J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 4, No.1, 39-42, Juli 2007

ISBN:1858-1382

Teorema Limit Pusat Linberg-Levy Pada Kasus Multivariate

Georgina M. Tinungki*

Abstrak

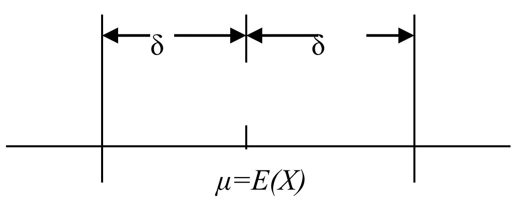
Jika kita berhadapan dengan keadaan yang mana dalam suatu fungsi padat peluang fungsi distribusinya diketahui dengan tepat, namun sesungguhnya sering kita hanya mengetahui sedikit sekali malahan tidak sama sekali tentang distribusi yang melatar belakangi sample. Dalam pendekatan statistika, apabila sebagian atau tidak ada keterangan tentang f.d. Teorema Limit Pusat (TPL) merupakan hasil yang utama dari semua bidang matematika, dan terapannya yang muncul dalam seluruh statistika yang bersifat teori maupun terapan. Teorema ini akan dibuktikan untuk kasus yang sederhana dan bentuk yang lebih umum.

Kata Kunci : *fungsi padat peluang, fungsi distribusi, matriks varian-kovarian, teorema limi pusat.*

1. Landasan Teori

Teorema limit pusat merupakan salah satu hasil statistika yang paling dipusat (sehingga paling penting), karena jangkauannya paling jauh baik dari segi teori maupun terapannya dan merupakan sumbangan moderen yang utama tidak hanya untuk statistika tetapi juga untuk semua matematika, kecantikan dan terapannya, yang dapat memudarkan hasil gabungan dari aljabar, analisis, topologi, dan matematika terapan klasik. Keberuntungan kita karena dapat mempelajari dalam bentuk modern, langsung tapi umum dalam angagapannya sehingga sederhana dalam penerapannya. Beberapa sifat kekonvergenan campuran (yakni konvergen dalam peluang dan distribusi campuran) yang melatar belakangi pembahasan ini.

Sebagai ilustrasi dapat terlihat pada gambar berikut



Misalkan $Z_1,\ldots..Z_n$ barisan peubah acak dengan distribusi bersama (untuk n≥1) didefinisikan pada ruang sample Ω yang sama. Misalkan Z peubah acak yang lain didefinikan pada ruang sampel yang sama. Yang dimaksud dengan Z_n menuju (atau konvergen) ke Z dapat terlihat pada definisi berikut ini:

* *Staf pengajar pada Jurusan Matematika F.MIPA Universitas Hasanuddin Makassar*
email: ina_matematika@yahoo.co.id

Definisi 1.

Z_n dikatakan menuju (atau konvergen) ke Z dengan peluang 1 jika $P\left[\lim_{n\to\infty} Z_n = Z\right] = 1$, ini disebut konvergen hampir pasti atau konvergen hampir dimana-mana atau konvergen kuat

Definisi 2.

Z_n dikatakan menuju (atau konvergen) ke Z dalam peluang $(Z_n \xrightarrow{p} Z)$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P(|Z_n - Z| > \varepsilon) = 0$$

(ini disebut konvergen stokastik, atau konvergen dalam ukuran atau konvergen lemah)

Teorema Limit Pusat

Misalkan $X_1, X_2, \ldots$ peubah acak bebas yang berhingga yang berdistribusi identik dengan $E(X_i) = \mu$ dan Var (X_1) = $\sigma^2 > 0$ (keduanya berhingga). Maka untuk semua z $-\infty < z < +\infty)$ jika n→ ∞,

$$P\left[\frac{(X_1-\mu)+\ldots+(X_n-\mu)}{\sqrt{n}\sigma} < z\right] \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy$$

Bukti :

