

## Stability Analysis for the Spread of Mumps Based on SIQR Model

### Analisis Kestabilan untuk Penyebaran Penyakit Gondongan Berdasarkan Model SIQR

Ratna Widayati<sup>\*1</sup>, Nadzifah<sup>\*2</sup>, Vika Fatihatul Fiqiyah<sup>\*3</sup>, Nita Rizkiyani<sup>\*4</sup>

\*Program Studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Komputer, Universitas Nahdlatul Ulama Al Ghazali

*Email:* <sup>1</sup>ratnawidayati1708@gmail.com, <sup>2</sup>naddifa78@gmail.com, <sup>3</sup>vikafatiha32@gmail.com, <sup>4</sup>riskikroyal@gmail.com

#### Abstract

Mumps is an infectious disease caused by a virus that is quite dangerous because vaccine strategies often fail. In severe cases, mumps can lead to infection of the covering of the brain (15%), pancreatitis (4%), permanent deafness, and painful swelling of the testes which rarely causes infertility. In addition, genetic mutations that are continuously carried out by the virus and the movement of individuals from one area to another can result in the spread of causing an epidemic in an area. This study discusses the spread of mumps by assuming there is a population of individuals who are quarantined. In addition, it is possible to die from mumps in the presence of complications from other diseases. The purpose of this research is to look at the behavior of the system solution analytically depending on the basic reproduction number ( $R_0$ ) accompanied by numerical simulations on initial values with certain parameters. The SIQR model is used by assumes that individuals who have recovered will get permanent immunity against Mumps. The analysis was carried out around the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point. It was found that the disease-free equilibrium point is locally asymptotically stable with conditions  $R_0 < 1$ . This means that if the birth rate is less than the natural death rate and the contact rate between individuals infected with mumps and susceptible individuals is less than the sum of the recovery rate, death rate and quarantine rate, then the mumps outbreak will eventually disappear from the population. On the other hand, the local asymptotically stable endemic equilibrium point if  $R_0 > 1$ . This means that if the mumps disease is about to become epidemic and infected individuals are still in the population. This can be interpreted as if the birth rate is greater than the natural death rate and the contact rate between individuals infected with mumps and susceptible individuals is greater than the sum of the recovery rate, death rate and quarantine rate then the mumps outbreak will still exist in the population. However, if the value of the quarantine rate is increased, the value will decrease and the quarantined individual population approaches the infected individual



# JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI

Ratna Widayati, Nadzifah, Vika Fatihatul Fiqiyah, Nita Rizkiyani

population. This means that the proposed quarantine scenario with the addition of class Q makes the system solution better. Furthermore, a simulation was carried out with the Maple 18 program.

**Keywords:** Mumps, SIQR, Stability.

## Abstrak

Penyakit gondongan merupakan penyakit menular disebabkan oleh virus yang cukup berbahaya karena strategi vaksin yang sering gagal. Pada kasus penyakit gondongan yang parah dapat menimbulkan infeksi pada penutup otak (15%), pankreatitis (4%), ketulian permanen, dan pembengkakan testis yang menyakitkan yang jarang menyebabkan kemandulan. Selain itu, mutasi genetik yang terus dilakukan oleh virus dan perpindahan individu dari suatu wilayah ke wilayah lain mengakibatkan penyebaran dapat menjadikan epidemi pada suatu wilayah. Penelitian ini membahas mengenai penyebaran penyakit gondongan dengan mengasumsikan terdapat populasi individu yang dikarantina. Selain itu, memungkinkan terjadi kematian karena penyakit gondongan dengan adanya komplikasi penyakit lain. Tujuan dari penelitian ini adalah melihat perilaku solusi sistem secara analitik bergantung pada bilangan reproduksi dasar ( $R_0$ ) disertai simulasi numerik pada nilai awal dengan parameter tertentu. Model yang digunakan SIQR dengan asumsi individu yang telah sembuh mendapatkan kekebalan permanen terhadap penyakit Gondongan. Analisa dilakukan disekitar titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik diperoleh hasil bahwa titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal dengan syarat  $R_0 < 1$ . Artinya jika laju kelahiran lebih kecil dari laju kematian alami dan laju kontak antara individu yang terinfeksi gondongan dengan individu rentan lebih kecil dari jumlah laju kesembuhan, laju kematian dan laju karantina maka wabah gondongan semakin lama akan menghilang dari populasi. Dilain pihak, titik ekuilibrium endemik stabil asimtotik lokal jika  $R_0 > 1$ . Artinya jika  $R_0 > 1$  penyakit gondongan akan mewabah dan individu yang terinfeksi masih ada dalam populasi. Hal tersebut dapat diartikan sebagai jika laju kelahiran lebih besar dari laju kematian alami dan laju kontak antara individu yang terinfeksi gondongan dengan individu rentan lebih besar dari jumlah laju kesembuhan, laju kematian dan laju karantina maka wabah gondongan akan tetap ada dalam populasi. Akan tetapi jika nilai dari laju karantina diperbesar, nilai  $R_0$  akan mengecil dan populasi individu yang dikarantina mendekati populasi individu terinfeksi. Artinya skenario karantina yang diusulkan dengan penambahan kelas Q membuat solusi sistem menjadi lebih baik. Selanjutnya dilakukan simulasi dengan program Maple 18.

**Kata kunci:** Gondongan, SIQR, Kestabilan.

## 1. PENDAHULUAN

Gondongan merupakan infeksi pada kelenjar ludah yang disebabkan oleh virus dari golongan paramyxovirus. Virus ini merupakan virus RNA dengan tipe penyebaran melalui kontak langsung dan droplet [7]. Gondongan umumnya menyerang anak-anak yang dapat mengakibatkan infeksi saluran pernafasan akut [7]. Gejala awal yang muncul diantaranya demam, nyeri otot, sakit kepala, dan merasa lelah [9]. Gondongan biasanya diikuti oleh pembengkakan yang menyakitkan pada satu atau kedua kelenjar parotis. Menurut [9], gejala gondongan pada orang dewasa seringkali lebih parah daripada pada anak-anak. Gejala parah tersebut dapat menimbulkan komplikasi seperti aseptik, meningitis, ensefalitis, orkitis, dan ooforitis. Selain itu, pada kasus yang parah dapat menimbulkan infeksi pada penutup otak (15%), pankreatitis (4%), ketulian permanen, dan pembengkakan testis yang menyakitkan yang jarang menyebabkan kemandulan [9]. Akan tetapi, individu yang dapat sembuh dari infeksi virus ini biasanya kebal seumur hidup dan peluang individu untuk terinfeksi kembali cenderung ringan [10].

