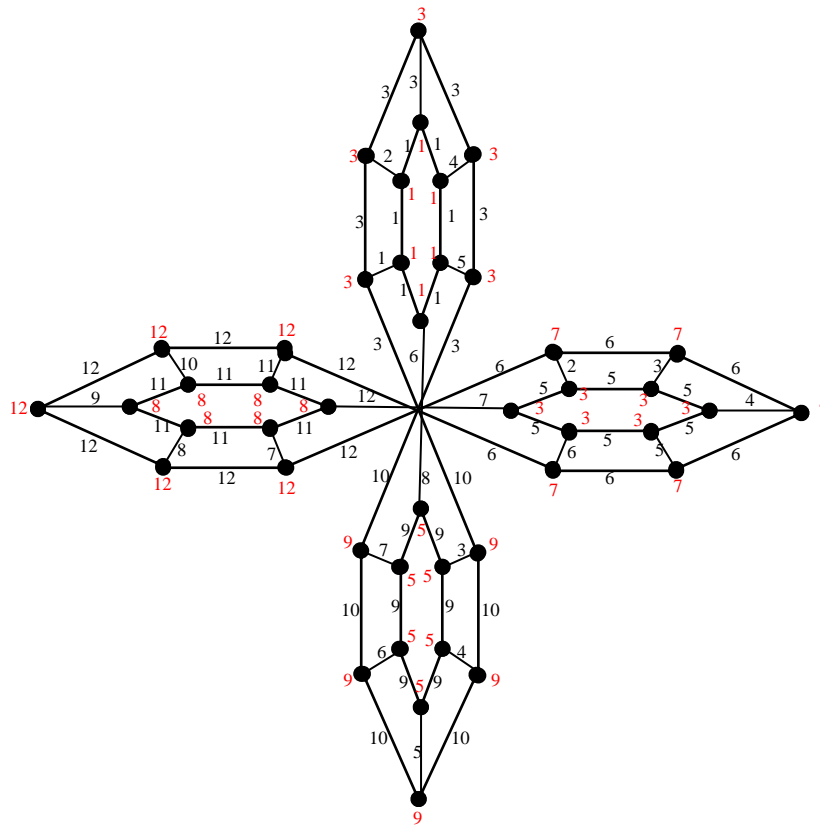
n	δ	n_δ	$\left\lfloor \frac{\delta + n_\delta}{\delta + 1} \right\rfloor \leq tvs(4(P_{2,n}))$
4	3	28	8
5	3	36	10
6	3	44	12

Selanjutnya untuk menentukan batas atasnya, maka titik dan sisi pada graf hasil amalgamasi Prisma $4(P_{2,n})$ untuk $n = 4,5,6$ diberi label sebagai berikut.



Gambar 3.1.2.1 Pelabelan Total-8 Graf Hasil Amalgamasi Prisma $4(P_{2,4})$





Gambar 3.1.2.3 Pelabelan Total-12 Graf Hasil Amalgamasi Prisma $4(P_{2,6})$

Berdasarkan **Tabel 1**, diasumsikan bahwa nilai total ketidakteraturan titik pada graf hasil amalgamasi Prisma yaitu $tvs(4(P_{2,n})) = 2n$. Hasil ini dituliskan pada **Teorema 3.2.1.1** yang disertai dengan buktinya.

Teorema 3.2.1.1 Untuk $n \geq 4$, maka nilai total ketidakteraturan titik pada graf hasil amalgamasi Prisma yaitu $tvs(4(P_{2,n}))$ adalah

$$tvs(4(P_{2,n})) = 2n.$$

Bukti:

Untuk membuktikan bahwa $tvs(4(P_{2,n})) = 2n$ maka digunakan **Teorema 2.4.1**. Derajat minimum dari $4(P_{2,n})$ adalah $\delta = 3$, banyaknya titik yang berderajat 3 adalah $n_3 = 8n - 4$. Selanjutnya derajat maksimum adalah 12 dengan banyak titik $n_{12} = 1$. Maka berdasarkan **Teorema 2.4.1** diperoleh

$$tvs(G) \geq maks \left\{ \left\lceil \frac{\delta + n_\delta}{\delta + 1} \right\rceil, \left\lceil \frac{\delta + n_\delta + n_{\delta+1}}{\delta + 2} \right\rceil, \dots, \left\lceil \frac{\delta + \sum_{i=1}^{\Delta} n_i}{\Delta} \right\rceil \right\}.$$



