JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI e-ISSN: 2614-8811
Published by Departement of Mathematics, Hasanuddin University, Indonesia
https://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk/index
Vol. 20, No. 3, May 2024, pp. 552-567
DOI: 10.20956/j.v20i3.32888

Integer Linear Programming In Production Profit Optimization Problems Using Branch And Bound Methods & Gomory Cutting Plane

Integer Linear Programming Dalam Masalah Optimasi Keuntungan Produksi Menggunakan Metode *Branch And Bound* & *Gomory Cutting Plane*

Nurweni Putri[1]*, Maya Sari Syahrul[2], Rosi Ramayanti[3]
Universitas Dharma Andalas
***Email**: [1]nurweniputri@gmail.com [2]maya@unidha.ac.id* [3]rosiramayanti@gmail.com

Received: 25 January 2024, revised: 12 March 2024, accepted: 13 March 2024

Abstract
Integer Linear Programming is a mathematical model that allows the results of solving cases in linear programming in the form of integers. Methods to solve Integer Programming problems include the Branch and Bound Method and the Gomory Cutting Plane Method. Both of these methods have certain rules for adding new constraint functions until an optimal solution to an integer is obtained. The purpose of this study is to optimize the profits of the production of UMKM Capal Classic Shoes Kab. Agam by using the Branch and Bound method and the Gomory Cutting Plane method and analyzing the comparison of optimal results resulting from the two methods. The data used in the study are data on raw materials for making classic sandals and profit data. The results obtained by these two methods produce the same maximum profit, namely RP. 664,000 with each producing 15 pairs of men's sandals and 13 pairs of women's sandals. But in its completion, the Branch and Bound method requires many iterations and a longer time compared to the Gumory Cutting plane method.

Keywords: Linear Programming, Integer Programming, Branch and Bound, Gomory Cutting Plane.

Abstrak
Integer Linear Programming adalah sebuah model matematis yang memungkinkan hasil penyelesaian kasus pada pemrograman linier yang berupa bilangan bulat. Metode untuk menyelesaikan persoalan Integer Programming diantaranya adalah Metode *Branch and Bound* & Metode *Gomory Cutting Plane.* Kedua metode ini memiliki aturan tertentu dalam menambahkan fungsi batasan baru hingga diperoleh solusi optimal bilangan bulat. Tujuan dari penelitian ini adalah mengoptimalkan keuntungan dari produksi UMKM *Capal Classic Shoes* Kabupaten Agam dengan menggunakan metode *Branch and Bound* dan metode *Gomory Cutting Plane* serta menganalisis perbandingan terhadap hasil optimal yang dihasilkan dari kedua metode tersebut.

Data yang digunakan dalam penelitian adalah data bahan baku pembuatan sendal klasik dan data keuntungannya. Hasil yang diperoleh kedua metode ini menghasilkan keuntungan maksimalyang sama yaitu RP. 664.000 dengan masing-masing memproduksi 15 pasang sandal laki-laki dan 13 pasang sandal perempuan. Namun dalam penyelesaiannya, metode *Branch and Bound* memerlukan iterasi yang banyak dan waktu yang lebih lama dibandingkan dengan metode *Gumory Cutting plane*.

Kata kunci: Linear Programming, Integer Programming, Branch and Bound, Gomory Cutting Plane.

1. PENDAHULUAN

Pasca pandemi Covid-19 pemerintah mengeluarkan berbagai strategi kebijakan guna memulihkan perekonomian Indonesia. Salah satu strategi yang dilakukan adalah membangkitkan industri Usaha Mikro, Kecil, dan Menengah (UMKM). Jumlah UMKM yang semakin meningkat menimbulkan persaingan bisnis yang semakin ketat dan sulit. Persaingan pasar yang meningkat menuntut pelaku UMKM menyusun strategi dengan baik agar mampu bertahan dan menjadi lebih unggul. Selain itu pelaku UMKM juga harus membuat keputusan yang tepat dengan mempertimbangkan batasan-batasan yang ada sesuai dengan tujuan yang ingin dicapai [6].

Persoalan umum yang dihadapi oleh pelaku UMKM adalah dalam melakukan optimasi keuntungan dalam produksi. Selain itu juga bagaimana mengkombinasikan faktor-faktor produksi atau sumberdaya yang dimiliki secara bersama dengan tepat agar memperoleh keuntungan maksimal dengan biaya yang minimal [11]. Pemanfaatan bahan baku yang tepat sangat diperlukan untuk memaksimalkan hasil produksi sehingga menghasilkan keuntungan yang maksimal pula. Oleh karena itu, setiap UMKM harus mengetahui model yang menghubungkan antara masalah dengan alternatif pemecahan sesuai dengan tujuan yang hendak dicapai. Model yang dapat digunakan untuk permasalahan tersebut adalah program linier (*linear programming*) [26].

Dalam masalah program linier solusi optimal yang diperoleh mungkin saja bilangan pecahan. Untuk beberapa situasi, solusi berbentuk pecahan dapat diterima. Tetapi dalam situasi tertentu solusi optimal haruslah bilangan bulat, misalnya jumlah barang dan jumlah orang. Menurut [13] persoalan program linier menggunakan solusi variabel keputusannya harus merupakan bilangan bulat disebut program linier integer (*integer linear programming*). Program linier integer adalah program linier dengan penambahan fungsi batasan bahwa beberapa atau semua variabelnya harus bernilai bulat [25].

UMKM *Capal Classic Shoes* merupakan salah satu UMKM yang bergerak di bidang produksi sendal klasik di Kabupaten Agam. Mengingat UMKM ini terus mengalami pertumbuhan, maka sistem produksinya perlu dioptimalkan guna diperolehnya pendapatan yang maksimal. Salah satu permasalahan yang dimiliki UMKM *Capal Classic Shoes* dalam hal proses produksi adalah produk yang dihasilkan dan diproduksi berdasarkan pengalaman orang-orang yang bekerja di bidang tersebut dan tidak diketahui apakah menggunakan metode yang tepat dalam memanfaatkan bahan baku yang tersedia. Hal ini berakibat pada banyaknya produk yang dihasilkan belum tentu optimal.