Pencegahan penyebaran penyakit Gondongan dilakukan melalui vaksin MMR (Measles, Mumps, Rubella) yang diberikan pada anak-anak usia 12-15 bulan untuk dosis pertama dan anak usia 4-6 tahun untuk dosis kedua. Akan tetapi, vaksin MMR memiliki efek yang terbatas pada penyebaran penyakit Gondongan [7]. Selain itu, mutasi genetik yang terus dilakukan oleh virus dan perpindahan individu dari

## JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI

Ratna Widayati, Nadzifah, Vika Fatihatul Fiqiyah, Nita Rizkiyani

suatu wilayah ke wilayah lain mengakibatkan penyebaran dapat menjadikan epidemi pada suatu wilayah [3]. Seperti yang terjadi di kota Xiamen dan provinsi Fujian China. Gondongan menyerang sekitar 21 individu dari 100 individu total populasi. Epidemi Gondongan sering terjadi sepanjang tahun di wilayah sekitar ekuator sedangkan di wilayah yang lebih utara dan selatan ekuator lebih sering terjadi pada musim dingin dan musim semi [11] yang mengakibatkan sekitar satu per sepuluh ribu orang yang terinfeksi meninggal.

Hal tersebut menjadikan Gondongan salah satu penyakit berbahaya yang dapat menimbulkan kematian masal jika penyebarannya tidak dikendalikan dengan baik. Oleh karena itu terdapat penelitian-penelitian yang membahas mengenai penyebaran Gondongan diantaranya [3] membahas mengenai pemodelan matematika pada kegagalan vaksin gondongan di Provinsi Jiangsu Cina. Penelitian ini [3] membagi kelas populasi individu terinfeksi menjadi 2 subpopulasi dengan mengasumsikan tidak ada kematian karena Gondongan. Hasil dari penelitian tersebut memberikan rekomendasi pada perencanaan program kesehatan untuk menerapkan intervensi yang lebih preventif pada gondongan selama periode risiko infeksi yang lebih tinggi. Selain itu, [4] membahas mengenai penyebaran Gondongan musiman di Cina. Pada penelitiannya, [4] mendefinisikan kelas populasi individu yang di vaksin MMR. Hasil analisis dari penelitian menunjukkan bahwa tingkat vaksinasi dan tingkat vaksinasi yang tidak valid berperan penting dalam penyebaran Gondongan. Penelitian [4] menyarankan untuk meningkatkan cakupan vaksin dan membuat dua dosis vaksin MMR (Measles, Mumps dan Rubella) di Cina. Penelitian lain dari [3] mengenai korelasi antara penyakit gondongan dengan faktor meteorologi di Kota Xiamen Cina. Pada penelitiannya, [3] membedakan kelas individu yang menunjukkan gejala infeksi ringan dan infeksi berat. Kesimpulan yang diperoleh adalah tingkat penularan yang relatif tinggi telah ditemukan di Kota Xiamen menyebabkan epidemi gondongan yang berkelanjutan. Faktor meteorologi, terutama suhu udara dan kelembaban relatif, erat kaitannya dengan gondongan. Penelitian ini [2] menganalisa mengenai akibat yang ditimbulkan saat terinfeksi penyakit gondongan yaitu kehilangan pendengaran menggunakan model fraksional Caputo–Fabrizio. Penelitian [12] mengusulkan model SIR pada penyakit campak dengan kelompok usia berbeda. Simulasi dilakukan dengan menggunakan data di India untuk mengevaluasi keefektifan strategi vaksinasi untuk pengendalian wabah. Selain itu, penelitian [8] menggunakan model SEIR yang bergantung pada kepadatan karena menurut [8], kasus gondongan meningkat seiring bertambahnya ukuran kota sehingga hal tersebut menunjukkan transmisi yang bergantung pada kepadatan. Data penelitian [8] diambil di beberapa kota di Amerika antara tahun 1923-1932 dengan kesimpulan jumlah kasus paling sering meningkat pada bulan Maret dengan transmisi yang lebih tinggi dari rata-rata dari Desember sampai April dan menunjukkan korelasi dengan kelahiran mingguan. Hasil penelitian [8] mengusulkan pentingnya data survey penyakit menular jangka panjang yang akan memberi informasi studi masa depan tentang munculnya kembali penyakit gondongan. Penelitian [5] mengusulkan model SLR dengan L menyatakan gangguan pendengaran akibat virus gondongan. Model ini bertujuan menyelidiki dampak kebisingan pada pertumbuhan virus gondong dengan menggunakan transformasi Fourier. Kesimpulan dari penelitian ini adalah dampak difusi pada sistem dapat berpengaruh pada pengendalian untuk tingkat infeksi, intensitas, penyebaran dan pengobatan yang lebih baik untuk meningkatkan angka kesembuhan. Selanjutnya penelitian dari [1] yang mengusulkan model SIR pada penyebaran gondongan dengan menggunakan vaksin. Tujuan dari penelitian ini adalah bagaimana membagi vaksin secara optimal pada setiap populasi. Kesimpulan berdasarkan simulasi numerik menyatakan alokasi vaksin yang optimal dapat mengurangi fungsional  $Q$  secara signifikan. Selain itu, terdapat penelitian [6] yang mengusulkan peningkatan cakupan vaksin dan membuat dua dosis vaksin MMR tersedia secara gratis di Cina. Pada penelitiannya [6] melakukan analisis sensitivitas terhadap bilangan reproduksi dasar dan analisis pada titik ekuilibrium endemik untuk mengevaluasi efektivitas tindakan pengendalian gondok. Penelitian mengenai dinamika penyakit gondongan dengan vaksin juga dilakukan di Jepang oleh [4] dengan menyertakan faktor ekonomis. Hasil yang diperoleh dari penelitian ini adalah dalam semua skenario analisis sensitivitas, vaksinasi dua dosis lebih baik daripada program

## JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI

Ratna Widayati, Nadzifah, Vika Fatihatul Fiqiyah, Nita Rizkiyani

satu dosis. Simulasi yang dilakukan menegaskan bahwa program vaksinasi rutin dua dosis lebih menghemat biaya.

