JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI e–ISSN: 2614–8811
Published by Departement of Mathematics, Hasanuddin University, Indonesia
https://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk/index
Vol. 21, No. 2, January 2025, pp. 573-582
DOI: 10.20956/j.v21i2.32376

Partition Dimension of the Join of Complete Graph K_1 and Saw Graph GR_n

Dimensi Partisi Graf Hasil Jumlah Graf Lengkap K_1 dan Graf Gergaji GR_n

Dermawan Saputra[1], Jusmawati Massalesse[*2], Naimah Aris[3]

[1,2,3)]Departments of Mathematics, Hasanuddin University, Makassar - Indonesia
***Email**: [1]dermawansaputra24@gmail.com, [2]jusmawati@gmail.com, [3]aris.naimah@unhas.ac.id*
**Corresponding author*
Received: 19 December 2023, revised: 19 December 2024, accepted: 25 December 2024

Abstract

Let $u, v \in V(G)$ and let $d(u, v)$ denote the distance between u dan v. The distance of u to a subset $S \subseteq V(G)$ is denote by $d(u, S)$, where $d(u, S) = min\{d(u, x), x \in S\}$. Furthermore, suppose $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ is an ordered partition with $S_i \in V(G)$ for $i = 1,2, \dots, k$, then the representation of a vertex $v \in V(G)$ with respect to $\prod$ is the ordered k-tuple dinoted by $r(v|\prod)$ where $r(v|\prod) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$. The partition $\prod$ is called a distinguishing partition of G if $r(v|\prod) \neq r(u|\prod)$ for every $u, v \in V(G)$. A distinguishing partition of $\boldsymbol{G}$ with the smallest cardinality is called the minimum distinguishing partition of $\boldsymbol{G}$, and its cardinality is called the partition dimension of G. The purpose of this study is to determine the partition dimension of the join graph K_1 and GR_n. By applying the concepts of equivalent vertices and vertices of the same level, it is shown that the partition dimension of the graph $K_1 + GR_n$ is $pd(K_1 + GR_n) = n + 2$, where n is a natural number.

Keywords: join of two graph, equivalent vertices, same level vertices, distinguishing partition, partition dimension

Abstrak

Graf G merupakan suatu pasangan $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong dari elemen-elemen yang disebut titik (vertex), dan $E(G)$ adalah himpunan pasangan elemen-elemen $V(G)$ yang disebut sisi.Jika $u, v \in V(G)$ dan $d(u, v)$ menyatakan jarak antara u, dan v, maka jarak u terhadap sebuah himpunan $S \subseteq V(G$ dinotasikan $d(u, S)$, dengan $d(v, S) = \min\{d(v, x)|x \in S\}$. Selanjutnya, misalkan $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah sebuah partisi terurut dengan $S_i \in V(G), i = 1,2, \dots, k$, maka representasi sebuah titik $v \in V(G)$ terhadap $\prod$ merupakan pasangan terurut-k yang yang dinotasikan $r(v|\prod)$ dengan $r(v|\prod) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$. Partisi $\prod$ disebut partisi pembeda dari G jika $r(u|\prod) \neq r(v|\prod)$

untuk setiap $u, v \in V(G)$. Partisi pembeda G dengan kardinalitas terkecil disebut partisi pembeda minimum dari G, dan kardinalitasnya disebut dimensi partisi G. Tulisan ini bertujuan untuk menentukan dimensi partisi hasil jumlah graf lengkap K_1 dan graf gergaji GR_n. Dengan menerapkan konsep titik setara dan titik setingkat diperoleh hasil bahwa dimensi partisi dari graf $K_1 + GR_n$ adalah $pd(K_1 + GR_n) = n + 2$, dengan n bilangan asli.

Kata kunci: graf hasil jumlah, titik setara, titik setingkat, partisi pembeda, dimensi partisi.

1. Pendahuluan

Graf merupakan pasangan himpunan (V, E) yang terdiri dari himpunan titik *(vertex)* disimbolkan dengan V dan himpunan sisi *(edge)* yang disimbolkan dengan E [9]. Salah satu kajian yang terus berkembang pada teori graf adalah dimensi partisi pada suatu graf. Dimensi partisi pertama kali diperkenalkan pada tahun 1998 oleh Chartrand dkk., yang mengelempokkan semua titik di graf G ke dalam suatu kelas partisi dan menetukan repsentasi setiap titik terhadap setiap kelas partisi tersebut [3]. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek dinyatakan sebagai noktah, bulatan, atau titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan garis.

Beberapa penelitian terkait dimensi partisi salah satunya yaitu dimensi partisi [11] dan dimensi partisi dari beragam operasi graf diantaranya yaitu [1,4,7,10]. Sejauh ini, penelitian terkait graf gergaji baru diteliti pada [8]. Berdasarkan penelusuran literatur yang dilakukan, penelitian mengenai dimensi partisi dari graf gergaji belum dilakukan oleh para peneliti sebelumnya. Dalam penelitian ini dibahas penentuan dimensi partisi untuk graf jumlah antara graf lengkap K_1 dengan graf gergaji GR_n. Hasil yang diperoleh pada penelitian ini, ditulis dalam bentuk proposisi, dan di akhir pembuktiannya diberikan tanda ■.