Permasalahan diatas termasuk kedalam masalah *integer linear programming* untuk mencari solusi optimal. Ada banyak metode yang bisa digunakan untuk menyelesaikan permasalahan ini, diantaranya metode *Branch and Bound* dan metode *Gomory Cutting Plane*. Kedua metode ini memiliki aturan tertentu dalam menambahkan fungsi batasan baru hingga diperoleh solusi optimal bilangan bulat. Metode *Branch and Bound* merupakan pengembangan dari program linier dimana beberapa atau semua variabel keputusannya harus integer. Metode ini membatasi penyelesaian optimum yang akan menghasilkan bilangan pecahan dengan cara membuat cabang atas dan bawah bagi masing-masing solusi yang bernilai pecahan agar bernilai bulat sehingga setiap pembatasan akan menghasilkan cabang baru [22]. Sedangkan metode Gumory *Cutting Plane* menggunakan penambahan batasan baru yang disebut gomory dalam menyelesaikan persamaan linier yang memiliki solusi tidak bulat atau pecahan agar bernilai bulat [22].

Sebelumnya pada [1], [14] & [21] sudah menggunakan metode *Branch and Bound* dalam menyelesaikan permasalahan integer programming dalam mencari solusi optimal. Menurut penelitian tersebut dengan metode *Branch and Bound* dalam pengoptimalan diperoleh hasil kapasitas pengalokasian produk yang optimal sehingga diperoleh juga keuntungan yang lebih besar. Selain itu metode ini dianggap lebih efisien dibanding metode lain. Penelitian mengenai metode *Gomory Cutting Plane* pernah dilakukan oleh [7] & [16] untuk mengetahui konsep dan langkah kerja metode ini serta mengetahui hasil optimal maksimasi pendapatan laba penjualan dan minimasi biaya produksi. Hanya saja dalam penerapannya metode *Gomory Cutting Plane* jarang digunakan dibanding metode lainnya. Penelitian lain juga ada tentang perbandingan antara kedua metode tersebut yaitu [4] &[[27] dimana menemukan hasil yang berbeda, yaitu pada [4] menghasilkan optimasi produksi menggunakan metode *Branch and Bound* memberikan keuntungan yang lebih baik, sedangkan pada [27] memperlihatkan bahwa hasil optimasi produksi menggunakan metode *Branch and Bound* & metode *Gomory Cutting Plane* memperoleh hasil yang sama, tetapi metode *Branch and Bound* memerlukan iterasi yang lebih banyak dan waktu yang lebih lama.

Berdasarkan uraian diatas, maka penelitian mengkaji tentang integer linier programming dalam masalah optimasi keuntungan produksi. Pada penelitian ini akan menghitung keuntungan optimal menggunakan metode *Branch and Bound* dan metode *Gomory Cutting Plane*. Selain itu, penelitian ini juga akan melakukan analisis perbandingan terhadap hasil optimal dari kedua metode tersebut. Untuk mempermudah proses perhitungan pada kedua metode ini digunakan bantuan software POM-QM.

2. METODE

2.1 Pengumpulan dan Pengolahan Data

Pengumpulan data dilakukan melalui wawancara langsung dengan pemilik UMKM Capal Classic Shoes. Data yang dikumpulkan dari hasil wawancara berupa informasi penggunaan dan kesediaan bahan baku pembuatan sendal klasik beserta data keuntungnnya. Pada pengolahan data menggunakan metode *Branch and Bound* dan *Gomory Cutting Plane.*

2.2 Metode Penelitian

(a). Metode Simpleks

Langkah-Langkah Metode Simpleks dalam masalah maksimasi yaitu [5]:

1. Mengganti fungsi tujuan serta kendala ke bentuk baku dan menambahkan variabel *Slack* pada semua fungsi kendala dan fungsi tujuan.
2. Membuat tabel awal metode simpleks seperti berikut

Tabel 2.2.1 Tabel Simpleks

CB	C_j Basis	X_1	X_2	S_1	S_2	b_i	R_i
	S_1						
	S_2						
	Z_j						
	C_j - Z_j						

Keterangan Tabel Simpleks:
- CB = Koefisien fungsi tujuan untuk variabel basis.
- Variabel Basis = Variabel yang nilainya bukan nol.
- Koef x_1 & x_2 = Produksi mix
- Variabel Slack = Koefisien variabel slack dalam fungsi tujuan.
- b_i = Kuantitas atau nilai kanan
- Kepala kolom = Variabel & koefisien dalam fungsi tujuan.
- S_1 & S_2 = Persamaan dalam fungsi batasan
- Z_j = Total profit yang diperoleh
- $C_j - Z_j$ = Net profit (masalah yang ingin diselesaikan)
- R_i = b_i dibagi kolom kunci.

3. Memilih kolom kunci yang memiliki fungsi tujuan dengan nilai terbesar.
4. Memilih baris kunci; baris kunci ditentukan dengan membagi nilai bi dengan masing masing angka pada kolom kunci.Yang menjadi baris kunci adalah baris yang hasil baginya paling kecil dan tidak negatif. Jika ada yang sama boleh pilih salah satu.
5. Mengubah nilai-nilai selain baris kunci, sehingga nilai yang ada pada baris kunci bernilai = 0.
6. Periksa apakah tabel sudah optimal. Untuk tujuan maksimasi, keoptimalan tabel dilihat dari koefisien fungsi tujuan (nilai pada baris z). Tabel sudah optimal jika semua nilai pada baris z sudah positif atau 0, sehingga iterasi dihentikan. Jika belum, lakukan kembali iterasi mulai langkah 3.
7. Memperoleh solusi optimal dengan berdasarkan nilai pada masing-masing baris untuk setiap variabel keputusan (b_i).

(b). Metode *Branch and Bound*

Metode *Branch and Bound* merupakan salah satu metode untuk menghasilkan penyelesaian optimal pemrograman linier yang menghasilkan variabel- variabel keputusan bilangan bulat. Sesuai dengan namanya, metode ini membatasi penyelesaian optimum yang akan menghasilkan bilangan pecahan dengan cara membuat cabang atas dan bawah bagi masing- masing variabel keputusan yang bernilai pecahan agar bernilai bulat sehingga setiap pembatasan akan menghasilkan cabang baru [24].