Berdasarkan penelitian-penelitian terdahulu, belum ada penelitian yang membahas mengenai penyebaran penyakit gondongan dengan menyertakan populasi individu yang dikarantina. Pada kenyataannya, seorang anak usia sekolah yang terinfeksi penyakit gondongan, dimungkinkan untuk dikarantina di rumah dan tidak diperbolehkan masuk sekolah terlebih dahulu agar tidak menularkan penyakit gondongan pada teman-temannya. Selain itu, parameter kematian tidak ditemukan pada penelitian terdahulu, padahal kematian karena gondongan akibat adanya komplikasi penyakit lain sangat mungkin terjadi. Vaksin yang telah dilakukan oleh pemerintah terbukti masih menimbulkan wabah akibat kurang optimalnya dosis yang diberikan seperti pada negara Jepang, India dan Cina [3,4,12]. Penelitian [2] membahas mengenai akibat yang ditimbulkan dari serangan virus penyebab gondongan yaitu masalah pendengaran tanpa melihat masalah utama yang ditimbulkan akibat virus ini yaitu nyeri otot sehingga menimbulkan ketidaknyamanan pada penderitanya. Oleh karena itu, pada penelitian ini lebih difokuskan pada masalah utama pada penderita yang akan menimbulkan penularan yang serius jika tidak ditangani dengan baik. Kelas populasi Q diharapkan dapat berpengaruh pada penyebaran secara signifikan. Penelitian ini akan membahas mengenai penyebaran penyakit gondongan dengan membagi 4 kelas populasi dengan model SIQR dengan asumsi terdapat kematian karena gondongan akibat komplikasi dengan penyakit lain. Selain itu, terdapat kelas karantina untuk individu yang terinfeksi gondongan.

## 2. Metode Penelitian

Berikut ini akan dijelaskan mengenai langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini.

### Langkah 1. Studi Literatur

Pada tahap ini peneliti melakukan kajian mengenai pemodelan penyakit menular yang sering terjadi di masyarakat dengan mencari informasi dari artikel-artikel pada jurnal internasional. Kemudian peneliti mempelajari bahaya yang mungkin terjadi akibat penyakit tersebut. Peneliti memahami bahwa penelitian mengenai penyebaran penyakit gondongan belum banyak dilakukan di Indonesia. Padahal penularan penyakit gondongan sering terjadi pada anak-anak di Sekolah Dasar.

### Langkah 2. Pemodelan Matematika

Pemodelan matematika dilakukan dengan menyertakan asumsi-asumsi yang bersesuaian dengan keadaan nyata. Penambahan kelas populasi karantina didasarkan pada kegagalan vaksin MMR yang terjadi di beberapa negara mengakibatkan wabah gondongan masih sering muncul pada waktu tertentu. Oleh karena itu, karantina yang dimaksud adalah isolasi mandiri dirumah atau perawatan di rumah sakit bagi anak yang terinfeksi gondongan. Selain itu, asumsi terdapat kematian karena gondongan diberikan karena penyakit gondongan dapat menyebabkan komplikasi dengan penyakit lain yang berakibat kematian [9].

### Langkah 3. Analisis Model

Pada tahap ini dilakukan analisis disekitar titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik pada model yang telah terbentuk dari asumsi-asumsi yang diberikan. Metode Jacobian digunakan untuk mengetahui perilaku solusi sistem secara analitik dibantu dengan Kriteria Routh Hurwitz untuk mendapatkan jenis nilai eigen yang diperoleh dari persamaan karakteristik yang terbentuk dari determinan matriks Jacobian. Analisis yang dilakukan berdasarkan bilangan reproduksi dasar yang menjadi syarat cukup kestabilan.

### Langkah 4. Simulasi Numerik

## JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI

Ratna Widayati, Nadzifah, Vika Fatihatul Fiqiyah, Nita Rizkiyani

Simulasi numerik dilakukan dengan memvisualisasikan solusi sistem secara numerik dengan memasukkan nilai-nilai parameter yang diambil dari literatur-literatur pendukung. Nilai awal dari populasi yang digunakan merujuk pada literatur karena pada kenyataannya sangat sulit mencari nilai awal yang sesuai dengan kondisi nyata.

### Langkah 5. Kesimpulan

Berdasarkan analisis model dan simulasi yang dilakukan, diperoleh kesimpulan guna mengetahui upaya yang dapat dilakukan untuk mengendalikan wabah gondongan.

### 3. Formulasi Model

Diasumsikan populasi dibagi menjadi 4 kelas seperti pada tabel berikut ini:

<b>Tabel 3.1.</b> Kelas populasi pada model SIQR	
$S(t)$	Populasi individu rentan Gondongan pada saat $t$
$I(t)$	Populasi individu terinfeksi Gondongan pada saat $t$
$Q(t)$	Populasi individu dalam karantina pada saat $t$
$R(t)$	Populasi individu sembuh dari Gondongan pada saat $t$

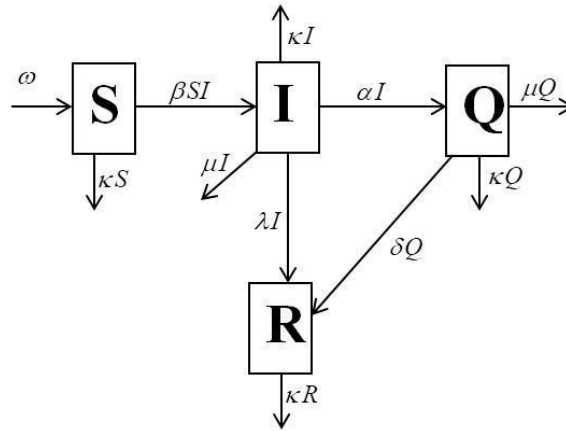
Berdasarkan Tabel 3.1, parameter-parameter yang mempengaruhi perubahan populasi diberikan pada Tabel 3.2 berikut ini.

<b>Tabel 3.2.</b> Parameter dalam model SIQR	
$\omega$	Laju kelahiran
$\kappa$	Laju kematian alami
$\beta$	Laju kontak antara individu terinfeksi Gondongan dengan individu rentan
$\alpha$	Laju karantina individu yang telah terinfeksi Gondongan
$\mu$	Laju kematian karena Gondongan
$\delta$	Laju kesembuhan individu yang dikarantina
$\lambda$	Laju kesembuhan individu yang terinfeksi

Nilai-nilai parameter pada Tabel 3.2 seluruhnya bernilai positif. Asumsi-asumsi yang digunakan pada model SIQR ini adalah sebagai berikut:

- a. Bayi yang lahir masuk ke kelas S sebagai individu yang rentan Gondongan
- b. Penularan Gondongan hanya bisa terjadi antara individu rentan dan individu yang terinfeksi Gondongan
- c. Individu dengan gejala ringan ataupun berat diklasifikasikan ke kelas I.
- d. Individu yang terinfeksi bisa sembuh tanpa harus melewati proses karantina

