J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 2, No.2, 97-101, Januari 2006
ISBN:1858-1382

Model Distribusi Kecelakaan Lalu Lintas Jalan Raya

Daeng Idris[†]

Abstrak

Salah satu model kecelakaan lalu lintas jalan raya adalah Distribusi panjang (*long*) yang diturunkan berdasarkan konsep bahwa pengemudi sebagai makhluk yang effisiensinya berubah-ubah, pada saat-saat efisiensi dari pengemudi rendah, dinamakan “SPELLS”. Pengemudi merupakan subyek SPELLS dan tidak ada kecelakaan terjadi diluar SPEELS, sedangkan distribusi pendek (*short*) ditentukan berdasarkan kecelakaan terjadi di dalam SPELLS maupun di luar SPELLS dan kecelakaan di dalam SPEELS dengan kecelakaan di luar SPELLS saling bebas.

Keywords: *Fungsi pembangkit, distribusi Long, distribusi Short.*

1. Pendahuluan

Suatu persamaan yang mengandung satu atau beberapa turunan dari suatu fungsi yang tak diketahui. Persamaan diferensial berperanan penting di alam, sebab kebanyakan fenomena alam dirumuskan dalam bentuk persamaan diferensial. Persamaan diferensial sering digunakan sebagai model matematika dalam bidang sains maupun dalam bidang rekayasa. Jika diperhatikan kepadatan lalu lintas jalan raya dalam suatu waktu tertentu, selalu saja ada kecelakaan. Banyak faktor yang menyebabkan terjadinya kecelakaan, tapi pada garis besarnya dapat dibagi atas 3 faktor :

1. Faktor pengemudi (lalai, mengemudi dengan kencang dan lainnya).
2. Faktor kendaraan (rem tidak jalan, ban yang gundul, mesin kendaraan yang sudah tua dan lainnya).
3. Faktor jalan (jalan yang licin dan berpasir, jalan yang tidak terlalu lebar, kurangnya rambu-rambu lalu lintas, lampu lalu lintas yang sering mati dan lainnya).

Akan tetapi, pada umumnya, terjadinya kecelakaan kebanyakan disebabkan faktor pengemudi. Spesswall dan Froggate menganjurkan hipotesis yang sesuai dengan distribusi kecelakaan yakni distribusi panjang (*long distribution*) dan distribusi pendek (*short distribution*).

2. Pembahasan

2.1. Distribusi Panjang (*Long Distribution*).

Distribusi ini diturunkan berdasarkan konsep bahwa pengemudi sebagai makhluk yang efisiensinya berubah-ubah, pada saat-saat dimana efisiensi dari pengemudi itu rendah, yang dinamakan Spells. Spells dapat disebabkan oleh faktor-faktor yang sifatnya sementara, seperti kesehatan terganggu. Spells juga membolehkan turut campur tangannya pemakai jalan lainnya sebagai penyebab kecelakaan.

[†] *Staf pengajar pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar*

Pandang bahwa pengemudi merupakan subyek Spells dan tak ada kecelakaan terjadi di luar Spells. Banyaknya Spells dalam perioda yang berbeda saling bebas. Selanjutnya dipandang bahwa semua pengemudi berpeluang sama mendapat Spells dan peluang kecelakaan dalam Spells adalah konstan dan bebas dari peluang mendapat S*pells.

Misalkan λ rata-rata (*mean*) banyaknya Spells per pengemudi dalam waktu tertentu dan misalkan θ rata-rata (*mean*) banyaknya kecelakaan per Spells. Fungsi pembangkit untuk banyaknya kecelakaan per Spells berdistribusi Poisson dengan parameter θ ialah $e^{\theta(s-1)}$ dan fungsi pembangkit untuk banyaknya kecelakaan dalam k Spells ialah $e^{k\theta(s-1)}$.

Dari sini diperoleh fungsi pembangkit untuk distribusi kecelakaan yang distribusinya berbentuk *Compound Poisson*. Fungsi pembangkit untuk distribusi kecelakaan ialah :

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} e^{k\theta(s-1)} \tag{1}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\left(\lambda e^{\theta(s-1)}\right)^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{\theta(s-1)}}$$

$$= e^{\lambda\left(e^{\theta(s-1)}-1\right)} \tag{2}$$

$$= e^{\lambda\left(e^{-\theta}-1\right)} e^{\lambda e^{-\theta}\left(e^{\theta s}-1\right)}$$

$$= e^{\lambda\left(e^{-\theta}-1\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{-\theta}\left(e^{\theta s}-1\right)\right)^k}{k!}$$

$$= e^{\lambda\left(e^{-\theta}-1\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{-\theta}\right)^k}{k!} \left(e^{\theta s}-1\right)^k$$

$$= e^{\lambda\left(e^{-\theta}-1\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{-\theta}\right)^k}{k!} \sum_{m=0}^{k} \binom{\mathrm{k}}{\mathrm{m}} \left(e^{\theta s}\right)^m (-1)^{k-m}$$