Sehingga

$$\begin{aligned} tvs(4(P_{2,n})) &\geq \max \left\{ \left\lceil \frac{3 + (8n - 4)}{3 + 1} \right\rceil, \left\lceil \frac{3 + (8n - 4) + 1}{12 + 1} \right\rceil \right\} \\ &= \max \left\{ \left\lceil \frac{8n - 1}{4} \right\rceil, \left\lceil \frac{8n}{13} \right\rceil \right\}. \end{aligned}$$

Untuk $n \geq 4$ maka

$$\begin{aligned} tvs(4(P_{2,n})) &\geq \max \left\{ \left\lceil \frac{8n - 1}{4} \right\rceil, \left\lceil \frac{8n}{13} \right\rceil \right\} \\ tvs(4(P_{2,n})) &= \left\lceil \frac{8n - 1}{4} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{8n}{4} - \frac{1}{4} \right\rceil \\ &= 2n. \end{aligned}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa

$$tvs(4(P_{2,n})) \leq 2n.$$

Untuk membuktikan hal tersebut dilakukan konstruksi suatu pelabelan total tidak teratur titik pada graf hasil amalgamasi Prisma yaitu $tvs(4(P_{2,n}))$

Konstruksi suatu pelabelan total f pada $4(P_{2,n})$

Definisi fungsi pelabelan titik untuk $i = 1, 2, \dots, n$ sebagai berikut

- $f(u_{1,i}) = 1$
- $f(u_{2,i}) = n - 3$
- $f(v_{1,i}) = 3$
- $f(v_{2,i}) = n + 1$
- $f(w_{1,i}) = 5$
- $f(w_{2,i}) = n + 3$
- $f(x_{1,i}) = n + 2$
- $f(x_{2,i}) = 2n$
- $f(y) = 1$

Definisi fungsi pelabelan sisi untuk $i = 1, 2, \dots, n - 1$ sebagai berikut

- $f(u_{1,i}u_{2,i}) = i$
- $f(u_{1,i}u_{1,i+1}) = f(u_{1,1}u_{1,n}) = 1$
- $f(u_{2,i}u_{2,i+1}) = f(yu_{2,1}) = f(yu_{2,n-1}) = 3$
- $f(v_{1,i}v_{2,i}) = i + 1$
- $f(v_{1,i}v_{1,i+1}) = f(v_{1,1}v_{1,n}) = n - 1$
- $f(v_{2,i}v_{2,i+1}) = f(yv_{2,1}) = f(yv_{2,n-1}) = n$
- $f(w_{1,i}w_{2,i}) = i + 2$
- $f(w_{1,i}w_{1,i+1}) = f(w_{1,1}w_{1,n}) = 2n - 3$



- $f(w_{2,i}w_{2,i+1}) = f(yw_{2,1}) = f(yw_{2,n-1}) = 2n - 2$
- $f(x_{1,i}x_{2,i}) = n + i$
- $f(x_{1,i}x_{1,i+1}) = f(x_{1,1}x_{1,n}) = 2n - 1$
- $f(x_{2,i}x_{2,i+1}) = f(yx_{2,1}) = f(yx_{2,n-1}) = 2n$

Perhatikan bahwa bobot pada setiap titik $4(P_{2,n})$ berdasarkan pelabelan, untuk $i = 1, 2, \dots, n - 2$ sebagai berikut.

