ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 2, No.1 , 1-7, Juli 2005

Pendekatan Matematika Model Ekonomi Makro

Jeffry Kusuma†

Abstrak

Model matematika diberikan untuk menjelaskan fenomena dalam dunia ekonomi makro seperti modal/kapital, tenaga kerja, pengetahuan, inovasi dalam riset dan pengembangannya. Ketergantungan elemen-elemen dalam ekonomi makro antara satu dengan lainnya diberikan dalam hubungan fungsional.

Keywords: *Model Matematika, model Solow, Ekonomi makro.*

1. Pendahuluan

Perbedaan kemakmuran dan standar kehidupan suatu daerah atau negara dengan daerah atau negara lain sering menimbulkan pertanyaan yang sulit dijelaskan. Mengapa suatu daerah atau negara yang satu lebih berkembang dari daerah atau negara lainnya ? Faktor apa saja yang mempengaruhi perkembangan suatu daerah ? Faktor apa saja yang mempengaruhi kemakmuran suatu daerah atau negara? Berapa lamakah waktu yang diperlukan untuk menuju kemakmuran?

Memang tidak dapat dipungkiri bahwa dunia sekarang lebih makmur dari dunia masa lalu. Fenomena ini, tentunya sangat menarik untuk dikaji. Banyak model telah dibuat dalam upaya menerangkan fenomena ini. Ada model matematika yang dapat bertahan, demikian pula banyak model matematika yang hilang dengan sendirinya disebabkan dengan ketidaksesuaikan dengan fenomena yang ada. Di antara segelintir model yang dapat bertahan, model Solow adalah salah satunya.

2. Model Solow

Model ekonomi yang dikembangkan Solow bertumpu pada empat pilar pertumbuhan yaitu hasil produksi (Y), modal/kapital (K), tenaga kerja/labour (L) dan pengetahuan atau efektifitas tenaga kerja (A), yang mana keempat pilar ini merupakan fungsi waktu (t) yang memenuhi hubungan fungsional fungsi produksi

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)) \quad \text{atau} \quad Y = F(K, AL) \qquad (1)$$

Di sini terlihat bahwa waktu tidak masuk ke dalam fungsi produksi secara langsung, melainkan melalui K, L dan A. Demikian pula hasil produksi merupakan fungsi modal dan hasil kali A dan L yang dapat dianggap sebagai keefektifan tenaga kerja. Model ini menggunakan asumsi dasar yang melibatkan pengembalian yang konstan terhadap kedua variabelnya. Secara umum dapat digambarkan sebagai

$$F(cK, cAL) = cF(K, AL) \,\text{untuksemua}\, c \geq 0 \qquad (2)$$

Penggandaankapitaldantenagakerja yang efektifakanmenggandakanhasil. Sumberdayaalam, tanahletakgeografiswalaupundiketahuipentingtidakterlihatpada model.

---

†*Staf Pengajar pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar*

Asumsipengembalian yang konstanmembuatfungsiproduksidapatdituliskandalambentuk

$$F\left(\frac{K}{AL},1\right)=\frac{1}{AL}F(K,AL) \qquad (3)$$

dimana $c=1/AL$. Disini, K/AL merupakanbesarkapital per unit tenagakerjaefektif, $F(K,AL)/AL$ atau Y/AL merupakanhasil per unit tenagakerjaefektif.

Bilavariabel di atasditulisulangdengan $k=K/AL,\ y=Y/AL$ dan $f(k)=F(k,1)$,makafungsiproduksi Solow dapatdituliskandalambentuk

$$y=f(k) \qquad (4)$$

Dari persamaan diatas, dapatdilihatbahwahasil per unit tenagakerjaefektifhanyamerupakanfungsikapital/modal per unit tenagakerjaefektif.Selanjutnya, fungsi $f(k)$ diatas diasumsikan pula memenuhi sifat $f(0)=0,\ f'(k)>0,\ f''(k)<0$. Disini terlihat jelas bahwa $f'(k)$ merupakan produk marginal dari modal, karena $F(K,AL)=ALf(K/AL)$, $\partial F(K/AL)/\partial K=ALf'(K/AL)(1/AL)=f'(k)$. Jadi asumsi ini mempunyai arti bahwa marginal produk dari modal adalah positif tetapi akan cenderung menurun bila modal (per unit tenaga kerja efektif) meningkat. Lebih lanjut $f(k)$ diasumsikan memenuhi kondisi In ada, yakni, $\lim_{k\to 0} f'(k)=\infty$, $\lim_{k\to\infty} f'(k)=0$.