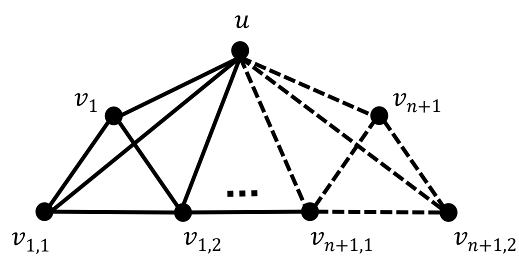
2. Tinjauan Pustaka

Secara umum dikenal beberapa definisi, notasi, dan istilah pada graf. Graf G yaitu pasangan himpunan $\big(V(G), E(G)\big)$, dimana $V(G)$ adalah himpunan berhingga tak kosong yang anggota-anggotanya disebut titik, dan $E(G)$ adalah sebuah himpunan (mungkin kosong) dari pasangan pasangan titik yang disebut sisi. Graf yang hanya terdiri dari titik-titik tanpa adanya sisi disebut graf trivial. Graf $G = (V, E)$, jika $u, v \in V$ dengan $u \neq v$ dan $uv = vu$ makanya graf G merupakan graf sederhana *(simple graph)*. Barisan titik dan sisi $v_1, e_1, v_2, e_2, \dots v_{n-1}, e_{n-1}, v_n$ dengan $e_i = v_i v_{i+1}, i = 1,2, \dots, n-1$ disebut lintasan pada graf. Graf yang hanya memiliki sebuah lintasan disebut graf lintasan yang dinotasikan P_n untuk orde n.

Ada beberapa jenis operasi yang dikenal dalam teori graf. Operasi pada graf adalah salah satu cara untuk mendapatkan graf baru dengan mengkonstruksi graf G dan graf H. Operasi graf yang dilakukan pada penelitian ini adalah operasi jumlah antara dua graf yaitu graf lengkap dan graf gergaji. Graf gergaji merupakan graf yang dikonstruksi melalui graf lintasan berorde genap dan graf trivial. Misalkan $P_{2(n+1)}$ graf lintasan berorde $2(n+1)$ dan $(n+1)K_1$ adalah graf K_1 adalah graf gabungan K_1 sebanyak $n+1$ dengan $V(P_{2(n+1)}) = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_{2n+1}, u_{2n+2}\}$ dan $V\big((n+1)K_1\big) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n+1}\}$. Graf gergaji dinotasikan dengan GR_n adalah graf yang berorde $3n+3$ dan berukuran $4n+3$ dengan himpunan titik $\mathrm{V}(\mathrm{P}_{2(n+1)}) \cup \mathrm{V}\big((\mathrm{n}+1)\mathrm{K}_1\big)$ dan himpunan sisi $E\big(P_{2(n+1)}\big) \cup \{u_{2i-1}v_i, u_{2i}v_i\ ; i = 1,2, \dots, n+1\}$. Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$, dan H adalah graf dengan himpunan titik $V(H)$ dan himpunan sisi $E(H)$. Graf tambah antara G dan H, ditulis $G + H$, adalah graf dengan himpunan titik $V(G + H)\ =$

$V(G) \cup V(H)$ dan himpunan sisi $E(G+H) = E(G) \cup E(H) \cup A$, dengan $A = \{uv: u \in V(G), v \in V(H)\}$ [6].

Misalkan diberikan graf K_1 dan graf GR_n dengan $V(K_1) = \{u\}$ dan $V(GR_n) = \{v_i, v_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n+1;\ j = 1,2\}$. Graf jumlah $K_1 + GR_n$ dengan himpunan titik $V(K_1 + GR_n) = \{u, v_i, v_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n+1, j = 1,2\}$ dan himpunan sisi $E(K_1 + GR_n) = \{v_i v_{i,j}, uv_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n+1;\ j = 1,2\} \cup \{uv_i, v_{i,1}v_{i,2}, v_{k,2}v_{k+1,1} \mid 1 \leq i \leq n+1;\ 1 \leq k \leq n\}$. Graf jumlah $K_1 + GR_n$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.1. Graf $\boldsymbol{K_1 + GR_n}$

Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dengan $V(G)$ adalah himpunan titik, $S \subseteq V(G)$ dan $v \subseteq V(G)$, jarak antara titik v dengan kelas partisi S yang dinotasikan $d(v, S)$, didefinisikan sebagai $d(v, S) = \min\{d(v, x) | x \in S\}$. Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dan koleksi himpunan $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$, dengan S_j merupakan partisi dari $V(G)$. $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ disebut himpunan partisi dan S_j disebut kelas partisi. Misalkan titik $v \in V(G)$, representasi titik v terhadap $\prod$ dinotasikan $r(v|\prod) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k))$. Partisi terurut $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ dikatakan partisi pembeda *(resolving partition)* jika $r(u|\prod) \neq r(v|\prod)$. Partisi pembeda *(resolving partition)* $\prod$ yang kardinalitasnya terkecil disebut partisi pembeda minimum dari G. Partisi pembeda minimum dari G disebut dimensi partisi graf G yang dinotasikan dengan $pd(G)$ [3].

Dalam penentuan dimensi partisi untuk graf jumlah antara graf lengkap K_1 dengan graf gergaji GR_n diperlukan beberapa sifat yang disajikan pada definisi, dan teorema sebagai berikut.

Definisi 2.1. *Diberikan graf terhubung G dan titik $u, v \in V(G)$. Titik u, v dikatakan titik-titik setara apabila memenuhi salah satu sifat berikut:*

1. $d(u, w) = d(v, w)$ *untuk setiap* $w \in V(G) \backslash \{u, v\}$
2. *Terdapat titik* c *sehingga* $d(u, c) + d(c, s) = d(v, c) + d(c, s)$, $\forall s \in V(G) \backslash \{u, v\}$.