$$= e^{\lambda\left(e^{-\theta}-1\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{-\theta}\right)^k}{k!} \sum_{m=0}^{k} \binom{\mathrm{k}}{\mathrm{m}} (-1)^{k+m} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\theta s m)^r}{r!}$$

$$= e^{\lambda\left(e^{-\theta}-1\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{-\theta}\right)^k}{k!} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\theta^r s^r}{r!} \sum_{m=0}^{k} \binom{\mathrm{k}}{\mathrm{m}} (-1)^{k+m} m^r$$

$$G(s) = e^{\lambda\left(e^{-\theta}-1\right)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\theta^r s^r}{r!} \sum_{k=0}^{r} \frac{\Delta^k\left(0^r\right)}{k!} \left(\lambda e^{-\theta}\right)^k \tag{3}$$

di mana $\Delta^r\left(0^r\right) = \sum_{m=0}^{k} \binom{\mathrm{k}}{\mathrm{m}} (-1)^{k+m} m^r$

Distribusi peluang $P(k)$ merupakan koefisien dari s^r dalam $G(s)$ persamaan (3), diperoleh:

$$P(r) = e^{\lambda\left(e^{-\theta}-1\right)} \sum_{k=0}^{r} \frac{\Delta^k\left(0^r\right)\theta^r}{k!\,r!} \left(\lambda e^{-\theta}\right)^k \tag{4}$$

Distribusi ini oleh Creswell dan Froggatt dinamakan distribusi “Panjang” (*Long Distribution*).

$$P(0) = e^{\lambda\left(e^{-\theta}-1\right)}$$
$$P(1) = e^{\lambda\left(e^{-\theta}-1\right)} \; \theta\lambda e^{-\theta}$$
$$P(2) = e^{\lambda\left(e^{-\theta}-1\right)} \; \frac{\theta^2 \lambda e^{-\theta}}{2!} \; \left(1+\lambda e^{-\theta}\right)$$
$$P(3) = e^{\lambda\left(e^{-\theta}-1\right)} \; \frac{\theta^2 \lambda e^{-\theta}}{3!} \; \left(1+3\lambda e^{-\theta}+\left(\lambda e^{-\theta}\right)^2\right)$$
$$\vdots$$

dan seterusnya

Mean dan variansi dapat diperoleh dari fungsi pembangkit $G(s)$ persamaan (2), diperoleh :

$$\text{Mean}(K) = u_1'(K) = \left.\frac{dG(s)}{ds}\right|_{s=1} = \lambda\theta \tag{5}$$

$$E\left(X\left(X-1\right)\right) = u_2'(K) = \left.\frac{d^2G(s)}{ds^2}\right|_{s=1} = \lambda e^2 + \lambda^2 e^2$$

$$\text{Variansi (K)} = u_2'(K)+u_1'(K)-\left(u_1'(K)\right)^2 = \lambda\theta\,(1+\theta) \tag{6}$$

Dari mean dan variansi pengamatan kita memperoleh parameter λ dan θ, dan dari sini distribusi peluang ataupun distribusi frekuensi dapat dihitung. Distribusi “Panjang” (*Long Distribution*) ternyata sesuai sebagai distribusi kecelakaan lalu lintas jalan raya.

2.2. Distribusi “Pendek” (*Short Distribution*).

Dalam distribusi “Panjang” (*Long Distribution*) diasumsikan bahwa kecelakaan hanya terjadi dalam Spells, jadi kecelakaan yang tercela saja yang diperhitungkan. Jika asumsi ini diperlemah, sambil berpegangan pada asumsi tambahan yakni kecelakaan dapat terjadi di luar Spells untuk semua pengemudi, walaupun kejadian tersebut jarang. Kecelakaan di luar Spells dan kecelakaan dalam Spells saling bebas, kecelakaan di luar Spells dan Spells juga saling bebas. Dapat ditarik kesimpulan bahwa ada distribusi peluang yang lain, yang dinamakan distribusi “Pendek” (*Short Distribution*).

Misalkan θ rata-rata (*mean*) banyaknya kecelakaan di luar Spells, maka fungsi pembangkit menjadi :

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \left[e^{k\theta(s-1)} e^{\phi(s-1)}\right]$$

$$G(s) = e^{-\lambda} e^{\phi(s-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda e^{\theta(s-1)}\right)^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{\theta(s-1)}} e^{\phi(s-1)} = e^{\lambda\left(e^{-\theta}-1\right)-\phi} e^{\lambda e^{-\theta}\left(e^{\theta s}-1\right)+\phi s} \tag{7}$$