1.
$$\begin{aligned} wt(u_{1,1}) &= f(u_{1,1}) + f(u_{1,1}u_{1,n}) + f(u_{1,1}u_{1,2}) + f(u_{1,1}u_{2,1}) \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$
2.
$$\begin{aligned} wt(u_{1,i}) &= f(u_{1,i}) + f(u_{1,i}u_{1,i+1}) + f(u_{1,i-1}u_{1,i}) + f(u_{1,i}u_{2,i}) \\ &= 1 + 1 + 1 + i \\ &= i + 3 \end{aligned}$$
3.
$$\begin{aligned} wt(u_{1,n-1}) &= f(u_{1,n-1}) + f(u_{1,n-1}u_{1,n}) + f(u_{1,n-2}u_{1,n}) + f(u_{1,n-1}u_{2,n-1}) \\ &= 1 + 1 + 1 + (n - 1) \\ &= n + 2 \end{aligned}$$
4.
$$\begin{aligned} wt(u_{1,n}) &= f(u_{1,n}) + f(u_{1,n}u_{1,n-1}) + f(u_{1,n}u_{1,1}) + f(yu_{1,n}) \\ &= 1 + 1 + 1 + (n) \\ &= n + 3 \end{aligned}$$
5.
$$\begin{aligned} wt(u_{2,1}) &= f(u_{2,1}) + f(yu_{2,1}) + f(u_{2,1}u_{1,2}) + f(u_{1,1}u_{2,1}) \\ &= (n - 3) + 3 + 3 + 1 \\ &= n + 4 \end{aligned}$$
6.
$$\begin{aligned} wt(u_{2,i}) &= f(u_{2,i}) + f(u_{2,i}u_{2,i+1}) + f(u_{2,i-1}u_{2,i}) + f(u_{1,i}u_{2,i}) \\ &= (n - 3) + 3 + 3 + i \\ &= n + i + 3 \end{aligned}$$
7.
$$\begin{aligned} wt(u_{2,n-1}) &= f(u_{2,n-1}) + f(yu_{2,n-1}) + f(u_{2,n-1}u_{2,n-2}) + f(u_{1,n-1}u_{2,n-1}) \\ &= (n - 3) + 3 + 3 + (n - 1) \\ &= 2n + 2 \end{aligned}$$
8.
$$\begin{aligned} wt(v_{1,1}) &= f(v_{1,1}) + f(v_{1,1}v_{1,n}) + f(v_{1,1}v_{1,2}) + f(v_{1,1}v_{2,1}) \\ &= 3 + (n - 1) + (n - 1) + (1 + 1) \\ &= 2n + 3 \end{aligned}$$
9.
$$\begin{aligned} wt(v_{1,i}) &= f(v_{1,i}) + f(v_{1,i}v_{1,i+1}) + f(v_{1,i-1}v_{1,i}) + f(v_{1,i}v_{2,i}) \\ &= 3 + (n - 1) + (n - 1) + (i + 1) \\ &= 2n + i + 1 \end{aligned}$$
10.
$$\begin{aligned} wt(v_{1,n-1}) &= f(v_{1,n-1}) + f(v_{1,n-1}v_{1,n}) + f(v_{1,n-2}v_{1,n}) + f(v_{1,n-1}v_{2,n-1}) \\ &= 3 + (n - 1) + (n - 1) + (n - 1 + 1) \\ &= 3n + 1 \end{aligned}$$
11.
$$\begin{aligned} wt(v_{1,n}) &= f(v_{1,n}) + f(v_{1,n}v_{1,n-1}) + f(v_{1,n}v_{1,1}) + f(yv_{1,n}) \\ &= 3 + (n - 1) + (n - 1) + (n + 1) \\ &= 3n + 2 \end{aligned}$$
12.
$$\begin{aligned} wt(v_{2,1}) &= f(v_{2,1}) + f(yv_{2,1}) + f(v_{2,1}v_{1,2}) + f(v_{1,1}v_{2,1}) \\ &= (n + 1) + (n) + (n) + (1 + 1) \\ &= 3n + 3 \end{aligned}$$