Teorema 2.1. *Diberikan G graf terhubung dengan himpunan partisi $\prod$ dari $V(G)$. Jika $\prod$ merupakan partisi pembeda graf G dan titik u dan v merupakan titik-titik yang setara kuat dalam G, maka titik u dan v berada pada kelas partisi yang berbeda di $\prod$* [7].

Teorema 2.2. *Diberikan G graf terhubung dengan himpunan partisi $\prod$ dari $V(G)$. Jika $\prod$ merupakan partisi pembeda graf G, titik u dan v merupakan titik-titik yang setara lemah dalam G, maka u dan v atau tetangga u dan tetangga v berada pada kelas partisi yang berbeda di $\prod$* [6].

Definsi 2.2. *Diberikan graf terhubung G dan titik $u, v \in V(G)$. Titik u, v disebut titik-titik setingkat apabila memenuhi sifat-sifat berikut:*

- $deg(u) = deg(v)$

- *Jika* $d(u,x) = k$, *terdapat* $y \in V(G)$ *sedemikian sehingga* $d(u,x) = d(v,y) = k$ *dan* $|\{x \in V(G) | d(u,x) = k\}| = |\{y \in V(G) | d(v,y) = k\}|$ [6]

Teorema 2.3. *Diberikan* G *graf terhubung dengan himpunan partisi* $\prod$ *dari* $V(G)$. *Misalkan pula titik* u *dan* v *titik-titik yang setingkat dalam* G *dan terdapat* $x, y \in V(G)$ *sedemikian sehingga* $d(u,x) = d(v,y) = k$. *Jika* $\prod$ *merupakan partisi pembeda graf* G *dan* $k = min\{d(u,a) | a \in S, S \in \prod\}$, *maka* u *dan* v *atau* x *dan* y *berada pada kelas partisi yang berbeda di* $\prod$ [5].

Teorema 2.4. *Jika* G *adalah graf berorde* $n \geq 3$ *dengan diameter* d, *maka* $g(n,d) \leq pd(G) \leq n - d + 1$, *dengan* $g(n,d)$ *merupakan bilangan bulat positif terkecil* k *sedemikian sehingga* $(d+1)^k \geq n$.

Teorema 2.5. *Misalkan* G *adalah graf terhubung berorde* n, *maka* $pd(G) = 2$ *jika dan hanya jika* $G = P_n$ [2].

3. Hasil Utama

Hasil utama yang dibahas dalam penelitian ini adalah menentukan dimensi partisi graf jumlah antara graf lengkap K_1 dengan graf gergaji GR_n, untuk $n \in \mathbb{N}$. Secara umum graf $K_1 + GR_n$ dapat dilihat pada Gambar 2.1. Dimensi partisi graf $K_1 + GR_n$ untuk $n = 1$ dan $n > 1$, masing-masing ditunjukkan pada Proposisi 3.4 dan Proposisi 3.5. Sebelum menyajikan proposisi tersebut, terlebih dahulu disajikan beberapa proposisi yang membantu dalam membuktikan hasil utama penelitian ini.

Proposisi 3.1. *Diberikan graf jumlah* $K_1 + GR_n$ *dengan* $V(K_1 + GR_n) = \{u, v_i, v_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n+1;\ j = 1,2\}$ *dan* $E(K_1 + GR_n) = \{v_i v_{i,j}, uv_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n+1;\ j = 1,2\} \cup \{uv_i, v_{i,1}v_{i,2}, v_{k,2}v_{k+1,1} | 1 \leq i \leq n+1, ;\ 1 \leq k \leq n\}$, *maka:*

a. *Titik* v_1 *dan* $v_{1,1}$ *merupakan titik-titik setara kuat.*
b. *Titik* v_{n+1} *dan titik* $v_{n+1,2}$ *merupakan titik-titik setara kuat.*

Bukti:

Untuk membuktikan proposisi ini, menggunakan Definisi 2.1.

a. Akan ditunjukkan titik v_1 dan titik $v_{1,1}$ merupakan titik-titik yang setara kuat.
   - Untuk $\forall\, w_1 \in \{u, v_{1,2}\}$, $d(v_1, w_1) = d(v_{1,1}, w_1) = 1$.
   - Untuk $\forall\, w_2 \in \{v_i, v_{i,j} \mid i \in \{2,3,\dots,n+1\}; j = \{1,2\}\}$, $d(v_1, w_2) = d(v_{1,1}, w_2) = 2$.

   Jadi, $d(v_1, w) = d(v_{1,1}, w)$ untuk sebarang $w \in V(K_1 + GR_n) \backslash \{v_1, v_{1,1}\}$, maka dari Definisi 2.1, diperoleh titik v_1 dan $v_{1,1}$ merupakan titik-titik yang setara kuat pada graf $K_1 + GR_n$.

b. Akan ditunjukkan titik v_{n+1} dan titik $v_{n+1,2}$ merupakan titik-titik yang setara kuat.
   - Untuk $\forall\, w_1' \in \{u, v_{n+1}\}$, $d(v_{n+1}, w'_1) = d(v_{n+1,2}, w'_1) = 1$.
   - Untuk $\forall\, w_2' \in \{v_i, v_{i,j} \mid i \in \{1,2,\dots,n\};\ j = \{1,2\}\}$, $d(v_{n+1}, w'_2) = d(v_{n+1,2}, w'_2) = 2$.