Dari asumsi-asumsi tersebut, diperoleh diagram transfer sebagai berikut:



**Gambar 3.1.** Diagram transfer model SIQR

Selanjutnya, berdasarkan diagram transfer pada Gambar 3.1, diperoleh model matematika untuk penyebaran Gondongan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \omega - \beta SI - \kappa S \quad (1a)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \lambda I - \kappa I - \mu I - \alpha I \quad (1b)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha I - \kappa Q - \mu Q - \delta Q \quad (1c)$$

$$\frac{dR}{dt} = \lambda I + \delta Q - \kappa R \quad (1d)$$

dengan total populasi  $N = S + I + Q + R$  dengan  $S, I, Q, R \geq 0$  dan  $\omega, \beta, \kappa, \lambda, \mu, \alpha, \delta > 0$  sehingga diperoleh himpunan invarian positif

$$\Omega = \left\{ (S, I, Q, R) \in \mathbb{R}_+^4 : 0 \leq S + I + Q + R \leq \frac{\omega}{\kappa} \right\}.$$

#### 4. Titik Ekuilibrium

Sistem (1) mencapai titik ekuilibrium jika  $\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dQ}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0$ , sehingga Sistem (1) dapat dinyatakan dengan

$$\omega - \beta SI - \kappa S = 0 \quad (2a)$$

$$\beta SI - \lambda I - \kappa I - \mu I - \alpha I = 0 \quad (2b)$$

$$\alpha I - \kappa Q - \mu Q - \delta Q = 0 \quad (2c)$$

$$\lambda I + \delta Q - \kappa R = 0. \quad (2d)$$

Titik ekuilibrium bebas penyakit diperoleh jika disubstitusikan  $I = 0$  pada Sistem (2). Berdasarkan Persamaan (2a) diperoleh

$$S = \frac{\omega}{\kappa}.$$

## JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI

Ratna Widayati, Nadzifah, Vika Fatihatul Fiqiyah, Nita Rizkiyani

Kemudian berdasarkan Persamaan (2c) diperoleh  $Q = 0$  dan berdasarkan Persamaan (2d) diperoleh  $R = 0$ . Oleh karena itu, diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit

$$E_1 = (S_1, I_1, Q_1, R_1) = \left( \frac{\omega}{\kappa}, 0, 0, 0 \right).$$

Lebih lanjut, jika  $I \neq 0$  dapat ditemukan titik ekuilibrium endemik. Berdasarkan Persamaan (2b) diperoleh

$$(\beta S - \lambda - \kappa - \mu - \alpha)I = 0.$$

Karena  $I \neq 0$  maka

$$\begin{aligned} \beta S - \lambda - \kappa - \mu - \alpha &= 0 \\ S &= \frac{\lambda + \kappa + \mu + \alpha}{\beta}. \end{aligned}$$

Kemudian Persamaan (2a) dapat dinyatakan dengan

$$-\beta SI = \kappa S - \omega$$

$$I = \frac{\omega - \kappa S}{\beta S}.$$

Lebih lanjut, berdasarkan Persamaan (2c) diperoleh

$$\alpha \left( \frac{\omega - \kappa S}{\beta S} \right) - (\kappa + \mu + \delta)Q = 0$$

$$(\kappa + \mu + \delta)Q = \alpha \left( \frac{\omega - \kappa S}{\beta S} \right)$$

$$Q = \alpha \left( \frac{\omega - \kappa S}{\beta (\kappa + \mu + \delta) S} \right).$$

Berdasarkan Persamaan (2d) diperoleh

$$\lambda \left( \frac{\omega - \kappa S}{\beta S} \right) + \delta \alpha \left( \frac{\omega - \kappa S}{\beta (\kappa + \mu + \delta) S} \right) - \kappa R = 0$$

$$\lambda \left( \frac{\omega - \kappa S}{\beta S} \right) + \delta \alpha \left( \frac{\omega - \kappa S}{\beta (\kappa + \mu + \delta) S} \right) = \kappa R$$

$$R = \lambda \left( \frac{\omega - \kappa S}{\kappa \beta S} \right) + \delta \alpha \left( \frac{\omega - \kappa S}{\beta \kappa (\kappa + \mu + \delta) S} \right)$$

$$R = \left( \frac{\omega - \kappa S}{\kappa \beta S} \right) \left( \lambda + \frac{\delta \alpha}{(\kappa + \mu + \delta)} \right).$$

Jadi, diperoleh titik ekuilibrium endemik  $E^* = (S^*, I^*, Q^*, R^*)$  dengan

**JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI**  
**Ratna Widayati, Nadzifah, Vika Fatihatul Fiqiyah, Nita Rizkiyani**

$$S^* = \frac{\lambda + \kappa + \mu + \alpha}{\beta}$$

$$I^* = \frac{\omega - \kappa S^*}{\beta S^*}$$

$$Q^* = \alpha \left( \frac{\omega - \kappa S^*}{\beta (\kappa + \mu + \delta) S^*} \right)$$

$$R^* = \left( \frac{\omega - \kappa S^*}{\kappa \beta S^*} \right) \left( \lambda + \frac{\delta \alpha}{\kappa + \mu + \delta} \right).$$

### 5. Bilangan Reproduksi Dasar (*Basic Reproduction Number*)

Bilangan reproduksi dasar dari infeksi suatu penyakit menular dapat didefinisikan sebagai jumlah kasus yang dihasilkan oleh satu kasus secara rata-rata selama periode menularnya. Fungsi dari Bilangan Reproduksi Dasar adalah membantu menentukan apakah suatu penyakit infeksi dapat menyebar dalam suatu populasi atau tidak. Selanjutnya Bilangan Reproduksi Dasar akan dicari menggunakan metode *Next Generation Matrices*.