13. $wt(v_{2,i}) = f(v_{2,i}) + f(v_{2,i}v_{2,i+1}) + f(v_{2,i-1}v_{2,i}) + f(v_{1,i}v_{2,i})$
 $= (n+1) + (n) + (n) + (i+1)$
 $= 3n + i + 2$
14. $wt(v_{2,n-1}) = f(v_{2,n-1}) + f(yv_{2,n-1}) + f(v_{2,n-1}v_{2,n-2}) + f(v_{1,n-1}v_{2,n-1})$
 $= (n+1) + (n) + (n) + (n-1+1)$
 $= 4n + 1$
15. $wt(w_{1,1}) = f(w_{1,1}) + f(w_{1,1}w_{1,n}) + f(w_{1,1}w_{1,2}) + f(w_{1,1}w_{2,1})$
 $= 5 + (2n-3) + (2n-3) + (1+2)$
 $= 4n + 2$
16. $wt(w_{1,i}) = f(w_{1,i}) + f(w_{1,i}w_{1,i+1}) + f(w_{1,i-1}w_{1,i}) + f(w_{1,i}w_{2,i})$
 $= 5 + (2n-3) + (2n-3) + (i+2)$
 $= 4n + i + 1$
17. $wt(w_{1,n-1}) = f(w_{1,n-1}) + f(w_{1,n-1}w_{1,n}) + f(w_{1,n-2}w_{1,n}) + f(w_{1,n-1}w_{2,n-1})$
 $= 5 + (2n-3) + (2n-3) + (n-1+2)$
 $= 5n$
18. $wt(w_{1,n}) = f(w_{1,n}) + f(w_{1,n}w_{1,n-1}) + f(w_{1,n}w_{1,1}) + f(yw_{1,n})$
 $= 5 + (2n-3) + (2n-3) + (n+2)$
 $= 5n + 1$
19. $wt(w_{2,1}) = f(w_{2,1}) + f(yw_{2,1}) + f(w_{2,1}w_{1,2}) + f(w_{1,1}w_{2,1})$
 $= (n+3) + (2n-2) + (2n-2) + (1+2)$
 $= 5n + 2$
20. $wt(w_{2,i}) = f(w_{2,i}) + f(w_{2,i}w_{2,i+1}) + f(w_{2,i-1}w_{2,i}) + f(w_{1,i}w_{2,i})$
 $= (n+3) + (2n-2) + (2n-2) + (i+2)$
 $= 5n + i + 1$
21. $wt(w_{2,n-1}) = f(w_{2,n-1}) + f(yw_{2,n-1}) + f(w_{2,n-2}w_{2,n-1}) + f(w_{1,n-1}w_{2,n-1})$
 $= (n+3) + (2n-2) + (2n-2) + (n-1+2)$
 $= 6n$
22. $wt(x_{1,1}) = f(x_{1,1}) + f(x_{1,1}x_{1,n}) + f(x_{1,1}x_{1,2}) + f(x_{1,1}x_{2,1})$
 $= (n+2) + (2n-1) + (2n-1) + (n+1)$
 $= 6n + 1$
23. $wt(x_{1,i}) = f(x_{1,i}) + f(x_{1,i}x_{1,i+1}) + f(x_{1,i-1}x_{1,i}) + f(x_{1,i}x_{2,i})$
 $= (n+2) + (2n-1) + (2n-1) + (n+i)$
 $= 6n + i$
24. $wt(x_{1,n-1}) = f(x_{1,n-1}) + f(x_{1,n-1}x_{1,n}) + f(x_{1,n-2}x_{1,n}) + f(x_{1,n-1}x_{2,n-1})$
 $= (n+2) + (2n-1) + (2n-1) + (n+n-1)$
 $= 7n - 1$
25. $wt(x_{1,n}) = f(x_{1,n}) + f(x_{1,n}x_{1,n-1}) + f(x_{1,n}x_{1,1}) + f(yx_{1,n})$
 $= (n+2) + (2n-1) + (2n-1) + (n+n)$
 $= 7n$
26. $wt(x_{2,1}) = f(x_{2,1}) + f(yx_{2,1}) + f(x_{2,1}x_{1,2}) + f(x_{1,1}x_{2,1})$
 $= 2n + (2n) + (2n) + (n+1)$
 $= 7n + 1$
27. $wt(x_{2,i}) = f(x_{2,i}) + f(x_{2,i}x_{2,i+1}) + f(x_{2,i-1}x_{2,i}) + f(x_{1,i}x_{2,i})$
 $= 2n + (2n) + (2n) + (n+i)$



$$\begin{aligned}
&= 7n + i \\
28. \quad wt(x_{2,n-1}) &= f(x_{2,n-1}) + f(yx_{2,n-1}) + f(x_{2,n-2}x_{2,n-1}) + f(x_{1,n-1}x_{2,n-1}) \\
&= 2n + (2n) + (2n) + (n + n - 1) \\
&= 8n - 1 \\
29. \quad wt(y) &= f(y) + f(yu_{1,n}) + f(yu_{2,1}) + f(yu_{2,n-1}) + f(yv_{1,n}) + f(yv_{2,1}) + \\
&\quad f(yv_{2,n-1}) + f(yw_{1,n}) + f(yw_{2,1}) + f(yw_{2,n-1}) + f(yx_{1,n}) + f(yx_{2,1}) + \\
&\quad f(yx_{2,n-1}) \\
&= 1 + (n) + 3 + 3 + (n + 1) + n + n + (n + 2) + (2n - 2) + (2n - 2) \\
&\quad + (n + 2) + 2n + 2n \\
&= 14n + 8
\end{aligned}$$