   Jadi, $d(v_{n+1}, w') = d(v_{n+1,2}, w')$ untuk sebarang $w' \in V(K_1 + GR_n) \backslash \{v_{n+1}, v_{n+1,2}\}$, maka dari Definisi 2.1, diperoleh titik v_{n+1} dan $v_{n+1,2}$ merupakan titik-titik yang setara kuat pada graf $K_1 + GR_n$. ■

Proposisi 3.2. *Diberikan graf jumlah* $K_1 + GR_n$ *dengan* $V(K_1 + GR_n) = \{u, v_i, v_{i,j} \mid 1 \le i \le n + 1;\ j = 1,2\}$ *dan* $E(K_1 + GR_n) = \{v_i v_{i,j}, uv_{i,j} \mid 1 \le i \le n + 1;\ j = 1,2\} \cup \{uv_i, v_{i,1}v_{i,2}, v_{k,2}\, v_{k+1,1} | 1 \le i \le n + 1, ;\ 1 \le k \le n\}$, *maka:*

a. *Titik* v_i *dan* v_k, *dengan* $i, k \in \{1,2, \dots, n + 1\}$ *merupakan titik-titik setara lemah.*
b. *Titik* v_i *dan* $v_{i,j}$, *dengan* $i \in \{1,2, \dots, n + 1\}$ *dan* $j \in \{1,2\}$ *merupakan titik-titik setara lemah.*
c. *Titik* $v_{i,j}$ *dan* $v_{k,l}$, *dengan* $i, k \in \{1,2, \dots, n + 1\}$ *dan* $j, l \in \{1,2\}$ *merupakan titik-titik setara lemah.*

Bukti:

Untuk membuktikan proposisi ini, menggunakan Definisi 2.1.

a. Akan ditunjukkan titik v_i dan titik v_k, dengan $i, k \in \{1,2, \dots, n + 1\}$ merupakan titik-titik setara lemah.
Terdapat titik $u \in V(K_1 + GR_n)$ sedemikian sehingga $\forall\, s \in V(K_1 + GR_n) \backslash \{v_i, v_k\}$, $d(v_i, u) + d(u, s) = d(v_k, u) + d(u, s)$. Jadi, dari Definisi 2.1, diperoleh titik v_i dan titik v_k, dengan $i, k \in \{1,2, \dots, n + 1\}$ merupakan titik-titik setara lemah pada graf $K_1 + GR_n$.

b. Akan ditunjukkan titik v_i dan titik $v_{i,j}$, dengan $i \in \{1,2, \dots, n + 1\}$ dan $j \in \{1,2\}$ merupakan titik-titik setara lemah.
Terdapat titik $u \in V(K_1 + GR_n)$ sedemikian sehingga $\forall\, s \in V(K_1 + GR_n) \backslash \{v_i, v_{i,j}\}$, $d(v_i, u) + d(u, s) = d\left(v_{i,j}, u\right) + d(u, s)$. Jadi, dari Definisi 2.1, diperoleh titik v_i dan titik $v_{i,j}$, dengan $i, \in \{1,2, \dots, n + 1\}$ dan $j \in \{1,2\}$ merupakan titik-titik setara lemah pada graf $K_1 + GR_n$.

c. Akan ditunjukkan titik $v_{i,j}$ dan titik $v_{k,l}$, dengan $i, k \in \{1,2, \dots, n + 1\}$ dan $j, l \in \{1,2\}$ merupakan titik-titik setara lemah.
Terdapat titik $u \in V(K_1 + GR_n)$ sedemikian sehingga $\forall\, s \in V(K_1 + GR_n) \backslash \{v_i, v_k\}$, $d\left(v_{i,j}, u\right) + d(u, s) = d\left(v_{k,l}, u\right) + d(u, s)$. Jadi, dari Definisi 2.1, titik $v_{i,j}$ dan titik $v_{k,l}$, dengan $i, k \in \{1,2, \dots, n + 1\}$ dan $k, l \in \{1,2\}$ merupakan titik-titik setara lemah pada graf $K_1 + GR_n$.■

Proposisi 3.3. *Diberikan graf jumlah* $K_1 + GR_n$ *dengan* $V(K_1 + GR_n) = \{u, v_i, v_{i,j} \mid 1 \le i \le n + 1;\ j = 1,2\}$ *dan* $E(K_1 + GR_n) = \{v_i v_{i,j}, uv_{i,j} \mid 1 \le i \le n + 1;\ j = 1,2\} \cup \{uv_i, v_{i,1}v_{i,2}, v_{k,2}\, v_{k+1,1} | 1 \le i \le n + 1, ;\ 1 \le k \le n\}$, *maka:*

a. *Titik* v_i *dan* v_k *dengan* $i \ne k$, *untuk setiap* $i, k \in \{1,2, \dots, n + 1\}$ *merupakan titik-titik setingkat.*
b. *Titik* v_i *dan* $v_{1,1}$, *untuk setiap* $i \in \{1,2, \dots, n + 1\}$ *merupakan titik setingkat.*
c. *Titik* v_i*dan* $v_{n+1,2}$, *untuk setiap* $i \in \{1,2, \dots, n + 1\}$ *merupakan titik setingkat.*
d. *Titik* $v_{1,1}$ *dan* $v_{n+1,2}$ *merupakan titk setingkat.*
e. *Titik* $v_{i,j}$ *dan* $v_{k,l}$ *selain titk* $v_{1,1}$ *dan titik* $v_{n+1,2}$, *untuk setiap* $i, k \in \{1,2, \dots, n + 1\}$ *dan* $j, l \in \{1,2\}$ *merupakan titik-titik setingkat.*