Sebagai contoh marilah tinjau fungsi produksi Cobb-Douglas

$$F(K,AL)=K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha},\ 0<\alpha<1 \qquad (5)$$

Fungsi ini tetap memenuhi asumsi awal yang berupapengembalianhasil yang konstan.Kalikankedua input dengankonstan c diperoleh

$$\begin{aligned} F(cK,cAL) &= (cK)^{\alpha}(cAL)^{1-\alpha} \\ &= c^{\alpha}c^{1-\alpha}K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha} \\ &= cF(K,AL) \end{aligned} \qquad (6)$$

yangmenunjukkandipenuhinyaasumsiawalpengembaliankonstan. Demikian pula dengan asumsi pemenuhan kondisi Inada. Bila kedua input fungsi produksi dibagi dengan AL diperoleh

$$\begin{aligned} f(k) &\equiv F\left(\frac{K}{AL},1\right) \\ &= \left(\frac{K}{AL}\right)^{\alpha} \\ &= k^{\alpha} \end{aligned} \qquad (7)$$

yangmempunyaiturunanpertama $f'(k)=\alpha k^{\alpha-1}$ yang selalupositifdanturunankedua $f''(k)=-\alpha(1-\alpha)k^{\alpha-2}$ yang selalunegatif.

Asumsi lainnya yang tersisa melibatkan perubahan tenaga kerja, pengetahuan dan modal dari waktu ke waktu. Dalam model Solow ini, perubahan tersebut diasumsikan kontinu dengan laju pertumbuhan

$$\dot{L}(t)=nL(t), \qquad (8)$$

$$\dot{A}(t) = gA(t) \tag{9}$$

dimana n dan g merupakan parameter yang menetukan kecepatan pertumbuhan tenaga kerja dan pengetahuan yang tumbuh secara eksponensial. Bila $L(0)$ dan $A(0)$ merupakan keadaan awalnya maka solusi (8) dan (9) dapat dituliskan sebagai $L(t) = L(0)e^{nt}$ dan $A(t) = A(0)e^{gt}$.

Hasil dibagi antara konsumsi dan investasi. Sebagian dari hasil s diinvestasi kembali. Satu unit hasil diberikan sebagai satu unit modal baru. Demikian pula modal/kapital senantiasa terdepresiasi pada laju δ , jadi

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t) \tag{10}$$

Disini diasumsikan lagi bahwa jumlah nilai $n,\ g$ dan δ senantiasa bernilai positif.

3. Dinamika Model Solow

Dinamika modal/kapital model Solow mungkin tumbuh seiring waktu dan akan lebih menyenangkan meninjau modal per unit tenaga kerja efektif dari pada modal kapital K . Karena $k = K / AL$, maka dengan aturan rantai diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{[A(t)L(t)]^2}\left[A(t)\dot{L}(t) + \dot{A}(t)L(t)\right] \\ &= \frac{\dot{K}(t)}{A(t)L(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)}\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{A(t)L(t)}\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} \end{aligned} \tag{11}$$

Dari persamaan (8) , (9), (10) dan persamaan (11), diperoleh

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= \frac{sY(y) - \delta K(t)}{A(t)L(t)} - k(t)n - k(t)g \\ &= s\frac{Y(t)}{A(t)L(t)} - \delta k(t) - nk(t) - gk(t) \end{aligned} \tag{12}$$

Dan akhirnya dengan menggunakan kenyataan Y / AL yang diberikan oleh $f(k)$ diperoleh

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (n + g + \delta)k(t) \tag{13}$$

Persamaan inilah yang merupakan inti dari model Solow yang mengatakan bahwa laju perubahan modal terhadap unit tenaga kerja efektif merupakan selisih dari dua bentuk.Bentuk pertama adalah $sf(k)$ yang berupa investasi nyata per unit tenaga kerja efektif. Bentuk kedua adalah $(n + g + \delta)k$ yang berupa investasi *break even* yaitu investasi yang harus dilakukan untuk menjaga nilai kapital k pada level yang diinginkan. Terdapat dua alasan dimana investasi senantiasa diperlukan. Yang pertama adalah adanya depresiasi atau penurunan nilai modal/kapital. Yang kedua adalah jumlah tenaga kerja efektif yang senantiasa bertambah. Jadi untuk menjaga jumlah modal (K) agar tetap, tidak cukup dengan menjaga jumlah modal per tenaga kerja efektif (k) tetap.