Langkah pertama linierisasi terhadap populasi individu terinfeksi yaitu kelas  $I$  dan  $Q$  di titik ekuilibrium bebas penyakit.

$$j_{E_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial (\beta SI - \lambda I - \kappa I - \mu I - \alpha I)}{\partial I} & \frac{\partial (\beta SI - \lambda I - \kappa I - \mu I - \alpha I)}{\partial Q} \\ \frac{\partial (\alpha I - \kappa Q - \mu Q - \delta Q)}{\partial I} & \frac{\partial (\alpha I - \kappa Q - \mu Q - \delta Q)}{\partial Q} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \beta S - (\lambda + \kappa + \mu + \alpha) & 0 \\ \alpha & -(\kappa + \mu + \delta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\beta \omega}{\kappa} - (\lambda + \kappa + \mu + \alpha) & 0 \\ \alpha & -(\kappa + \mu + \delta) \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya dekomposisi matriks Jacobi  $j$  menjadi matriks  $F$  dan  $V$ .

$$j_{E_1} = \begin{bmatrix} \frac{\beta \omega}{\kappa} & 0 \\ \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\lambda + \kappa + \mu + \alpha) & 0 \\ -\alpha & (\kappa + \mu + \delta) \end{bmatrix}$$

$$= F - V,$$

sehingga diperoleh matriks

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\beta \omega}{\kappa} & 0 \\ \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dan



## JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI

Ratna Widayati, Nadzifah, Vika Fatihatul Fiqiyah, Nita Rizkiyani

$$V = \begin{bmatrix} (\lambda + \kappa + \mu + \alpha) & 0 \\ -\alpha & (\kappa + \mu + \delta) \end{bmatrix}.$$

Langkah selanjutnya menghitung  $V^{-1}$ .

$$\begin{aligned} V^{-1} &= \frac{1}{(\kappa + \mu + \delta)(\lambda + \kappa + \mu + \alpha)} \begin{bmatrix} (\kappa + \mu + \delta) & 0 \\ \alpha & (\lambda + \kappa + \mu + \alpha) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(\kappa + \mu + \delta)}{(\kappa + \mu + \delta)(\lambda + \kappa + \mu + \alpha)} & \frac{0}{(\kappa + \mu + \delta)(\lambda + \kappa + \mu + \alpha)} \\ \frac{\alpha}{(\kappa + \mu + \delta)(\lambda + \kappa + \mu + \alpha)} & \frac{0}{(\kappa + \mu + \delta)(\lambda + \kappa + \mu + \alpha)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(\lambda + \kappa + \mu + \alpha)} & 0 \\ \frac{\alpha}{(\kappa + \mu + \delta)(\lambda + \kappa + \mu + \alpha)} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Kemudian menghitung  $FV^{-1}$ .

$$\begin{aligned} FV^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{\beta\omega}{\kappa} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(\lambda + \kappa + \mu + \alpha)} & 0 \\ \frac{\alpha}{(\kappa + \mu + \delta)(\lambda + \kappa + \mu + \alpha)} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\beta\omega}{\kappa(\lambda + \kappa + \mu + \alpha)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Bilangan Reproduksi Dasar merupakan nilai eigen terbesar dari matriks  $FV^{-1}$  dengan simbol  $R_0$ , sehingga diperoleh

$$R_0 = \frac{\beta\omega}{\kappa(\lambda + \kappa + \mu + \alpha)}.$$

### 6. Eksistensi Titik Ekuilibrium Endemik

Pada bagian akan dijelaskan mengenai eksistensi titik ekuilibrium endemik.

**Lemma 6.1** Jika  $R_0 > 1$  maka  $E^*$  eksis.

**Bukti.** Diketahui  $E^* = (S^*, I^*, Q^*, R^*)$  dengan

**JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI**  
**Ratna Widayati, Nadzifah, Vika Fatihatul Fiqiyah, Nita Rizkiyani**

$$S^* = \frac{\lambda + \kappa + \mu + \alpha}{\beta}$$

$$I^* = \frac{\omega - \kappa S^*}{\beta S^*}$$

$$Q^* = \alpha \left( \frac{\omega - \kappa S^*}{\beta (\kappa + \mu + \delta) S^*} \right)$$

$$R^* = \left( \frac{\omega - \kappa S^*}{\kappa \beta S^*} \right) \left( \lambda + \frac{\delta \alpha}{\kappa + \mu + \delta} \right).$$

Akan dibuktikan  $\omega - \kappa S^* > 0$ .

$$\begin{aligned} \omega - \kappa S^* &= \omega - \kappa \left( \frac{\lambda + \kappa + \mu + \alpha}{\beta} \right) \\ &= \frac{\omega \beta}{\beta} - \kappa \left( \frac{\lambda + \kappa + \mu + \alpha}{\beta} \right) \\ &= \frac{\kappa (\mu + \lambda + \kappa + \alpha) R_0}{\beta} - \frac{\kappa (\lambda + \kappa + \mu + \alpha)}{\beta} \\ &= \frac{\kappa (\mu + \lambda + \kappa + \alpha)}{\beta} (R_0 - 1). \end{aligned}$$

Karena  $R_0 > 1$  maka terbukti  $\omega - \kappa S^* > 0$ . Hal tersebut berakibat  $I^* > 0, Q^* > 0$  dan  $R^* > 0$ , sehingga titik ekuilibrium  $E^*$  eksis.

## 7. KESTABILAN TITIK EKUILIBRIUM

Pada bagian ini akan dibahas mengenai analisa kestabilan disekitar titik ekuilibrium bebas penyakit melalui Lemma berikut ini.

**Lemma 7.1.** *Jika  $R_0 < 1$  maka  $E_1$  stabil asimtotik lokal.*

**Bukti.** Matriks Jacobian disekitar titik ekuilibrium  $E_1$  adalah:

$$J_{E_1} = \begin{bmatrix} -\kappa & -\frac{\beta \omega}{\kappa} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta \omega}{\kappa} - \kappa - \mu - \alpha - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\kappa - \mu - \delta & 0 \\ 0 & \lambda & \delta & -\kappa \end{bmatrix}$$

Selanjutnya diperoleh persamaan karakteristik  $|J_{E_1} - pI| = 0$  dengan  $p$  nilai eigen

## JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI

Ratna Widayati, Nadzifah, Vika Fatihatul Fiqiyah, Nita Rizkiyani

$$\begin{vmatrix}
 -\kappa - p & -\frac{\beta\omega}{\kappa} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{\beta\omega}{\kappa} - \kappa - \mu - \alpha - \lambda - p & 0 & 0 \\
 0 & \alpha & -\kappa - \mu - \delta - p & 0 \\
 0 & \lambda & \delta & -\kappa - p
 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\kappa - p) \begin{vmatrix}
 \frac{\beta\omega}{\kappa} - \kappa - \mu - \alpha - \lambda - p & 0 & 0 \\
 \alpha & -\kappa - \mu - \delta - p & 0 \\
 \lambda & \delta & -\kappa - p
 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\kappa - p)(-\kappa - p) \begin{vmatrix}
 \frac{\beta\omega}{\kappa} - \kappa - \mu - \alpha - \lambda - p & 0 \\
 \alpha & -\kappa - \mu - \delta - p
 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\kappa - p)(-\kappa - p) \left( \frac{\beta\omega}{\kappa} - \kappa - \mu - \alpha - \lambda - p \right) (-\kappa - \mu - \delta - p) = 0.$$

Diperoleh  $p_1 = p_2 = -\kappa$  dan  $p_3 = -(\kappa + \mu + \delta)$ . Selanjutnya

$$\begin{aligned}
 p_4 &= \frac{\beta\omega}{\kappa} - \kappa - \mu - \alpha - \lambda \\
 &= (\mu + \lambda + \kappa + \alpha) R_0 - (\kappa + \mu + \lambda + \alpha) \\
 &= (\mu + \lambda + \kappa + \alpha) R_0 - (\kappa + \mu + \lambda + \alpha) \\
 &= (\mu + \lambda + \kappa + \alpha) (R_0 - 1)
 \end{aligned}$$

Karena  $R_0 < 1$  maka terbukti  $p_4 < 0$ . Oleh karena semua nilai eigen bernilai negatif, dapat diambil kesimpulan titik ekuilibrium bebas penyakit stabil asimtotik lokal.