Bukti:

a. Akan ditunjukkan titik v_i dan v_k dengan $i \ne k$, untuk setiap $i, k \in \{1,2, \dots, n + 1\}$ merupakan titik-titik setingkat.
   - $deg(v_i) = deg(v_k)$ untuk setiap $i, k \in \{1,2, \dots, n + 1\}$ dengan $i \ne k$,

- Untuk $\forall\ x_1 \in \{u, v_{i,1}, v_{i,2}\}$, $d(v_i, x_i) = 1$, terdapat $y_1 \in \{u, v_{k,1}, v_{k,2}\}$ sedemikian sehingga $d(v_i, x_i) = d(v_k, y_1) = 1$ dan $|\{u, v_{i,1}, v_{i,2}\}| = |\{u, v_{k,1}, v_{k,2}\}| = 3,$
- Untuk $\forall\ x_2 \in V(K_1 + GR_n)\backslash N(v_i)$, $d(v_i, x_2) = 2$, terdapat $y_2 \in V(K_1 + GR_n)\backslash N(v_k)$ sedemikian sehingga $d(v_i, x_2) = d(v_k, y_2) = 2$ dan $|V(K_1 + GR_n)\backslash N(v_i)| = |V(K_1 + GR_n)\backslash N(v_k)| = 3n,$

Jadi, dari Definisi 2.2, titik v_i dan titik v_k dengan $i \neq k$, untuk setiap $i, k \in \{1,2, \dots, n+1\}$ merupakan titik-titik setingkat pada graf $K_1 + GR_n$.

b. Akan ditunjukkan titik v_i dan $v_{1,1}$, $i \in \{1,2, \dots, n+1\}$ merupakan titik setingkat.
- $deg(v_i) = deg(v_{1,1})$, untuk setiap $i \in \{1,2, \dots, n+1\}$,
- Untuk $\forall\ x'_1 \in \{u, v_{i,1}, v_{i,2}\}$, $d(v_i, x'_1) = 1$, terdapat $y'_1 \in \{u, v_1, v_{1,2}\}$ sedemikian sehingga $d(v_i, x'_1) = d(v_{1,1}, y'_1) = 1$ dan $|\{u, v_{i,1}, v_{i,2}\}| = |\{u, v_1, v_{1,2}\}| = 3,$
- Untuk $\forall\ x'_2 \in V(k_1 + GR_n)\backslash N(v_i)$, $d(v_i, x'_2) = 2$, terdapat $y'_2 \in V(k_1 + GR_n)\backslash N(v_{1,1})$, sedemikian sehingga $d(v_i, x'_2) = d(v_{1,1}, y'_2) = 2$ dan $|V(k_1 + GR_n)\backslash N(v_i)| = |V(k_1 + GR_n)\backslash N(v_{1,1})| = 3n,$

Jadi, dari Definisi 2.2, titik v_i dan titik $v_{1,1}$ untuk setiap $i \in \{1,2, \dots, n+1\}$ merupakan titik-titik setingkat pada graf $K_1 + GR_n$.

c. Akan ditunjukkan titik v_i dan $v_{n+1,2}$, $i \in \{1,2, \dots, n+1\}$ merupakan titik setingkat.
- $deg(v_i) = deg(v_{n+1,2})$, untuk setiap $i \in \{1,2, \dots, n+1\}$.
- Untuk $\forall\ x''_1 \in \{u, v_{i,1}, v_{i,2}\}$, $d(v_i, x''_1) = 1$, terdapat $y''_1 \in \{u, v_n, v_{n+1,1}\}$, sedemikian sehingga $d(v_i, x''_1) = d(v_{1,1}, y''_1) = 1$ dan $|\{u, v_{i,1}, v_{i,2}\}| = |\{u, v_n, v_{n+1,1}\}| = 3.$
- Untuk $\forall\ x''_2 \in V(k_1 + GR_n)\backslash N(v_i)$, $d(v_i, x''_2) = 2$, terdapat $y''_2 \in V(k_1 + GR_n)\backslash N(v_{n+1,2})$, sedemikian sehingga $d(v_i, x''_2) = d(v_{n+1,2}, y''_2) = 2$ dan $|V(k_1 + GR_n)\backslash N(v_i)| = |V(k_1 + GR_n)\backslash N(v_{n+1,2})| = 3n.$

Jadi, dari Definisi 2.2, titik v_i dan titik $v_{n+1,2}$ untuk setiap $i \in \{1,2, \dots, n+1\}$ merupakan titik-titik setingkat pada graf $K_1 + GR_n$.

d. Akan ditunjukkan titik $v_{1,1}$ dan $v_{n+1,2}$, merupakan titik setingkat.
- $deg(v_{1,1}) = deg(v_{n+1,2})$
- Untuk $\forall\ x'''_1 \in \{u, v_1, v_{1,2}\}$, $d(v_i, x'''_1) = 1$, terdapat $y'''_1 \in \{u, v_n, v_{n+1,1}\}$, sedemikian sehingga $d(v_i, x'''_1) = d(v_{1,1}, y'''_1) = 1$ dan $|\{u,, v_1, v_{1,2}\}| = |\{u, v_n, v_{n+1,1}\}| = 3,$
- Untuk $\forall\ x'''_2 \in V(k_1 + GR_n)\backslash N(v_{1,1})$, $d(v_{1,1}, x'''_2) = 2$, terdapat $y'''_2 \in V(k_1 + GR_n)\backslash N(v_{n+1,2})$, sedemikian sehingga $d(v_{1,1}, x'''_2) = d(v_{n+1,2}, y'''_2) = 2$ dan $|V(k_1 + GR_n)\backslash N(v_{1,1})| = |V(k_1 + GR_n)\backslash N(v_{n+1,2})| = 3n.$