Dari persamaan (13) terlihat pula bahwa terdapat suatu nilai $k = k^*$ yang membuat jumlah modal kapital tidak berubah. Bila nilai k pada awalnya kurang dari k^* yakni $sf(k)$

investasi nyata lebih besar dari $(n+g+\delta)k$ investasi *break even*, perubahan modal kapital menjadi positif. Sebaliknya bila nilai k pada awalnya lebih dari k^* maka perubahan modal kapital menjadi negatif. Dari manapun nilai k berawal, senantiasa akan konvergen ke nilai k^*.

Juga terlihat dari persamaan (13) bahwa peningkatan nilai s juga akan membuat perubahan nilai modal kapital k kearah positif atau peningkatan nilai k^*. Walaupun secara tidak langsung, peningkatan nilai s akan mengakibatkan pengeseran nilai k^* kearah kanan.

Dari segi hasil per tenaga kerja, Y/L akan bernilai sama dengan $Af(k)$. Bila k tidak berubah maka Y/L akan tumbuh sebesar g yaitu laju pertumbuhan A. Bila k bertambah maka A akan bertambah pula yang disebabkan oleh pertambahan k yang mana akan melebihi nilai g. Ketika k mencapai nilai barunya k^*, maka hanya pertumbuhan dari A yang memberikan sumbangan pada pertumbuhan Y/L. Jadi pertambahan dalam s hanya mengakibatkan penambahan laju pertumbuhan hasil per pekerja secara sementara. Modal kapital k bertambah pada suatu saat hingga mencapai titik dimana s dipergunakan untuk mengatur tingkat k yang lebih tinggi.

Konsumsi per unit tenaga kerja efektif sama dengan hasil per unit tenaga kerja efektif $f(k)$ dikali dengan bagian yang dikonsumsi $1-s$. Jadi , karena s berubah secara diskontinu pada saat t_0 dan k tidak, konsumsi awal per unit tenaga kerja efektif akan jatuh kebawah. Konsumsi kemudian barulah meningkat perlahan. Apakah konsumsi akan meningkat menuju tingkat konsumsi sebelumnya, merupakan hal yang tidak jelas.

Bila c^* menandakan konsumsi per unit tenaga kerja efektif pada tingkat yang seimbang, maka c^* akan sama dengan hasil per unit tenaga kerja efektif $f(k^*)$ dikurangi dengan investasi per unit tenaga kerja efektif $sf(k^*)$. Pada tingkat pertumbuhan yang seimbang, investasi nyata akan sama dengan investasi *breakeven*. Secara matematis dituliskan sebagai

$$c^* = f(k^*) - (n+g+\delta)k^* \qquad (14)$$

Nilai k^* ditentukanoleh s dan parameter lainnyadalam model seperti n, g dan δ, jadi $k^* = k^*(s,n,g,\delta)$, yang manajugaberarti

$$\frac{\partial c^*}{\partial s} = \left[f'(k^*(s,n,g,\delta)) - (n+g+\delta)\right]\frac{\partial k^*(s,n,g,\delta)}{\partial s} \qquad (15)$$

Telahdiketahuibahwapeningkatan s akanmenaikkan k^*. Jadipeningkatanataupunpenurunankonsumsidalamjangkapanjangtergantungpadaapakah marginal produkdari modal $f'(k^*)$ lebihbesarataukecildaripada $n+g+\delta$. Bila k meningkat, investasi (per unit tenaga kerja efektif) harus meningkat dengan $n+g+\delta$ kali perubahan pada k agar peningkatan dapat bertahan. Bila $f'(k^*)$ kurang dari $n+g+\delta$ maka hasil tambahan dari peningkatan modal kapital tidak cukup untuk mempertahankan stok modal kapital yang lebih tinggi. Jadi pada kasus ini, konsumsi harus menurun. Demikian pula sebaliknya, konsumsi akan meningkat.