Selanjutnya akan dilakukan analisa kestabilan untuk titik ekuilibrium endemik melalui Lemma berikut ini

**Lemma 7.2.** Jika  $R_0 > 1$  maka  $E^*$  stabil asimtotik lokal.

**Bukti.** Matriks Jacobian disekitar titik ekuilibrium  $E^*$  adalah

$$J_{E^*} = \begin{bmatrix}
 \left( \frac{\kappa(\alpha + \kappa + \lambda + \mu)}{\beta} + \omega \right) \beta & & & & \\
 \frac{\left( \frac{\kappa(\alpha + \kappa + \lambda + \mu)}{\beta} + \omega \right) \beta}{\alpha + \kappa + \lambda + \mu} + \kappa & \alpha + \kappa + \lambda + \mu & 0 & 0 & \\
 \frac{\left( \frac{\kappa(\alpha + \kappa + \lambda + \mu)}{\beta} + \omega \right) \beta}{\alpha + \kappa + \lambda + \mu} & 0 & 0 & 0 & \\
 0 & -\alpha & \delta + \kappa + \mu & 0 & \\
 0 & -\lambda & -\delta & \kappa & 
 \end{bmatrix}.$$

## JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI

Ratna Widayati, Nadzifah, Vika Fatihatul Fiqiyah, Nita Rizkiyani

Kemudian persamaan karakteristik  $|J_{E^*} - hI| = 0$  dengan  $h$  nilai eigen sebagai berikut

$$\begin{vmatrix}
 \left( -\frac{\kappa(\alpha + \kappa + \lambda + \mu)}{\beta} + \omega \right) \beta & & & & \\
 \hline
 \alpha + \kappa + \lambda + \mu & + \kappa + h & \alpha + \kappa + \lambda + \mu & 0 & 0 \\
 \left( -\frac{\kappa(\alpha + \kappa + \lambda + \mu)}{\beta} + \omega \right) \beta & & & & \\
 \hline
 \alpha + \kappa + \lambda + \mu & & h & 0 & 0 \\
 0 & & -\alpha & \delta + \kappa + \mu + h & 0 \\
 0 & & -\lambda & -\delta & \kappa + h
 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\kappa + h) \begin{vmatrix}
 \left( -\frac{\kappa(\alpha + \kappa + \lambda + \mu)}{\beta} + \omega \right) \beta & & & & \\
 \hline
 \alpha + \kappa + \lambda + \mu & + \kappa + h & \alpha + \kappa + \lambda + \mu & 0 & \\
 \left( -\frac{\kappa(\alpha + \kappa + \lambda + \mu)}{\beta} + \omega \right) \beta & & & & \\
 \hline
 \alpha + \kappa + \lambda + \mu & & h & 0 & \\
 0 & & -\alpha & \delta + \kappa + \mu + h & 
 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\kappa + h)(\delta + \kappa + \mu + h) \begin{vmatrix}
 \left( -\frac{\kappa(\alpha + \kappa + \lambda + \mu)}{\beta} + \omega \right) \beta & & & & \\
 \hline
 \alpha + \kappa + \lambda + \mu & + \kappa + h & \alpha + \kappa + \lambda + \mu & & \\
 \left( -\frac{\kappa(\alpha + \kappa + \lambda + \mu)}{\beta} + \omega \right) \beta & & & & \\
 \hline
 \alpha + \kappa + \lambda + \mu & & h & & 
 \end{vmatrix} = 0.$$

Diperoleh nilai eigen

$$h_1 = -\kappa$$

$$h_2 = -(\delta + \kappa + \mu).$$

Jika dimisalkan  $A = (\alpha + \kappa + \lambda + \mu)$ , nilai eigen yang lain merupakan akar-akar dari

## JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI

Ratna Widayati, Nadzifah, Vika Fatihatul Fiqiyah, Nita Rizkiyani

$$\begin{vmatrix} \left( -\frac{\kappa A}{\beta} + \omega \right) \beta & A \\ \frac{A}{A} + \kappa + h & A \\ \left( -\frac{\kappa A}{\beta} + \omega \right) \beta & h \\ -\frac{A}{A} & h \end{vmatrix} = 0$$

$$h \left( \frac{\left( -\frac{\kappa A}{\beta} + \omega \right) \beta}{A} + \kappa + h \right) + A \frac{\left( -\frac{\kappa A}{\beta} + \omega \right) \beta}{A} = 0.$$

Kemudian jika dimisalkan

$$B = \frac{\left( -\frac{\kappa A}{\beta} + \omega \right) \beta}{A},$$

diperoleh

$$h^2 + (B + \kappa)h + AB = 0 \quad (3)$$

yang artinya nilai eigen yang lain merupakan akar-akar dari Persamaan (3). Berdasarkan Kriteria Routh Hurwitz, pembuat nol Persamaan (3) akan bernilai negatif jika  $(B + \kappa) > 0$  dan  $AB > 0$ . Oleh karena itu, akan diselidiki nilai dari  $(B + \kappa)$ .

$$\begin{aligned} (B + \kappa) &= \frac{\left( -\frac{\kappa A}{\beta} + \omega \right) \beta}{A} + \kappa \\ &= \frac{\left( -\frac{\kappa A \beta}{\beta} + \omega \beta \right)}{A} + \kappa \\ &= \frac{(-\kappa A + \omega \beta + \kappa A)}{A} \\ &= \frac{\omega \beta}{A} \\ &= \frac{\omega \beta}{(\alpha + \kappa + \lambda + \mu)}. \end{aligned}$$

Karena semua parameter bernilai positif, terbukti  $(B + \kappa) > 0$ . Selanjutnya akan diselidiki nilai  $AB$ .