Jadi, dari Definisi 2.2, titik $v_{1,1}$ dan titik $v_{n+1,2}$ merupakan titik-titik setingkat pada graf $K_1 + GR_n$.

e. Akan ditunjukkan titik $v_{i,j}$ dan $v_{k,l}$, selain titik $v_{1,1}$ dan titk $v_{n+1,2}$, dengan untuk setiap $i, k \in \{1,2, \dots, n+1\}$ dan $j, l \in \{1,2\}$merupakan titik-titik setingkat.
- $deg(v_{i,j}) = deg(v_{k,l})$ untuk setiap $i, k \in \{1,2, \dots, n+1\}$ dan $j, l \in \{1,2\}\backslash\{v_{1,1}, v_{n+1,2}\}$.
- Untuk $\forall\ x''''_1 \in \{u, v_i, v_{i+j-2,(j\,mod\,2)+1}, v_{i+j-1,(j\,mod\,2)+1}\}$, $d(v_{i,j}, x''''_1) = 1$, terdapat $y''''_1 \in \{u, v_k, v_{k+l-2,(l\,mod\,2)+1}, v_{k+l-1,(l\,mod\,2)+1}\}$, sedemikian sehingga $d(v_{i,j}, x''''_1) = d(v_{i,j}, y''''_1) = 1$, dan $|\{u, v_i, v_{i+j-2,(j\,mod\,2)+1}, v_{i+j-1,(j\,mod\,2)+1}\}| = |\{u, v_k, v_{k+l-2,(l\,mod\,2)+1}, v_{k+l-1,(l\,mod\,2)+1}\}| = 4.$

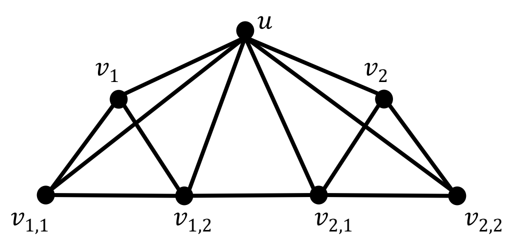
- Untuk $\forall\ x_2'''' \in V(K_1+GR_n)\backslash N(v_{i,j})$, $d(v_{i,j}, x_2'''') = 2$, terdapat $y_1'''' \in V(K_1+GR_n)\backslash N(v_{k,l})$, sedemikian sehingga $d(v_{i,j}, x_2'''') = d(v_{k,l}, y_2'''') = 2$, dan $|V(K_1+GR_n)\backslash N(v_{i,j})| = |V(K_1+GR_n)\backslash N(v_{k,l})| = 3n-1$.

Jadi, dari Definisi 2.2, titik $v_{i,j}$ dan titik $v_{k,l}$, selain titik $v_{1,1}$ dan titik $v_{n+1,2}$, untuk $i,k \in \{1,2,\dots,n+1\}$ dan $j,l \in \{1,2\}$ merupakan titik-titik setingkat pada graf K_1+GR_n.■

Proposisi 3.4. Dimensi partisi pada graf K_1+GR_1 adalah $pd\ (K_1+GR_1) = 3$.

Bukti:

Diberikan graf jumlah K_1+GR_1 dengan himpunan titik $V(K_1+GR_1) = \{u, v_i, v_{i,j} | 1 \le i \le 2;\ j = 1,2\}$ dan himpunan sisi $E(K_1+GR_1) = \{uv_{i,j}, v_iv_{i,j} | 1 \le i \le 2;\ j = 1,2\} \cup \{uv_i, v_{i,1}v_{i,2}, v_{k,2}v_{k+1,1} | 1 \le i \le 2;\ 1 \le k \le 1\}$. Seperti pada gambar berikut.



Gambar 3. 1 Graf $\boldsymbol{K_1+GR_1}$

Akan ditunjukkan bahwa $pd(K_1+GR_1) = 3$. Pilih himpunan partisi $\prod = \{S_1, S_2, S_3\}$ dari himpunan titik $V(K_1+GR_1)$ dengan, $S_1 = \{u, v_1, v_2\}, S_2 = \{v_{1,1}, v_{1,2}\}, S_3 = \{v_{2,1}, v_{2,2}\}$. Representasi titik terhadap $\prod$ adalah sebagai berikut.

$$r(u|\prod) = \{0,1,1\}$$
$$r(v_1|\prod) = \{0,1,2\}$$
$$r(v_2|\prod) = \{0,2,1\}$$
$$r(v_{1,1}|\prod) = \{1,0,2\}$$
$$r(v_{1,2}|\prod) = \{1,0,1\}$$
$$r(v_{2,1}|\prod) = \{1,1,0\}$$
$$r(v_{2,2}|\prod) = \{1,2,0\}$$

Kita bisa melihat bahwa $r(x|\prod) \neq r(y|\prod)$ untuk $\forall\ x,y \in V(K_1+GR_1)$, maka $\prod$ merupakan partisi pembeda dari graf K_1+GR_1. Jadi, batas atas dimensi partisi pada graf K_1+GR_1 adalah $pd(K_1+GR_1) \le 3$.