Langkah-langkah dalam metode *Branch and Bound* yaitu [11]:

1. Dapatkan solusi simpleks optimal dari model program linier dengan batasan integernya dilepaskan,
2. Tentukan solusi simpleks sebagai batas atas sedangkan solusi hasil pembulatan ke bawah sebagai batas bawah.
3. Pilih variabel dengan bagian pecahan yang terbesar untuk pencabangan. Ciptakan dua batasan baru untuk variabel ini yang mencerminkan pembagian nilai integer. Hasilnya adalah sebuah batasan ≤ dan sebuah batasan ≥ . Jika solusi *up*)
4. Ciptakan dua node baru, satu dengan batasan ≤ dan satu dengan batasan ≥., (e0 Selesaikan model program linier dengan batasan baru yang ditambahkan pada tiap node.
5. Solusi simpleks awal merupakan batas atas pada setiap node sedangkan solusi integer maksimum yang ada pada node mana saja merupakan batas bawah.
6. Jika proses ini menghasilkan solusi integer fisibel dengan nilai batas atas terbesar pada akhir node yang mana saja, maka solusi integer optimal telah tercapai,
7. Jika tidak muncul suatu solusi integer fisibel, lakukanlah pencabangan lagi,
8. Ulangi langkah 3

(c) Metode *Cutting Plane*

Pendekatan yang dilakukan pada metode cutting plane adalah dengan membuat batasan tambahan sehingga dapat mengeliminasi solusi yang tidak integer. Proses ini akan berakhir apabila diperoleh solusi dengan variabel (yang dikehendaki) bernilai integer [26].

Langkah-langkah penyelesaian metode *cutting plane* yaitu [5]:

1. Menyelesaikan masalah integer programming dengan menggunakan metode simpleks dan mengabaikan syarat integer.
2. Memeriksa solusi optimum. Jika semua variabel basis memiliki nilai integer, solusi optimum integer telah diperoleh dan proses solusi telah berakhir. Jika satu atau lebih variabel basis masih memiliki nilai pecah, dilanjutkan memilih sembarang baris dari tabel akhir metode simpleks dengan nilai b pecahan terbesar. Hal ini dilakukan untuk mempercepat iterasi
3. Pada baris yang telah dipilih, tambahkan kendala seperti pada persamaan di

   bawah ini:

$$Sg_i - \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{k} f_{ij} x_j = -f_i$$

Keterangan :

Sg_i : Kendala gomory ke – i

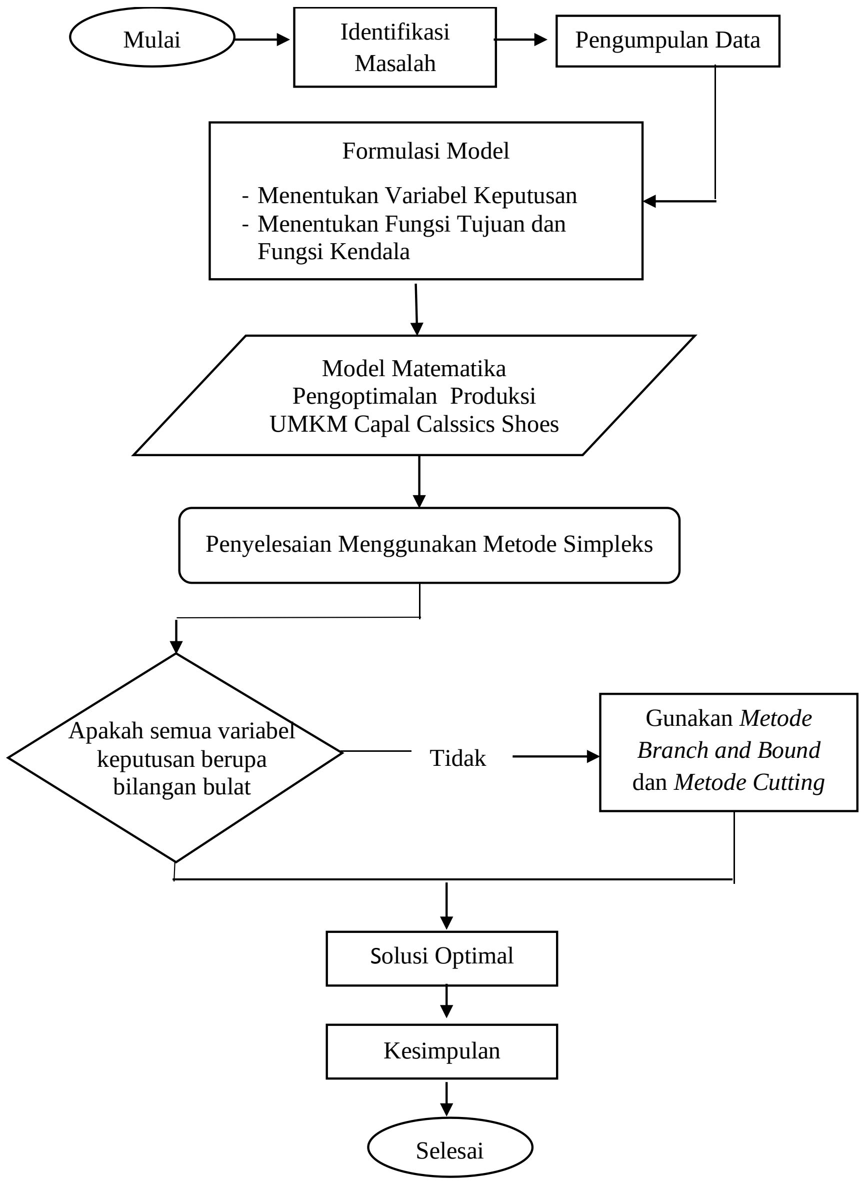
f_{ij} : Pecahan dalam a_{ij}

f_i : Pecahan dalam b_i

4. Selesaikan metode *Cutting Plane* menggunakan dual simpleks.

5. Solusi dikatakan optimal, apabila semua variabel pada ruas kanan mempunyai nilai integer. Jika belum integer, maka gomory harus ditambahkan lagi dan metode dual simpleks digunakan sampai mencapai solusi integer

Untuk mempermudahkan dalam menganalisis metode penelitian yang akan digunakan, alur penelitian ini disusun dalam bentuk diagram alir (*Flowchart*) di bawah ini