$G(s) = P(0)\, e^{\lambda e^{-\theta}\left(e^{\theta s}-1\right)} e^{\phi s}$, dimana $P(0) = e^{\lambda\left(e^{-\theta}-1\right)-\phi}$. Telah dibuktikan bahwa :

$$e^{\lambda e^{-\theta}\left(e^{\theta s}-1\right)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s^j \theta^j}{j!} \sum_{k=0}^{j} \frac{\Delta^k\left(0^j\right)}{k!} \left(\lambda e^{-\theta}\right)^k$$

$$G(s) = P(0) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s^j \theta^j}{j!} \sum_{k=0}^{j} \frac{\Delta^k\left(0^j\right)}{k!} \left(\lambda e^{-\theta}\right)^k \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\phi s)^r}{r!}$$

$$= P(0)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{s^j\theta^j}{j!}\quad\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\phi^r s^r}{r!}\quad\sum_{k=0}^{j}\frac{\Delta^k\left(0^j\right)}{k!}\quad\left(\lambda e^{-\theta}\right)^k$$

$$= P(0)\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{r}\frac{s^j\theta^j}{j!}\quad\frac{\phi^{r-j}s^{r-j}}{(r-j)!}\quad\sum_{k=0}^{j}\frac{\Delta^k\left(0^j\right)}{k!}\quad\left(\lambda e^{-\theta}\right)^k$$

$$G(s) = P(0)\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{r}\frac{\theta^j\phi^{r-j}}{j!(r-j)!}s^r\quad\sum_{k=0}^{j}\frac{\Delta^k\left(0^j\right)}{k!}\quad\left(\lambda e^{-\theta}\right)^k \qquad (8)$$

Distribusi peluang $P(r)$ dapat diperoleh dari fungsi pembangkit (8).

$$P(r) = P(0)\sum_{j=0}^{r}\left[\frac{\theta^j\phi^{r-j}}{j!(r-j)!}\sum_{k=0}^{j}\frac{\Delta^k\left(0^j\right)}{k!}\left(\lambda e^{-\theta}\right)^k\right] \qquad (9)$$

$$P(0) = e^{\lambda\left(e^{-\theta}-1\right)-\phi}$$

$$P(1) = e^{\lambda\left(e^{-\theta}-1\right)-\phi}\quad\left(\phi+\theta\lambda e^{-\theta}\right)$$

$$P(2) = e^{\lambda\left(e^{-\theta}-1\right)-\phi}\quad\left[\frac{\phi^2}{2!}+\phi\theta\lambda e^{-\theta}+\frac{\theta^2}{2!}\left(\lambda e^{-\theta}+\left(\lambda e^{-\theta}\right)^2\right)\right]$$

⋮

dan seterusnya

Mean dan variansi dapat diperoleh dengan mendeferensiasi fungsi pembangkit (7) dengan mengambil $s = 1$.

$$\text{Mean}(K) = u_1'(K) = E(X) = \left.\frac{dG(s)}{ds}\right|_{s=1} = \lambda\theta+\phi \qquad (10)$$

$$E(X(X-1)) = u_2'(K) = \left.\frac{d^2G(s)}{ds^2}\right|_{s=1} = \lambda^2\theta^2+\lambda\theta^2+2\lambda\theta\phi+\phi^2$$

$$\text{Variansi }(K) = u_2'(K)+u_1'(K)-\left(u_1'(K)\right)^2 = \lambda\theta(1+\theta)+\phi \qquad (11)$$

$$E(X(X-1)(X-2)) = u_3'(K) = \left.\frac{d^3G(s)}{ds^3}\right|_{s=1}$$

$$= \phi^3+3\lambda\theta\phi^2+3\lambda\theta^2\phi+3\lambda^2\theta^2\phi+3\lambda^2\theta^3+\lambda^3\theta^3+\lambda\theta^3$$

$$\text{Momen sentral ketiga }(K) = E\left(X-u_1'\right)^3 = \lambda\theta\left(1+3\theta+\theta^2\right)+\phi \qquad (12)$$

Untuk sampel yang kecil, persamaan (12) tidak berlaku dan sebagai gantinya ada hubungan $\phi = qu_1'$, di mana q merupakan proporsi peluang kecelakaan dari semua kecelakaan. Dari sini diperoleh hubungan :

$$\theta = \frac{u_2 - u_1'}{u_1'(1-q)} \tag{13}$$

$$\lambda = \frac{u_1'(1-q)}{\theta} \tag{14}$$

Dari mean, variansi dan momen sentral ketiga, diperoleh parameter λ, θ dan ϕ. Dari sini distribusi peluang ataupun distribusi frekuensi dapat dihitung. Ternyata distribusi "Pendek" juga sesuai sebagai distribusi kecelakaan lalu lintas jalan raya.

3. Kesimpulan

Model kecelakaan lalu lintas jalan raya berdasarkan Spells. Bila diamati kecelakaan terjadi di dalam Spells maka diperoleh Distribusi Panjang dan bila kecelakaan terjadi di dalam Spells maupun di luar Spells yang saling bebas maka diperoleh Distribusi Pendek.

Daftar Pustaka

[1] Fisher and Yates., 1953, "*Statistical Tables For Biological, Agricultural and Medical Research*". Oliver and Boyd, London.

[2] Kendall, M.G., and Stuart, A., 1969, "*The Advanced Theory of Statistics, Volume I*". Charles Griffin & Company Limited, London.

[3] Ashton, W.D., 1966, "*The Theory of Road Traffic Flow*". Methuen & Co Ltd., London.