Selanjutnya dikonstruksi himpunan partisi $\prod' = \{S_1', S_2'\}$ dengan kardinalitas 2. Akan ditunjukkan bahwa $\prod'$ bukan merupakan partisi pembeda untuk graf K_1+GR_1. Terlihat bahwa graf K_1+GR_1 bukan graf lintasan, maka berdasarkan Teorema 2.5, $pd\ K_1+GR_1 \neq 2$, sehingga dapat disimpulkan bahwa batas bawah dimensi partisi pada graf K_1+GR_1 adalah $pd(K_1+GR_1) \ge 3$.

Berdasarkan batas atas dan batas bawah dari dimensi partisi graf $K_1 + GR_1$, diperoleh $pd(K_1 + GR_1) = 3$. ■

Proposisi 3.5. Dimensi partisi pada graf $K_1 + GR_n$ adalah $pd\ (K_1 + GR_n) = n + 2$.

Bukti:

Diberikan graf jumlah $K_1 + GR_1$ dengan himpunan titik $V(K_1 + GR_n) = \{u, v_i, v_{i,j} \mid 1 \le i \le n + 1;\ j = 1,2\}$ dan himpunan sisi $E(K_1 + GR_n) = \{v_i v_{i,j}, uv_{i,j} \mid 1 \le i \le n + 1;\ j = 1,2\} \cup \{uv_i, v_{i,1}v_{i,2}, v_{k,2}v_{k+1,1} \mid 1 \le i \le n + 1;\ 1 \le k \le n\}$. Seperti pada Gambar 2.1.

Untuk $n = 1$, telah dibuktikan pada Proposisi 3.4 dan diperoleh $pd(K_1 + GR_1) = 3$.

Untuk $n \ge 1$, Akan ditunjukkan bahwa $pd(K_1 + GR_n) = n + 2$. Pilih himpunan partisi $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_{n+2}\}$ dari himpunan titik $V(K_1 + GR_n)$ dengan,

$S_1 = \{u, v_i\}$, dengan $1 \le i \le n + 1$, dan

$S_{i+1} = \{v_{i,1}, v_{i,2}\}$, dengan $1 \le i \le n + 1$

Represetasi titik pada graf $K_1 + GR_n$ terhadap $\prod$ adalah sebagai berikut.

$$r(u|\textstyle\prod) = \{0, \underbrace{1, \dots, 1}_{n+1}\},$$

$$r(v_i|\textstyle\prod) = \{0, \underbrace{2, \dots, 2}_{i-1}, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{n-i+1}\},\ i \le i \le n + 1$$

$$r(v_{1,1}|\textstyle\prod) = \{1, 0, \underbrace{2, \dots, 2}_{n}\},$$

$$r(v_{i,1}|\textstyle\prod) = \{1, \underbrace{2, \dots, 2}_{i-2}, 1, 0, \underbrace{2, \dots, 2}_{n-i+1}\},\ 2 \le i \le n + 1$$

$$r(v_{i,2}|\textstyle\prod) = \{1, \underbrace{2, \dots, 2}_{i-1}, 0, 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{n-i}\},\ 1 \le i \le n$$

$$r(v_{n+1,2}|\textstyle\prod) = \{1, \underbrace{2, \dots, 2}_{n}, 0\}.$$

Kita bisa melihat bahwa $r(x|\prod) \ne r(y|\prod)$ untuk $\forall\ x, y \in V(K_1 + GR_n)$, maka $\prod$ merupakan partisi pembeda dari graf $K_1 + GR_n$. Jadi, batas atas dimensi partisi pada graf $K_1 + GR_n$ adalah $n + 2$ atau $pd(K_1 + GR_1) \le n + 2$.

Selanjutnya dikonstruksi himpunan partisi $\prod' = \{S'_1, S'_2, \dots, S'_{n+2-1}\}$ dengan kardinalitas $n + 2 - 1$. Akan ditunjukkan bahwa $\prod'$ bukan merupakan partisi pembeda untuk graf $K_1 + GR_n$. Menurut Proposisi 3.3, titik $v_i, v_{1,1}, v_{n+1,2}$ untuk $\forall\ i \in \{1 \le i \le n + 1\}$ merupakan titik setingkat. Karena mengingat hanya terdapat $n + 1$ kelas partisi maka terdapat dua titik setingkat $a, b \in \{v_i, v_{1,1}, v_{n+1,2}\}$ untuk $\forall\ i \in \{1 \le i \le n + 1\}$ yang berada pada kelas partisi yang sama. Pandang kasus berikut.

Kasus 1 Jika terdapat suatu kelas partisi yang memuat dua titik setara kuat katakan $v_1, v_{1,1} \in S'_i$ atau $v_n, v_{n+1,2} \in S'_i$ untuk $i \in \{1,2, \dots, n + 1\}$ seperti pada Proposisi 3.1, maka terdapat dua titik setara kuat yang berada pada kelas partisi yang sama. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 2.1, $\prod'$ bukan partisi pembeda.

Kasus 2 Untuk sebarang titik $a, b \in S'_i$ dengan a, b bukan titik setara kuat. Perhatikan bahwa untuk setiap $x \in V(K_1 + GR_n) \backslash \{u\}$, maka $d(u, x) = 1$, sehingga:

Subkasus 2.1 Jika $u, a, b \in S'_i$ dan mengingat hanya terdapat $n + 1$ kelas partisi maka terdapat paling sedikit dua titik yaitu $x_1, x_2 \in V(K_1 + GR_n) \backslash \{u\}$ berada pada kelas partisi yang sama. Katakan $x_1, x_2 \in S_j'$ dengan $j \neq i$, sehingga akan memenuhi salah satu dari dua kemungkinan berikut.