Gambar 2.1 Diagram Alir Penelitian

3. HASIL & PEMBAHASAN

Pada artikel ini akan dikaji tentang optimasi keutungan produksi UMKM Capal Classic Shoes Kabupaten Agam yang diperoleh setelah dilakukan perhitungan *integer programming* dengan menggunakan metode *Branch and Bound* dan metode *Gomory Cutting Plane.*

Tabel 3.1 Data Bahan Baku Pembuatan Satu Pasang Sendal (per hari)

No.	Bahan	Jenis sandal (Variabel)			Kapasitas	Satuan
		x_1	x_2	x_3	Persediaan	
1.	Sol kulit	20	0	10	400	Gram
2.	Busa	3	1	2	100	Lembar
3.	Songket	200	1.250	200	20.000	cm
4.	Besi alas	2	2	2	70	Buah
5.	Mika	0,142	0,142	0,142	4	Lembar
6.	Tali kulit	10	0	7	175	cm
7.	Gesper	2	0	2	50	buah

Tabel 3.2 Data Keuntungan Penjualan Satu Pasang Sendal

Jenis sandal	Variabel	Modal (Rp)	Penjualan (Rp)	Keuntungan (Rp)
Sandal laki-laki	x_1	105.000	125.000	20.000
Sandal perempuan	x_2	127.000	155.00	28.000
Sandal anak-anak	x_3	85.000	105.000	20.000

Berdasarkan Tabel 3.2 diperoleh sistem linier dengan fungsi kendala,

$20x_1 + 10x_3 \leq 400,$

$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 100,$

$200x_1 + 1.250x_2 + 200x_3 \leq 20.000,$

$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 70,$

$0{,}142x_1 + 0{,}142x_2 + 0{,}142x_3 \leq 4,$

$10x_1 + 7x_3 \leq 175,$

$2x_1 + 2x_3 \leq 50.$

Akibatnya diperoleh fungsi kendala yang memuat variabel *Slack*,

$20x_1 + 10x_3 + S_1 = 400,$

$3x_1 + x_2 + 2x_3 + S_2 = 100,$

$200x_1 + 1.250x_2 + 200x_3 + S_3 = 20.000,$

$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + S_4 = 70,$

$0{,}142\ x_1 + 0{,}142\ x_2 + 0{,}142\ x_3 + S_5 = 4,$

$10x_1 + 7x_3 + S_6 = 175,$

$2x_1 + 2x_3 + S_7 = 50.$

$x_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, dan $S_j \geq 0$, $j = 1,2$ 7.

dengan fungsi tujuan yaitu,

$$Maks\ Z = 20.000x_1 + 28.000x_2 + 20.000x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + 0S_4 + 0S_5 + 0S_6 + 0S_7.$$

Berdasarkan Tabel 3.1 dan Tabel 3.2 maka terbentuklah Tabel Awal dalam memperoleh keuntungan maksimum menggunakan Metode Tabel Simpleks seperti berikut ini

Tabel 3.3 Tabel Awal

CB	Cj	20.000	28.000	20.000	0	0	0	0	0	0	0	b_i	R_i
	Basis	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7		
0	S_1	20	0	10	1	0	0	0	0	0	0	400	20
0	S_2	3	1	2	0	1	0	0	0	0	0	100	100
0	S_3	200	1.250	200	0	0	1	0	0	0	0	20.000	16
0	S_4	2	2	2	0	0	0	1	0	0	0	70	35
0	S_5	0,142	0,142	0,142	0	0	0	0	1	0	0	4	28,16
0	S_6	10	0	7	0	0	0	0	0	1	0	175	17,5
0	S_7	2	0	2	0	0	0	0	0	0	1	50	25
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
	$C_j - Z_j$	20.000	28.000	20.000	0	0	0	0	0	0	0		

= kolom kunci   = baris kunci   = angka

Selanjutnya mencari angka baru pada baris non kunci dengan cara yang sama pada saat mencari angka baru pada baris non kunci dan nilai Z_j sehingga diperoleh tabel Iterasi 1 sebagai berikut :

Tabel 3.4 Tabel Iterasi 1 (Hasil Akhir Tabel Iterasi 1)

CB	Cj	20.000	28.000	20.000	0	0	0	0	0	0	0	b_i	R_i
	Basis	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7		
0	S_1	20	0	10	1	0	0	0	0	0	0	400	20
0	S_2	2,84	0	1,84	0	1	-0,0008	0	0	0	0	84	29,58
28.000	x_2	0,16	1	0,16	0	0	0,0008	0	0	0	0	16	100
0	S_4	1,68	0	1,68	0	0	-0,0016	1	0	0	0	38	22,61
0	S_5	0,1193	0	0,1193	0	0	-0,0001	0	1	0	0	1,728	14,48
0	S_6	10	0	7	0	0	0	0	0	1	0	175	17,5
0	S_7	2	0	2	0	0	0	0	0	0	1	50	25
	Z_j	4.480	28.000	4.480	0	0	22,4	0	0	0	0	448.000	
	$C_j - Z_j$	15.520	0	15.520	0	0	-22,4	0	0	0	0		

= kolom kunci   = baris kunci   = angka

Berdasarkan Tabel 3.4 hasil dari nilai dari Cj - Zj masih positif maka nilainya masih belum maksimum sehingga dilanjutkan ke Tabel Iterasi berikutnya dengan cara yang sama pada saat membuat Tabel Iterasi 1. Setelah dilakukan pencarian beberapa Tabel Iterasi hasil akhir yang optimal didapat pada Tabel Iterasi ke-2 berikut:

Tabel 3.5 Tabel Iterasi 2 (Hasil Akhir Tabel Iterasi 2)

CB	Cj	20.000	28.000	20.000	0	0	0	0	0	0	0	b_i
	Basis	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	
0	S_1	0	0	-10	1	0	0,019	0	-167,6727	0	0	110,26
0	S_2	0	0	-1,0	0	1	0,0019	0	-23,8095	0	0	42,85
28.000	x_2	0	1	0	0	0	0,001	0	-1,3414	0	0	13,68
0	S_4	0	0	0	0	0	0	1	-14,0845	0	0	13,66

Karena nilai pada kolom $C_j - Z_j$ sudah bernilai nol atau negatif maka solusinya sudah optimal dan perhitungan dihentikan dengan melakukan dua kali Iterasi, hasil penyelesaian nilai variabel diperoleh $_1$ =14,48, x_2 = 13,68 x_3 = 0 serta nilai Z = 672.837. Pada hasil ini terlihat bahwa ada nilai optimal yang diperoleh bukan bilangan integer, maka penyelesaian dilanjutkan menggunakan metode *Branch and Bound* & metode *Gumory Cutting Plane*.