$$\begin{aligned}
 AB &= (\alpha + \kappa + \lambda + \mu) \frac{\left( -\frac{\kappa(\alpha + \kappa + \lambda + \mu)}{\beta} + \omega \right) \beta}{(\alpha + \kappa + \lambda + \mu)} \\
 &= \left( -\frac{\kappa(\alpha + \kappa + \lambda + \mu)}{\beta} + \omega \right) \beta \\
 &= \left( -\frac{\kappa(\alpha + \kappa + \lambda + \mu)\beta}{\beta} + \omega\beta \right) \\
 &= -\kappa(\alpha + \kappa + \lambda + \mu) + \omega\beta.
 \end{aligned}$$

Karena  $R_0 = \frac{\beta\omega}{\kappa(\mu + \lambda + \kappa + \alpha)}$ , maka

$$\begin{aligned}
 AB &= -\kappa(\alpha + \kappa + \lambda + \mu) + \kappa(\mu + \lambda + \kappa + \alpha)R_0 \\
 &= \kappa(\mu + \lambda + \kappa + \alpha)(R_0 - 1).
 \end{aligned}$$

Karena diketahui  $R_0 > 1$  maka terbukti  $AB > 0$ , sehingga terbukti  $h_3$  dan  $h_4$  bernilai negatif. Oleh karena itu, terbukti titik ekuilibrium  $E^*$  stabil asimtotik lokal.

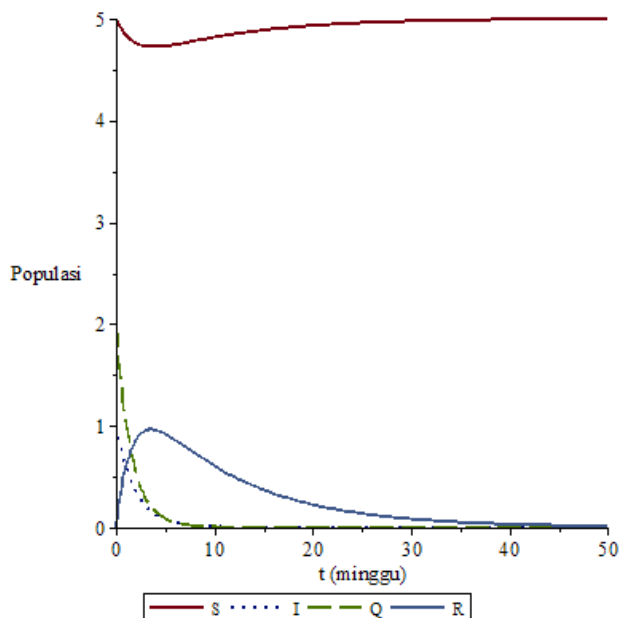
## 8. SIMULASI NUMERIK

Simulasi numerik dari Sistem (1) dibagi menjadi 2 bagian yakni ketika  $R_0 < 1$  dan  $R_0 > 1$ . Berikut ini diberikan nilai-nilai parameter yang digunakan pada simulasi

**Tabel 8.1.** Parameter dalam model SIQR

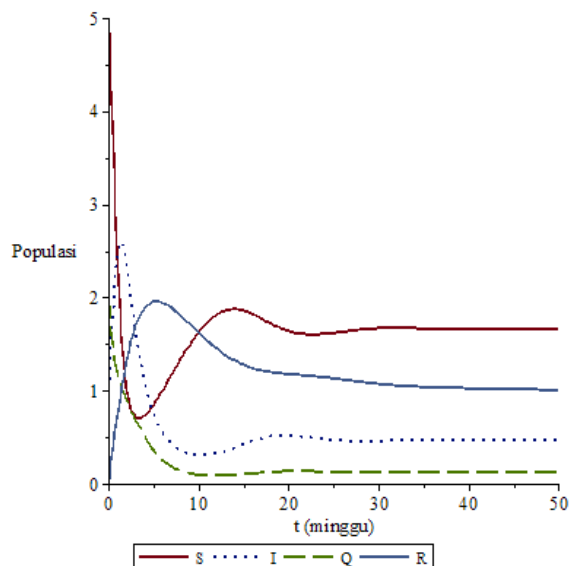
Parameter	Nilai	Sumber
$\omega$	0.5	[2]
$\kappa$	0.1	[2]
$\lambda$	0.117	[2]
$\beta$	0.0433	[2]
$\mu$	0.3	Diasumsikan
$\alpha$	0.2	Diasumsikan
$\delta$	0.371	[9]

Nilai awal yang digunakan mengacu pada [2] yaitu  $R(0) = 0$ ,  $S(0) = 5$  dan  $I(0) = 1$ . Jika diasumsikan  $Q(0) = 2$ , diperoleh



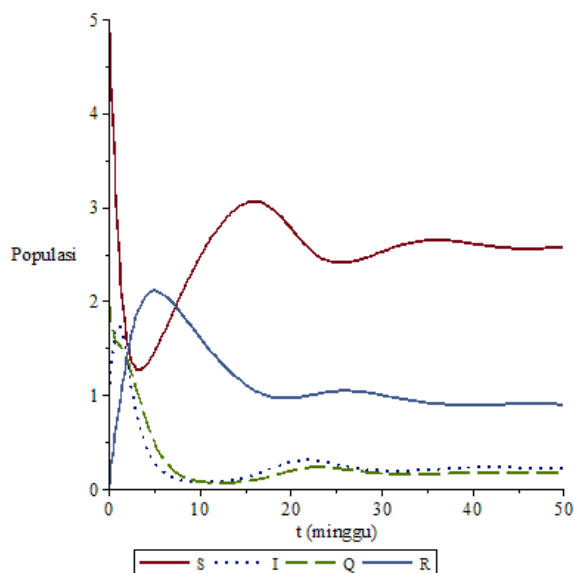
**Gambar 8.1.** Simulasi Sistem (1) dengan untuk  $R_0 < 1$

Berdasarkan Gambar 8.1, solusi Sistem (1) menuju  $E_0 = (5, 0, 0, 0)$  sesaat setelah  $t = 10$  dengan nilai  $R_0 = 0.3019525802$ . Artinya jika  $R_0 < 1$ , penyakit Gondongan akan menghilang dari populasi seiring berjalannya waktu. Hal tersebut dapat diartikan sebagai jika laju kelahiran lebih kecil dari laju kematian alami dan laju kontak antara individu yang terinfeksi gondongan dengan individu rentan lebih kecil dari jumlah laju kesembuhan, laju kematian dan laju karantina maka wabah gondongan semakin lama akan menghilang dari populasi. Selain itu, berdasarkan Gambar 8.1, populasi individu yang sembuh bertambah seiring menurunnya populasi individu yang terinfeksi dan individu yang dikarantina. Artinya, untuk mempercepat kesembuhan individu yang terinfeksi penyakit Gondongan, penurunan populasi individu yang terinfeksi dan percepatan pengobatan pada individu yang dikarantina akan menjadi langkah yang tepat. Akan tetapi jika nilai  $\beta = 0.433$  yang berakibat  $R_0 = 3.019525802$ , diperoleh gambar berikut ini