Berdasarkan definisi bobot titik tersebut, diperoleh

$$\begin{aligned}
&wt(u_{1,1}) < wt(u_{1,i}) < \dots < wt(u_{1,n-1}) < wt(u_{1,n}) < wt(u_{2,1}) < wt(u_{2,i}) < \dots \\
&\quad < wt(u_{2,n-1}) \\
&< wt(v_{1,1}) < wt(v_{1,i}) < \dots < wt(v_{1,n-1}) < wt(v_{1,n}) < wt(v_{2,1}) < wt(v_{2,i}) < \dots \\
&\quad < wt(v_{2,n-1}) \\
&< wt(w_{1,1}) < wt(w_{1,i}) < \dots < wt(w_{1,n-1}) < wt(w_{1,n}) < wt(w_{2,1}) < wt(w_{2,i}) < \dots \\
&\quad < wt(w_{2,n-1}) \\
&< wt(x_{1,1}) < wt(x_{1,i}) < \dots < wt(x_{1,n-1}) < wt(x_{1,n}) < wt(x_{2,1}) < wt(x_{2,i}) < \dots \\
&\quad < wt(x_{2,n-1}) < wt(y).
\end{aligned}$$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa bobot setiap titik pada $4(P_{2,n})$ berbeda. Maka f yang dikonstruksikan tersebut merupakan suatu pelabelan tidak teratur pada $4(P_{2,n})$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa label terbesar yang digunakan adalah t sebagai berikut. Misalkan $t = 2n$.

Untuk $i = 1, 2, \dots, n - 1$ dan $n \geq 4$ maka

1. $f(u_{1,i}) = 1 < t$
2. $f(u_{2,i}) = n - 3 < t$
3. $f(v_{1,i}) = 3 < t$
4. $f(v_{2,i}) = n + 1 < t$
5. $f(w_{1,i}) = 5 < t$
6. $f(w_{2,i}) = n + 3 < t$
7. $f(x_{1,i}) = n + 2 < t$
8. $f(x_{2,i}) = 2n \leq t$
9. $f(y) = 1 < t$
10. $f(u_{1,i}u_{2,i}) = i < t$
11. $f(u_{1,i}u_{1,i+1}) = f(u_{1,1}u_{1,n}) = 1 < t$
12. $f(u_{2,i}u_{2,i+1}) = f(yu_{2,1}) = f(yu_{2,n-1}) = 3 < t$
13. $f(v_{1,i}v_{2,i}) = i + 1 < t$
14. $f(v_{1,i}v_{1,i+1}) = f(v_{1,1}v_{1,n}) = n - 1 < t$
15. $f(v_{2,i}v_{2,i+1}) = f(yv_{2,1}) = f(yv_{2,n-1}) = n < t$



16. $f(w_{1,i}w_{2,i}) = i + 2 < ts$
17. $f(w_{1,i}w_{1,i+1}) = f(w_{1,1}w_{1,n}) = 2n - 3 < t$
18. $f(w_{2,i}w_{2,i+1}) = f(yw_{2,1}) = f(yw_{2,n-1}) = 2n - 2 < t$
19. $f(x_{1,i}x_{2,i}) = n + i < t$
20. $f(x_{1,i}x_{1,i+1}) = f(x_{1,1}x_{1,n}) = 2n - 1 < t$
21. $f(x_{2,i}x_{2,i+1}) = f(yx_{2,1}) = f(yx_{2,n-1}) = 2n \leq t$