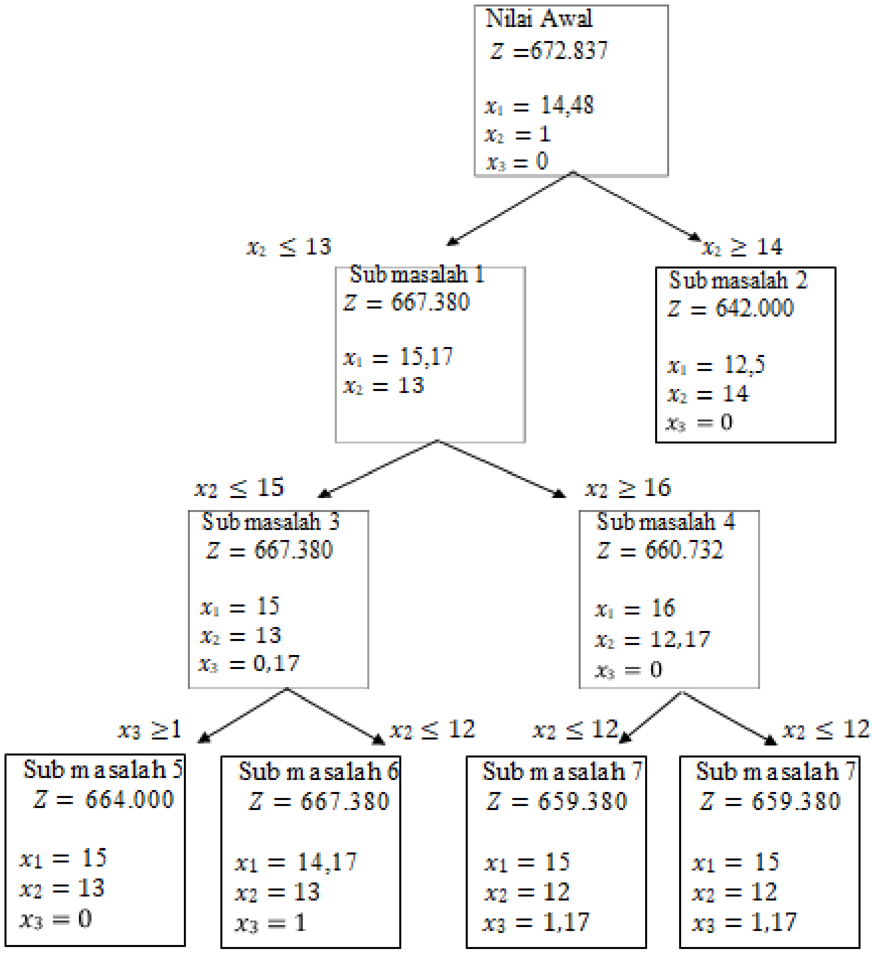
Penyelesaian Menggunakan Metode *Branch and Bound*

Berdasarkan hasil dari program linear melalui Metode Simpleks diperoleh nilai optimal x_1 =14,48, x_2 = 13,68 x_3 = 0 serta nilai Z = 672.837. Karena nilai variabel keputusan yang diharapkan bernilai *Integer*, kemudian dilanjutkan dengan *Integer Linear Programming* menggunakan Metode *Branch and Bound*.

Langkah-langkah perhitungan Metode *Branch and Bound* adalah sebagai berikut:

a) dari hasil solusi simpleks bisa terlihat variabel yang masih belum *Integer* dengan pecahan terbesar adalah x_1 = 14,48 dan x_2 = 13,68
b) Hasil Solusi simpleks adalah x_1= 14,48 x_2= 13,68, x_3 = 0 dan Z = Rp 672.837, karena x_1 dan x_2 bukan bilangan Integer maka solusi ini belum layak. Namun nilai pendapatan dari solusi simpleks Z = Rp 672.837 dijadikan batas atas (BA). Dengan metode pembulatan kebawah diperoleh nilai solusi Z = Rp 664.000
c) Pilih variabel dengan bagian pecahan yang terbesar untuk pencabangan. Ciptakan dua batasan baru untuk variabel ini yang mencerminkan pembagian nilai *Integer*. Hasilnya adalah sebuah batasan ≤ dan sebuah batasan ≥. Variabel pecahan terbesar yaitu x_2= 13,68. Ciptakan dua batasan baru dari
d) Ciptakan dua sub masalah yaitu, sub masalah satu dan sub masalah dua dengan nilai batasan variabelnya $x_2 \leq 13$ dan $x_2 \geq 14$.
e) Model Program linier yang digunakan adalah Metode Simpleks dengan bantuan *software* POM-QM V5 dapat terlihat pada gambar pohon percabangan berikut ini:

Sebelum mencari nilai dari setiap batasan asumsikan terlebih dahulu nilai solusi awal berupa nilai solusi dari Metode Simpleks dapat terlihat pada pohon percabangan berikut ini :



Gambar 3.1. Pohon percabangan nilai awal dari batasan $x_2 \leq 13$ dan $x_2 \geq 14$

Selanjutnya mencari nilai percabangan sub masalah satu dan sub masalah dua menggunakan Program Linier Metode Simpleks dengan bantuan *software* POM-QM V5 dapat terlihat pada gambar berikut ini:

sub masalah 1

	X1	X2	X3		RHS	Equation form
Maximize	20000	28000	20000			Max 20000X1 + 28000X2 + 20000X3
Constraint 1	20	0	10	<=	400	20X1 + 10X3 <= 400
Constraint 2	3	1	2	<=	100	3X1 + X2 + 2X3 <= 100
Constraint 3	200	1250	200	<=	20000	200X1 + 1250X2 + 200X3 <= 20000
Constraint 4	2	2	2	<=	70	2X1 + 2X2 + 2X3 <= 70
Constraint 5	,14	,14	,14	<=	4	0.142X1 + 0.142X2 + 0.142X3 <= 4
Constraint 6	10	0	7	<=	175	10X1 + 7X3 <= 175
Constraint 7	2	0	2	<=	50	2X1 + 2X3 <= 50
Constraint 8	0	1	0	<=	13	X2 <= 13