**Gambar 8.2.** Simulasi Sistem (1) dengan untuk  $R_0 > 1$

Berdasarkan Gambar 8.2, solusi Sistem (1) menuju  $E_1 = (1.655889145, 0.4664031875, 0.1209865597, 0.9945518658)$  dengan nilai  $R_0 = 3.019525802$ . Hal tersebut dapat diartikan sebagai jika laju kelahiran lebih besar dari laju kematian alami dan laju kontak antara individu yang terinfeksi gondongan dengan individu rentan lebih besar dari jumlah laju kesembuhan, laju kematian dan laju karantina maka wabah gondongan akan tetap ada dalam populasi. Selain itu, berdasarkan Gambar 8.2, populasi individu yang terinfeksi akan naik karena adanya kontak dengan individu yang rentan. Skenario lain dilaksanakan jika memperbesar laju karantina dengan mengasumsikan nilai  $\alpha = 0.6$ .



**Gambar 8.3.** Simulasi Sistem (1) dengan untuk  $R_0 > 1.938227395$

Berdasarkan Gambar 8.3, untuk nilai laju karantina yang membesar, nilai  $R_0$  mengecil dan populasi individu yang dikarantina mendekati populasi individu terinfeksi. Artinya populasi individu dikarantina membesar seiring bertambahnya laju karantina. Hal tersebut menjadikan skenario karantina yang diusulkan dengan penambahan kelas Q membuat model sistem menjadi lebih baik.

## 9. KESIMPULAN

Diberikan model matematika penyebaran penyakit gondongan dengan adanya populasi individu yang dikarantina dan diasumsikan terdapat kematian karena penyakit gondongan seperti pada Sistem (1). Analisa kestabilan dilakukan disekitar titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik diperoleh hasil bahwa penyakit gondongan akan hilang jika dipenuhi syarat  $R_0 < 1$ . Artinya jika laju kelahiran lebih kecil dari laju kematian alami dan laju kontak antara individu yang terinfeksi gondongan dengan individu rentan lebih kecil dari jumlah laju kesembuhan, laju kematian dan laju karantina maka wabah gondongan semakin lama akan menghilang dari populasi. Usulan yang dapat diberikan adalah untuk mempercepat kesembuhan individu yang terinfeksi penyakit gondongan, penurunan populasi individu yang terinfeksi dan percepatan pengobatan pada individu yang dikarantina akan menjadi langkah yang tepat. Sebaliknya jika  $R_0 > 1$  penyakit gondongan akan mewabah dan individu yang terinfeksi masih ada dalam populasi. Artinya jika laju kelahiran lebih besar dari laju kematian alami dan laju kontak antara individu yang terinfeksi gondongan dengan individu rentan lebih besar dari jumlah laju kesembuhan,



## JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI

Ratna Widayati, Nadzifah, Vika Fatihatul Fiqiyah, Nita Rizkiyani

laju kematian dan laju karantina maka wabah gondongan akan tetap ada dalam populasi. Akan tetapi jika nilai dari laju karantina diperbesar, nilai  $R_0$  akan mengecil dan populasi individu yang dikarantina mendekati populasi individu terinfeksi. Hal tersebut dapat diartikan populasi individu dikarantina membesar seiring bertambahnya laju karantina. Artinya skenario karantina yang diusulkan dengan penambahan kelas Q membuat solusi sistem menjadi lebih baik.

### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Chernov A., Kelbert M & Shemendyuk A., 2020, Optimal vaccine allocation during the mumps outbreak in two SIR centers, *Mathematical Medicine and Biology: A Journal of the IMA*, Vol. 37, Issue 3, 303–312.
- [2] Hakimeh M., Sunil K., Shahram R., Sina E., Side S., 2021, A theoretical study of the Caputo–Fabrizio fractional modeling for hearing loss due to Mumps virus with optimal control, *Chaos, Solitons and Fractals*, Vol 144, 1-13.
- [3] Jie. F. H., Ze. Y. Z., Wen. K. L. dkk., 2022, Correlation between mumps and meteorological factors in Xiamen City, China: A modelling study, *Infectious Disease Modelling*, Vol. 7, 127-137.
- [4] Kitano T., 2019, Dynamic transmission model of routine mumps vaccination in Japan, *Epidemiology and Infection*, 147, 1–8.
- [5] Nisar K S., Srinivas M N., Murthy B S N, Madhusudanan V., Gul N., Abdulrehman J & Zeb A., 2023, Exploring the dynamics of white noise and spatial temporal variations on hearing loss due to mumps virus, *Results in Physics*, 51, 106584.
- [6] Li Y., Liu X & Wang L., 2018, Modelling the Transmission Dynamics and Control of Mumps in Mainland China, *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 15, 33.
- [7] Nurbek. A., Zhihang. P., Xinzhi. R., Yangjiang. W., Xianning. L., 2022, Vaccine failure, seasonality and demographic changes associate with mumps outbreaks in Jiangsu Province, China: Age-structured mathematical modelling study, *Journal of Theoretical Biology*, Vol. 544.
- [8] Pomeroy L W., Magsi S., McGill S & Wheeler C E., 2023, Mumps epidemic dynamics in the United States before vaccination (1923–1932), *Epidemics*, 44, 100700.
- [9] Qianqian. Q., Cong. F., Le. Z., Wanru. J., Jie. W., Yong. L., 2017, A mumps model with seasonality in China, *Infectious Disease Modelling*, Vol. 2, 1-11.
- [10] Senanayake, S. N., 2008, Mumps: A resurgent disease with protean manifestations. *Medical Journal of Australia*, 189, 456-459.
- [11] Wharton, I. P., Chaudhry, A. H., & French, M. E., 2006, A case of mumps epididymitis. *Lancet*, 367, 702.
- [12] Zhou L., Wang Y., Xiao Y., & Li M Y., 2019, Global dynamics of a discrete age-structured SIR epidemic model with applications to measles vaccination strategies, *Mathematical Biosciences*, 308, 27-37.