Dengan demikian f merupakan suatu pelabelan- t total tidak teratur titik dengan $t = 2n$, untuk $n \geq 4$. Artinya $tvs(4(P_{2,n})) \leq 2n$. Karena $tvs(4(P_{2,n})) \geq 2n$ dan $tvs(4(P_{2,n})) \leq 2n$, maka

$$tvs(4(P_{2,n})) = 2n \quad \blacksquare.$$

3.2 Pembahasan

Pada tahun 2014, Martin Baca telah menentukan nilai total ketidakteraturan sisi pada graf prisma yang diperumum [6] namun belum menentukan nilai total ketidakteraturan titik pada graf prisma. Salah satu hal yang menarik pada graf prisma adalah dapat digabungkan dengan menggunakan operasi amalgamasi sehingga menghasilkan sebuah graf baru. Penelitian ini dilakukan dengan menentukan batas bawah terbesar dengan menggunakan teorema. Sedangkan menentukan batas atas terkecil dengan menggunakan konstruksi pelabelan pada titik dan sisi graf amalgamasi prisma. sehingga diperoleh nilai total ketidakteraturan titik pada graf hasil amalgamasi Prisma untuk $n \geq 4$ yaitu $tvs(4(P_{2,n})) = 2n$.

4 KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan penelitian, diperoleh kesimpulan bahwa nilai ketidakteraturan pada graf hasil amalgamasi Prisma untuk $n \geq 4$ yaitu $tvs(4(P_{2,n})) = 2n$. Pembahasan mengenai pelabelan total tidak teratur titik masih terbuka bagi peneliti lain untuk melanjutkan penelitian ini dan dapat juga melakukan penelitian yang sejenis dengan jenis-jenis graf yang berbeda.

REFERENCES

- [1] Ahmad, A., 2014. Irregular Total Labeling of Disjoint Union of Prisms and Cycles. *Australasian Journal of Combinatorics*. Vol. 59, 98-106.
- [2] Ahmad, A., Baca, M., dan Bashir, Y., 2014. Total Vertex Irregularity Strength of Certain Classes of Unicyclic Graphs. *Bull. Math. Sci. Math Roumanie*. Vol.2, 147-152.
- [3] Al-Mushayt O, Arshad A, Siddiqui, M., 2013. Total Vertex Irregularity Strength of Convex Polytope Graphs. *Acta Math Univ Comenianae*. Vol. 82, 29-37.
- [4] Baca, M., Jendrol., Miller, M., dan Ryan, J., 2007. On Irregular total Labelings. *Discrete Mathematics*. Vol. 307, 1378-1388.



- [5] Chartrand G, Jacobson M, Lehel J, Oellermann O, Ruiz S & Saba F., 1988. Irregular Network. *Congressus Numerantium*. Vol. 64, 187-192.
- [6] Baca, M., & Siddiqui, M. K., 2014. Total Edge Irregularity Strength of Generalized Prism, *Appl. Math Comput*. Vol. 235, 168-173.
- [7] Harju, T., 2012. Graph Theory. Finland: Department of Mathematics University of Turky.
- [8] Indriati D, Widodo, Wijayanti, I., Sugeng KA, Ba'ca M, Semani'cov'a-Fenovcikova, A., 2016. The Total Vertex Irregularity Strength of Generalized Helm Graphs and Prisms ith Outer Pendant Edges. *Australias J Combin*. Vol. 65, 14–26.
- [9] Nurdin, Permatasari, D., Hasmawati., Baca, M., & Semani'cov'a-Fenovcikova, A., 2018. On Irregularity Strength of Diamond Network. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*. Vol. 15, 291–297.
- [10] Nurdin, Baskoro, E.T., Salman, A.N.M., dan Gaos, N.N., 2010. On The Total Vertex Irregularity Strength of Trees. *Discrete Mathematics*. Vol. 310, 3043-3048.
- [11] Nurdin and H. K. Kim, 2019. Irregular labeling on Transportation Network of Splitting Graphs of Stars. *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*. Vol. 22, No. 1, 103–108.
- [12] Nurdin, Kim, H. K., Sunusi, N., & Riskawati, 2021. On Total Vertex Irregularity Strength of Hexagonal Cluster Graphs. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. Vol, 2021, 1-9.
- [13] Rosyida,I., Mulyono, Indriati, D., 2019. Determining Total Vertex Irregularity Strength of $T_r(4, 1)$ Tadpole Chain Graph and its Computation. *Procedia Computer Science*. Vol. 157, 699-706.
- [14] Susilawati, Baskoro, E.T., Simajuntak, R., 2015. Total Vertex-Irregularity Labelings for Subdivision of Several Classes of Trees. *Procedia Computer Science*. Vol. 74, 112 – 1176.
- [15] Wallis, W. D., 2001. Magic Graphs. Birkhäuser Boston. New Work.