Gambar 3.2 *Output* nilai awal sub masalah 1

Pada Gambar 3.2 dapat dilihat tampilan output nilai awal untuk sub masalah 1 pada *software* POM-QM. Adapun tampilan *output* solusinya terlihat pada gambar berikut

Linear Programming Results

1000 Solution

	X1	X2	X3		RHS	Dual
Maximize	20000	28000	20000			
Constraint 1	20	0	10	<=	400	0
Constraint 2	3	1	2	<=	100	0
Constraint 3	200	1250	200	<=	20000	0
Constraint 4	2	2	2	<=	70	0
Constraint 5	,14	,14	,14	<=	4	140845,1
Constraint 6	10	0	7	<=	175	0
Constraint 7	2	0	2	<=	50	0
Constraint 8	0	1	0	<=	13	8000
Solution	15,17	13	0		667380,3	

Gambar 3.3 Output solusi sub masalah 1

Pada Gambar 3.3 terlihat bahwa solusi optimal yang diperoleh masih belum bilangan integer, yaitu untuk $x_1 = 15{,}17$ dan $x_2 = 13$. Sehingga dilanjutkan mencari solusi untuk sub masalah 2. Dengan menggunkan *software* POM-QM maka diperoleh tampilan *output* nilai awal untuk sub masalah 2 seperti gambar berikut ini :

sub masalah 2

	X1	X2	X3		RHS	Equation form
Maximize	20000	28000	20000			Max 20000X1 + 28000X2 + 20000X3
Constraint 1	20	0	10	<=	400	20X1 + 10X3 <= 400
Constraint 2	3	1	2	<=	100	3X1 + X2 + 2X3 <= 100
Constraint 3	200	1250	200	<=	20000	200X1 + 1250X2 + 200X3 <= 20000
Constraint 4	2	2	2	<=	70	2X1 + 2X2 + 2X3 <= 70
Constraint 5	,14	,14	,14	<=	4	0.142X1 + 0.142X2 + 0.142X3 <= 4
Constraint 6	10	0	7	<=	175	10X1 + 7X3 <= 175
Constraint 7	2	0	2	<=	50	2X1 + 2X3 <= 50
Constraint 8	0	1	0	>=	14	X2 >= 14

Gambar 3.4. *Output* nilai awal sub masalah 2

Pada Gambar 3.4 dapat dilihat tampilan output nilai awal untuk sub masalah 2 pada *software* POM-QM. Adapun tampilan *output* solusinya terlihat pada gambar berikut ini :

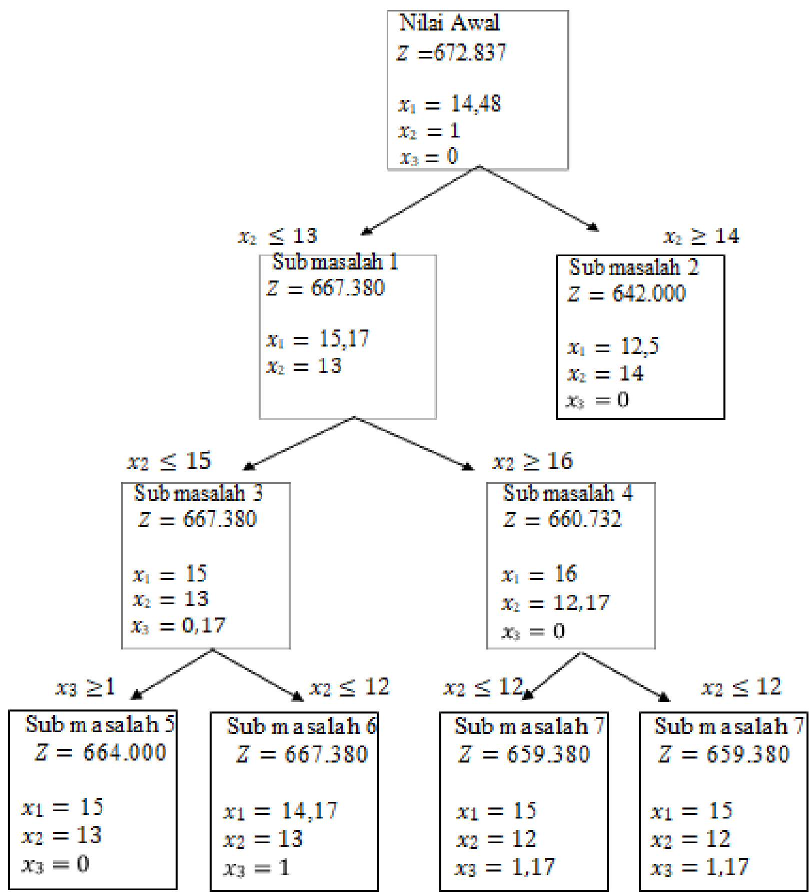
Linear Programming Results

sub masalah 2 Solution

	X1	X2	X3		RHS	Dual
Maximize	20000	28000	20000			
Constraint 1	20	0	10	<=	400	0
Constraint 2	3	1	2	<=	100	0
Constraint 3	200	1250	200	<=	20000	100
Constraint 4	2	2	2	<=	70	0
Constraint 5	,14	,14	,14	<=	4	0
Constraint 6	10	0	7	<=	175	0
Constraint 7	2	0	2	<=	50	0
Constraint 8	0	1	0	>=	14	-97000
Solution	12,5	14	0		642000	

Gambar 3.4. *Output* solusi sub masalah 2

Pada Gambar 3.4 dapat dilihat bahwa solusi sub masalah 2 belum bernilai integer sehingga perhitungan terus dilakukan hingga solusi dari sub masalah bernilai integer. Setelah mendapatkan hasil solusi output dari masing-masing sub masalah satu dan sub masalah dua maka selanjutnya hasil dari solusi tersebut dijabarkan seperti gambar berikut ini:



Gambar 3.5 Hasil akhir nilai solusi dari percabangan nilai awal

Nilai yang paling optimal serta nilai solusi nya yang berada di antara batas atas dan batas bawah dan sudah berrnilai *integer* berada pada sub masalah 5 dengan nilai variabel x_1 = 15, x_2 =

13, x_3 = 0 dan Z = 664.000. maka nilai solusi optimum berada pada sub masalah 5 dengan batasan $x_3 \geq 0$.