4. Implikasi Kuantitatif

Di samping gambaran kualitatif diatas, sering pula dapat diperoleh gambaran kuantitatif. Gambaran kuantitatif di sini diperoleh dari keadaan setimbang dalam jangka panjang. Efek jangka panjang dari peningkatan tabungan terhadap hasil diberikan sebagai

$$\frac{\partial y^*}{\partial s} = f'(k^*)\frac{\partial k^*(s,n,g,\delta)}{\partial s} \tag{16}$$

dimana $y^* = f(k^*)$ merupakan tingkat hasil per unit tenaga kerja efektif pada keadaan pertumbuhan yang seimbang. Jadi untuk mendapatkan $\partial y^* / \partial s$, maka perlu terlebih dahulu mendapatkan $\partial k^* / \partial s$. Patut dicatat bahwa k^* diperoleh dari kondisi $\dot{k} = 0$, jadi k^* harus memenuhi

$$sf(k^*(s,n,g,\delta)) = (n+g+\delta)k^*(s,n,g,\delta) \tag{17}$$

Persamaan (17) berlaku untuk semua nilai s (dan n, g dan δ). Jadi, differensialkan kedua ruas persamaan terhadap s akan diperoleh hubungan

$$sf'(k^*)\frac{\partial k^*}{\partial s} + f(k^*) = (n+g+\delta)\frac{\partial k^*}{\partial s} \tag{18}$$

atau dalam bentuk yang lebih sederhana

$$\frac{\partial k^*}{\partial s} = \frac{f(k^*)}{(n+g+\delta) - sf'(k^*)} \tag{19}$$

Substitusi (19) kepersamaan (16) diperoleh

$$\frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{f'(k^*)f(k^*)}{(n+g+\delta) - sf'(k^*)} \tag{20}$$

Dua perubahan akan menolong menginterpretasikan ekspresi ini. Yang pertama adalah merubahnya kebentuk elastisitas dengan mengalikannya dengan s / y^*. Yang kedua adalah dengan menggunakan kenyataan bahwa $sf(k^*) = (n+g+\delta)k^*$ untuk memperoleh penggatian untuk s. Dengan melakukan hal diatas diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{s}{y^*}\frac{\partial y^*}{\partial s} &= \frac{s}{f(k^*)}\frac{f'(k^*)f(k^*)}{(n+g+\delta) - sf'(k^*)} \\ &= \frac{(n+g+\delta)k^* f'(k^*)}{f(k^*)\left[(n+g+\delta) - (n+g+\delta)k^* f'(k^*)/f(k^*)\right]} \\ &= \frac{k^* f'(k^*)/f(k^*)}{1 - \left[k^* f'(k^*)/f(k^*)\right]} \end{aligned} \tag{21}$$

Nilai $k^* f'(k^*)/f(k^*)$ adalah elastisitas hasil terhadap modal kapital pada $k = k^*$. Denganmenuliskannyasebagai $\alpha_K(k^*)$,persamaan (21) menjadi

$$\frac{s}{y^*}\frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{\alpha_K(k^*)}{1 - \alpha_K(k^*)} \tag{22}$$

Bilapasarkompetitifdantidakadahallainnyadiluarpertimbangan, modal kapitalmemperolehprodukmarginalnya.Dalamhalini total yang diterimaoleh modal (per unit tenagakerjaefektif) padapertumbuhan yangseimbangadalah $kf'(k^*)$. Jadibila modal memperolehprodukmarginalnya, bagiandari total pendapatanakanmenuju modal padapertumbuhannyayakni $k^* f'(k^*)/f(k^*)$, atau $\alpha_K(k^*)$.

Dalambanyaknegara, bagiandaripendapatan yang diberikanpada modal adalahsekitarsepertiga.Bilahalinidigunakanuntukmenaksirnilai $\alpha_K(k^*)$, akandiperolehnilaielastisitashasilterhadaplajutabungansekitarsetengah. Sebagaicontoh, peningkatan 10% dalamlajutabungan (katakandari 20% ke 22%),akanmenaikanpendapatanhasilsekitar 5% dalamjangkawaktupanjang. Bahkan peningkatan 50 % dalam laju tabungan hanya akan meningkatkan pendapatan hasil sekitar 22%. Jadi perubahan yang signifikan pada laju tabungan hanya memberikan sedikit pengaruh pada pendapatan hasilnya.