- **Kemungkinan 1** Jika titik $x_1, x_2 \in \{v_{i,j}, v_{k,l}\} \backslash \{v_{1,1}, v_{n+1,2}\}$ dengan $i.k \in \{1,2,\dots,n+1\}$ dan $j,l \in \{1,2\}$ maka untuk sebarang $c \in \{1,2,\dots,n+1\}$ dapat dipilih titik $w_1 \in S_c'$, sehingga $d(v_{i,j}, w_1) = m$ dengan $m = min\{d(v_{i,j}, y_1) | y_1 \in S_c'\}$. Karena $v_{i,j}$ dan $v_{k,l}$ merupakan titik setingkat, seperti pada Proposisi 3.3, maka terdapat $w_2 \in S_c'$, sehingga $d(v_{k,l}, S_c') = m$. Berdasarkan Teorema 2.3, $\prod'$ bukan partisi pembeda.

- **Kemungkinan 2** Jika $x_1 \in \{v_i, v_{1,1}, v_{n+1,2} | 1 \leq i \leq n+1\}$ dan $x_2 \in \{v_{i,j} | 1 \leq i \leq n+1, j = 1,2\} \backslash \{x_1\}$ serta untuk $\forall\, x_1' \in N(x_1)$ dan $x_2' \in N(x_2)$ berada pada kelas partisi yang sama maka berdasarkan Proposisi 3.2, titik x_1 dan x_2 adalah setara lemah, sehingga dari Teorema 2.2, $\prod'$ bukan partisi pembeda.

Subkasus 2.2 Jika $u \notin S_i'$ maka untuk sebarang $c \in \{1,2,\dots,n+1\} \backslash \{i\}$ dapat dipilih titik $w'_1 \in S_c'$, sehingga $d(a, w'_1) = m''$ dengan $m'' = min\{d(a, y_2) | y_2 \in S_c'\}$. Karena a dan b adalah titik setingkat, maka terdapat $w_2' \in S_c'$, sehingga $d(b, w_2') = m''$. Berdasarkan Teorema 2.3, $\prod'$ bukan partisi pembeda.

Jadi, karena hanya terdapat $n+1$ kelas partisi, maka setiap kelas partisi pada $\prod'$ memuat pasangan titik setingkat atau memuat titik-titik yang memiliki jarak yang sama terhadap pasangan titik setingkat, sehingga diperoleh $\prod'$ bukan merupakan partisi pembeda, atau $pd(K_1 + GR_n) \neq n + 1$, maka dapat disimpulkan bahwa batas bawah dimensi partisi dari graf $K_1 + GR_n$ adalah $pd(K_1 + GR_n) \geq n + 2$. Berdasarkan batas atas dan batas bawah dari graf $K_1 + GR_n$, diperoleh $pd(K_1 + GR_n) = n + 2$. ■

4. Kesimpulan

Berdasarkan Proposisi 3.4 dan Proposisi 3.5 telah diperoleh bahwa batas atas dan batas bawah dimensi partisi dari graf $K_1 + GR_n$ adalah $n + 2$. Dengan kata lain $pd(K_1 + GR_n) \leq n + 2$, dan $pd(K_1 + GR_n) \geq n + 2$. Hal ini berarti $pd(K_1 + GR_n) = n + 2$, untuk $n \in \mathbb{N}$.

Daftar Pustaka

[1] Auliya, N., 2014. Dimensi Partisi pada Graf K_1+ mCn, m, n∈ N, n≥ 3. Skripsi. Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

[2] Chartrand, G., Salehi, E. & Zhang, P., 2002. The Partition Dimension of a Graph. *Aequationes Mathematicae*, 59, 45 – 54.

[3] Darmaji, 2011. Dimensi Partisi Graf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Graf Terhubung. Disertasi. Bandung: Institut Teknologi Bandung.

[4] Faisal, F., Mardiana, N. & Rosiyanti, H., 2019. Dimensi Partisi Graf Hasil Operasi Comb Graf Lingkaran dan Graf Lintasan. *Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika*, Vol 5, No. 2, 163-174.

[5] Hamidi, M. R., 2022. Penentuan Dimensi Partisi Pada Graf Hasil Korona Antara Graf Lengkap dengan Graf Roda. Skripsi. Makassar: Universitas Hasanuddin.

[6] Hasmawati, 2020. *Bahan Ajar Teori Graf*. Makassar: UPT Unhas Press.

[7] Hasmawati, Nurwahyu, B., Daming, A.S. & Amir, A.K., 2021. Partition Dimention of Dutch Windmill Graph. *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*, Vol. 17 No.3, 472–483.
[8] Mauliddiyah, R., 2023. Dimensi Metrik Graf Hasil Operasi Korona Graf Gergaji GR_n Dengan Graf Lengkap K_1. Skripsi. Makassar: Universitas Hasanuddin.
[9] Munir, R., 2003. *Matematika Diskrit*, Edisi kedua. Bandung: Informatika.
[10] Purwaningsih, S., 2017. Dimensi Partisi Graf Lintasan Korona Graf Bintang $P_m\ K_1$, n untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 3$. *Jurnal Matematika UNAND*, *6*(2), 16-19.
[11] Ramdhani, V., 2019. Dimensi Partisi Graf Lengkap. Sainstek: *Jurnal Sains dan Teknologi*, Vol. 11, No. 2, 65-69.