Berdasarkan hasil dari perhitungan Metode *Branch and Bound* diperoleh keuntungan maksimum dengan hasil penyelesaian variabel nya yaitu: x_1 =15, x_2 =13, x_3 = 0 yaitu

$$
\begin{aligned}
Z &= 20.000x_1 + 28.000x_2 + 20.000x_3 \\
&= 20.000\ (15) + 28.000\ (13) + 20.000\ (0)) \\
&= 664.000
\end{aligned}
$$

Sehingga dapat disimpulkan UMKM menghasilkan keuntungan optimal penjualan sebesar Rp. 664.000 Jika produksi ditingkatkan untuk sandal laki-laki sebanyak 15 pcs, dan sandal perempuan sebanyak 13 pcs, lebih banyak dari produksi sebelumnya sehingga terjadi peningkatan keuntungan dari keuntungan awal sebesar Rp. 60.000 mencapai keuntungan optimal sebesar Rp.664.000.

Penyelesaian Menggunakan Metode *Gumory Cutting Plane*

Selanjutnya menentukan solusi *integer linear programming* dengan menggunakan metode *Cutting Plane*. Adapun langkah-langkah dalam menyelesaikan metode *Cutting Plane* adalah sebagai berikut :

a. Memilih sembarang baris pada tabel optimum simpleks yang variabel keputusannya pada solusi optimum bernilai *non integer*. Dari hasil akhir yang didapat tampak bahwa baik x_1 maupun x_2 bukan merupakan penyelesaian bilangan bulat sehingga bukanlah penyelesaian optimalnya. Maka pemotongnya bisa menggunakan x_1 maupun x_5 , tetapi karena f_i dari x_2 adalah 0,6821 (paling besar) sehingga pemotongan akan dilakukan berdasarkan baris x_1
b. Baris ke-3 adalah baris yang terpilih dan persamaan yang terbentuk dalam baris ke-3 adalah sebagai

$x_i = b_i - \sum_{\mathrm{j}=1}^{n} a_{\mathrm{ij}} S_{\mathrm{j}}$, $b_i = non\ integer$ (baris sumber),

x_2 = 13,6821 − (0,001S_3 − 1,3414S_5),

$b_i = [b_i] + f_i$,

b_3 = 13 + 0,6821,

$a_{\mathrm{ij}} = [a_{\mathrm{ij}}] + f_{\mathrm{ij}}$,

$a_{3,6}$ = 0 + 0,001,

$a_{3,8}$ = −2 + 0,6586

sehingga diperoleh

$-\sum^{n} f_{\mathrm{ij}} S_{\mathrm{j}} + S_{\mathrm{g}i} = -f_i$, j=1

$$-(0,001S_3 + 0,6586S_5) + S_{g1} = -0,6821,$$

$$-0,001S_3 - 0,6586S_5 + S_{g1} = -0,6821.$$

c. Kendala baru diatas dimasukan ke tabel simpleks terakhir kemudian selesaikan dengan metode dual simpleks kemudian selesaikan dengan metode dual simpleks. Adapun hasilnya seperti pada Tabel Simpleks Optimum Penambahan Pemotong Kendala *Gomory* I berikut,

Tabel 4.2.1 Tabel Dual Simpleks Optimum (Penambahan Pemotong Kendala *Gomory* I)

	C_j	20.000	28.000	20.000	0	0	0	0	0	0			
C_b	Basis	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_{g1}	b_i
0	s_1	0	0	-10	1	0	0	0	-180.186	0	0	19	97.301
0	s_2	0	0	-1	0	1	0	0	-25.0608	0	0	1.9	41.561
28.000	x_2	0	1	0	0	0	0	0	-2	0	0	1	13
0	s_4	0	0	0	0	0	0	1	-14.0845	0	0	0	13.663
20.000	x_1	1	0	1	0	0	0	0	9.0422	0	0	-1	15
0	s_6	0	0	-3	0	0	0	0	-90.0931	1	0	9.5	23.650
0	s_7	0	0	0	0	0	0	0	-18.0186	0	1	1.9	19.730
0	s_3	0	0	0	0	0	1	0	658.6	0	0	1000	682.1
	Z_j	20000	28000	20000	0	0	0	0	124844	0	0	800	664.000
	$Z_j - C_j$	0	0	0	0	0	0	0	124844	0	0	8000	

Berdasarkan hasil dari Tabel Simpleks Optimum Penambahan Pemotong Kendala *Gomory* I tampak bahwa baik x_1 maupun x_2 merupakan penyelesaian bilangan bulat, Maka proses pembentukan kendala *Gomory* berakhir. Sehingga diperoleh jumlah penjualan yang optimal yaitu sandal laki-laki 15 pasang, sandal perempuan 13 pasang dengan keuntungan Rp. 664.000.

Dari hasil yang diperoleh diketahui bahwa kedua metode ini menghasilkan keuntungan maksimalyang sama yaitu RP. 664.000 dengan masing-masing memproduksi 15 pasang sandal laki-laki dan 13 pasang sandal perempuan. Sama halnya dengan penelitian sebelumnya pada [17], metode *Branch and Bound* dan metode *Gumory Cutting Plane* menghasilkan keuntungan yang sama. Artinya untuk kasus ini kedua metode tersebut sama-sama efektif digunakan dalam mengoptimalkan keuntungan Namun dalam penyelesaiannya, metode *Branch and Bound* memerlukan iterasi yang banyak dan waktu yang lebih lama dibandingkan dengan metode *Gumory Cutting plane*.