Sering kali dalam dunia ekonomi, bukan hanya besar pengaruh yang dipertimbangkan untuk mendapatkan suatu ukuran melainkan juga kecepatan perubahan yang terjadi. Dalam hal ini, difokuskan kepada dinamika k daripada dinamika y. Tujuannya adalah seberapa cepat k mendekati k^*. Diketahui bahwa $\dot{k}$ ditentukan oleh k, jadi dapat dituliskan sebagai $\dot{k} = \dot{k}(k)$. Ketika k bernilai sama dengan k^*, $\dot{k} = 0$, dan pendekatan deret Taylor untuk $\dot{k}(k)$ disekitar $k = k^*$ menjadi

$$\dot{k} \approx \left(\left. \frac{\partial \dot{k}(k)}{\partial k} \right|_{k=k^*} \right)(k - k^*) \tag{23}$$

Yakni, $\dot{k}$ didekati dengan hasil kali beda dari k dan k^* dengan turunan dari $\dot{k}$ terhadap k pada $k = k^*$. Dengan mendiferensialkan persamaan (13) untuk $\dot{k}$ terhadap k dan mengevaluasinya pada $k = k^*$ diperoleh

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \dot{k}(k)}{\partial k} \right|_{k=k^*} &= sf'(k^*) - (n + g + \delta) \\ &= \frac{(n + g + \delta)k^* f'(k^*)}{f(k^*)} - (n + g + \delta) \\ &= \left[\alpha_K(k^*) - 1\right](n + g + \delta) \end{aligned} \tag{24}$$

dimanabariskeduamenggunakankenyataanbahwa $sf(k^*) = (n + g + \delta)k^*$ untukmenggantikan s, danbaristerakhirmenggunakandefenisi α_K. Substitusikan (24) ke (23) diperolehhubungan

$$\dot{k}(t) \approx -\left[1 - \alpha_K(k^*)\right](n + g + \delta)\left[k(t) - k^*\right] \tag{25}$$

Terlihatpadapersamaan diataskecepatankonvergen $k(t)$ tergantungpadajarakdari k^*.

Biladituliskandefenisi $\chi(t) = k(t) - k^*$ dan $\lambda = (1 - \alpha_K)(n + g + \delta)$, makapersamaan (25) menjadi $\dot{\chi}(t) \approx -\lambda\chi(t)$. Laju pertumbuhan χ adalah konstan atau $-\lambda$, dengan solusi $\chi(t) \approx \chi(0)e^{-\lambda t}$ dan $\chi(0)$ merupakan nilai awal χ. Dalam bentuk k, hal ini berarti

$$k(t) - k^* \approx e^{-(1-\alpha_K)(n+g+\delta)t}(k(0) - k^*) \tag{26}$$

Terlihat pula bahwa y mendekati y^* dengan laju sama dengan k mendekati k^*, yakni

$$y(t) - y^* \approx e^{-\lambda t}[y(0) - y^*]$$

Sebagai ilustrasi akan kecepatan ekonomi mendekati kesetimbangannya, diambil $n + g + \delta$ sekitar 6% per tahun (katakanlah pertumbuhan populasi 1 hingga 2%, 1 hingga 2% pertumbuhantenagakerja, dan 3 hingga 4% depresiasi). Bila modal kapital berkisar sepertiga, maka $(1 - \alpha_K)(n + g + \delta)$ secara kasar berkisar 4%. k dan y bergerak 4% dari sisa jarak terhadap k^* dan y^* setiap tahunnya yang memerlukan sekitar 18 tahun untuk menjadi setengahnya. Jadi peningkatan 10% laju tabungan, akan menaikan hasil sebesar 0,04(5%)=0,2% tiap tahunnya. Peningkatan laju hasil 0,5(5%)=2,5% setelah 18 tahun yang mana dapat dikatakan sangat lambat.

Daftar Pustaka

[1] Romer,D.,1996, *"Advanced Macroeconomics".*McGraw-Hill CompaniesInc., United States Military Academy, West Point.

[2] Solow, R.M., 1957, "A contribution to the theory of Economics growth",*Quarterly Journal of Economics,* 70, 65-94.

[3] Solow, R.M., Stiglitz, J.E., 1968, "Output, employment, and wages in the sort run", *Quarterly Journal of Economics*, 82, 537-560.