Untuk pembuktian ini digunakan fungsi pembangkit momen, sehingga perlu dimisalkan bahwa fungsi ini ada. Tetapi, pada dasarnya bukti dari baris perbaris sama dan dapat digunakan dengan memakai fungsi kepadatan sebagai gantinya, karena pengandaian (anggapan) yang tertera pada teorema merupakan syarat yang cukup agar teorema berlaku, walaupun memerlukan anggapan agar keabsahan berlaku, sehingga diperoleh

$$\frac{\varphi_{(x_i-\mu)+\ldots+(x_n-\mu)}}{\sqrt{n}\sigma}(t) = \frac{\varphi_{(x_i-\mu)}}{\sqrt{n}\sigma}(t) + \ldots + \frac{\varphi_{(x_n-\mu)}}{\sqrt{n}\sigma}(t)$$

$$= \left[\varphi_{\frac{x_i-\mu)}{\sqrt{n}\mu}}(t)\right]^n$$

$$= \left[\varphi_{x_i-\mu}\left(\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right)\right]^n$$

$$= \left[1 + \frac{E(X_1-\mu)}{1!}\frac{t}{\sqrt{n}\sigma} + \frac{E(X_1-\mu)^2}{2!}\frac{t^2}{n\sigma^2} + o\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right)\right]^n$$

$$= \left[1 + \frac{1}{2}\frac{t^2}{n} + o\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right)\right]^n$$

$$= \left[1 + \frac{\frac{1}{2}t^2 + no\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right)}{n}\right]^n$$

$$\rightarrow e^{\frac{1}{2}t^2}, \quad \text{jika } n \rightarrow \infty$$

2. Pembahasan

Teorema TPL Linberg-Levy Multivariate

Misalkan $X_1, X_2, ...$ peubah acak p yang bebas dan berdistribusi identik, masing-masing dengan vector rataan $E(X_i) = \mu$ dan matriks variansi-kovariansi Σ. Maka limit distribusi dari :

$$\frac{(X_1 - \mu) + (X_2 - \mu) + ... + (X_n - \mu)}{\sqrt{n}}$$

adalah normal p-peubah acak $X = (X_1, ..., X_n)$ berdistribusi normal (multivariate) $N(\mu, \Sigma)$ dengan

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ . \\ . \\ \mu_n \end{bmatrix}$$

Suatu vector dengan *n* unsure bilangan real dan

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & .... & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & .... & \sigma_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & .... & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

adalah sembarang matriks definit positif pasti yang simetris berukuran *nxn* dengan unsur bilangan real bila [dimisalkan $x = (x_1, ..., x_n)'$]

$$f_x(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)}$$

Untuk semua vektor *x* yang berupa bilangan nyata, dengan rataan 0 dan matriks varian-kovarian yang sama Σ.

Syarat TLP Linberg.

Misalkan $X_1, X_2, ...$ peubah acak, X_i mempunyai fungsi distribusi F_i (.) dengan $E(X\ ) = \mu_i$ dan Var (X_i) = σ_i^2

Misalkan :

$$Y_n = \frac{(X_1 - \mu_1) + (X_2 - \mu_2) + ... + (X_n - \mu_n)}{(\sigma_1^2 + ... + \sigma_n^2)}$$

Syarat Linberg berlaku, jika untuk setiap t > 0 yang tetap, jika n → ∞

$$\frac{E(X_1^* - \mu_1)^2 + \ldots\ldots + E(X_n^* - \mu_n)^2}{\sigma_1^n + \ldots\ldots + \sigma_n^2} \rightarrow 0 \quad ; \text{ untuk i} = 1,2,\ldots\ldots$$

$$X_i^* = \begin{cases} 1, bila[X_i - \mu_i[> t(\sigma_1^2 + \ldots\ldots + \sigma_n^2))^{0.5} \\ 0 \end{cases}$$

(1) Jika syarat Lindeberg berlaku , maka $Y_n \xrightarrow{d} N(0,1)$

(2) Jika $Y_n \xrightarrow{d} N(0,1)$ dan

$$\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2 \rightarrow \infty,$$

$$\frac{\sigma_n^2}{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2} \rightarrow 0$$

maka syarat Lindeberg berlaku.

Syarat-syarat yang pada dasarnya perlu dan cukup agar limitnya berdistribusi normal untuk peubah acak bebas yang rataan dan variannya semuanya ada. (Dikatakan pada dasarnya karena jika limit dibagian (2) di langgar, limitnya masih berdistribusi normal tidak baku- yakni distribusi normal dengan varian yang tidak satu. Juga dalam keadaan rataan dan variannya tidak ada, hasil yang terkadang tetap berlaku jika $\sqrt{n}$ diganti dengan besaran lainnya.

Daftar Pustaka:

[1]. E.J. Dudewicz & S.N. Mishra, 1988, "*Modern Mathematical Statistics",* John Wiley & Sons, Ltd. Inc.

[2]. Robert Hogg & Craig, 1995, "*Introduction to Mathematical Statistics",* Printice Hall,fifth edition.