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan perhitungan menggunakan metode *Branch and Bound* dan *Gumory Cutting Plane*, kedua metode menghasilkan keuntungan optimal penjualan dari UMKM *Capal Classic Shoes* Kab. Agam yang sama yaitu sebesar Rp. 664.000. Jika produksi ditingkatkan untuk sandal laki-laki sebanyak 15 pcs, dan sandal perempuan sebanyak 13 pcs, lebih banyak dari produksi sebelumnya sehingga terjadi peningkatan keuntungan dari keuntungan awal sebesar Rp. 60.000 mencapai keuntungan optimal sebesar Rp.664.000. Akibatnya didapat selisih keuntungan dari sebelumnya dan setelah dilakukan optimasi menjadi Rp. 596.000. Sehingga dapat disimpulkan bahwa penjualan yang telah didapatkan oleh UMKM *Capal Classic Shoes* Kab. Agam saat ini sudah mendekati keuntungan optimal.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Akyuz, M.*et. al*., 2012. Location and Allocation Based Branch And Bound Algorithms For The Capacitated Multifacility Weber Problem. *Springer* Vol.222, No.59: 45- 71.

[2]. Alpha C. Chiang dan Kevin Wainwright, 2006. Dasar-Dasar Matematika Ekonomi. Jakarta: *Penerbit Erlangga*.

[3]. Azzahrha, Fatimah Khilaliyah et al., 2021. Optimalisasi Produksi Tahu Menggunakan Metode Branch and Bound dan Cutting Plane. *STRING*, Vol. 6 No. 2 : 175-184

[4]. Basriati S, 2018.*Integer Linear Programming* Dengan Pendekatan Metode *Cutting Plane* dan *Branch and Bound* Untuk Optimasi Produksi Tahu. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*, Vol. 4, No. 2: 95 – 104

[5]. Bronson, Richard, 1982. *Theory and Problems of Operations Research*.McGraw-Hill, USA

[6]. Chadziqatun Najilatil Mazda and Dwi Agustina Kurniawati, 2020 *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* 1003 012129

[7]. Devi, Sari Purba dan Faiz Ahyaningsih, 2020. *Integer Programming* Dengan Metode *Branch and Bound* Dalam Optimasi Jumlah Produksi Setiap Jenis Roti Pada PT. Arma Anugerah Abadi. *Karismatika*, Vol. 6 No. 3: 20-29

[8]. Dhuriattun, 2015. Penerapan Metode Cutting Plane dalam Menyelesaikan Optimalisasi Perencanaan Produksi pada Kelompok Wanita Tani (KWT) Seruni Berbah. *Tugas Akhir Mahasiswa Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga Yogyakarta.*

[9]. Huang, Lingying, et al., 2021. Branch and Bound in Mixed Integer Linear Programming Problems: A Survey of Techniques and Trends. *Department of Electronic Engineering, HKUST*

[10]. M Fausi, 2022. Penerapan Metode *Cutting Plane* untuk Optimasi Biaya Pemupukan pada Tanaman Cabai. *Jurnal Kajian dan Terapan Matematika*,Vol. 8, Edisi 2: 85- 94

[11]. Marzukoh, Ainul, 2017.Optimasi Keuntungan Dalam Produksi Dengan Menggunakan *Linear Programming* Metode. *Undergraduate Thesis*, *UIN Raden Intan Lampung*.

[12]. Mulyono, S., 2002. Riset Operasi. Jakarta: *Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia*

[13]. Muslich, M. 2009. Metode Penganmbilan Keputusan Kuantitatif. Jakarta: *Bumi Aksara*

[14]. Oberdieck, R., dan Psitikopoulos, E. N., 2014. A Branch And Bound Method For The Solution Of Multiparametric Mixed Integer Linear Programming Problems. *J Glob Optim* Vol. 22, No.59: 527–543.

[15]. Roflin Eddy et al., 2014. Substituting Gomory Cutting Plane Method Towards Balas Algorithm For Solving Binary Linear Programming. *Bulletin of Mathematics* Vol. 06, No. 01 : 1–13.

[16]. Rosyidah, Mita, 2021. Optimasi Jumlah Produksi Roti Manis pada Bintang Bakery dengan Metode *Cutting Plane*. *Fakultas Sains dan Teknologi UNJA.*

[17]. Tri Rahmayani & Devni Prima Sari, 2022. Perbandingan Metode Branch and Bound dan Metode Cutting Plane dalam Optimasi Jumlah Produksi di BSL Store. *Journal Of Mathematics UNP* Vol. 7, No. 2, 38-43.

[18]. Wang, S. dan Liu, M., 2015. A Branch And Bound Algorithm For Single-Machine Production Scheduling Integrated With Preventive Maintenance Planning. *International Journal of Production Research*,Vol.51,No.3:491–506.

[19]. Winston, W.L., 2003. Operations Research Aplications and Algorithm. *Duxbury Press*, USA

[20]. Muslich, M., 2009. Metode Pengambilan Keputusan Kuantitatif. Jakarta: *Bumi Aksara*

[21]. Oberdieck, R., dan Psitikopoulos, E. N., 2014. A Branch And Bound Method For The Solution Of Multiparametric Mixed Integer Linear Programming Problems. *J Glob Optim* Vol. 22, No.59: 527–543.

[22]. Rahmayani, Tri dan Devni Prima Sari, 2022. Perbandingan Metode Branch and Bound dan Metode Cutting Plane dalam Optimasi Jumlah Produksi di BSL Store. *Journal of Mathematics UNP* Vol. 7 No. 2 : 38-43

[23]. Roflin Eddy et al., 2014. Substituting Gomory Cutting Plane Method Towards Balas Algorithm For Solving Binary Linear Programming. *Bulletin of Mathematics* Vol. 06, No. 01 : 1–13.

[24]. Siswanto, 2007. *Operation Reasearch*, Jilid I. Jakarta: *Penerbit Erlangga*

[25]. Taha, H.A., 2007. *Operation Research An Introduction. Ed. 8.* United States : Pearson Education, Inc.

[26]. Thie, Paul R dan Keough Gerard E., 2008. *An Introduction To Linier Programming And Game Theory Third Edition*. Canada: Wiley.

[27]. Wahyudin Nur and Nurul M Abdal, 2016. Penggunaan Metode *Branch and Bound* dan *Gomory Cut* dalam Menentukan Solusi *Integer Linear Programming*. *Jurnal Saintifik, Vol.II, No. 1: 9-15*

[28]. Wang, S. dan Liu, M., 2015. *A Branch And Bound Algorithm For Single-Machine Production Scheduling Integrated With Preventive Maintenance Planning.* International Journal of Production Research. Vol.51,No.3:491–506.

[29]. Winston, W.L., 2003. *Operations Research Aplications and Algorithm*. Duxbury Press, USA .