

# Persamaan Difusi Dua Dimensi yang Tidak Steady dengan Metode Elemen Hingga

Agustinus Ribal, Jeffry Kusuma<sup>†</sup>

## Abstrak

Dalam tulisan ini akan dibahas suatu solusi numerik persamaan difusi dua dimensi yang tidak steady dengan metode elemen hingga. Pertama-tama variasional statemen akan diturunkan dari persamaan pembangun, selanjutnya akan ditentukan persamaan elemen hingga Galerkin berdasarkan variasional statemennya. Dalam menentukan elemen matriksnya, akan digunakan 4-titik master elemen. Juga dalam perhitungan integral elemen akan digunakan kuadratur Gauss dengan 3 titik. Metode Crank–Nicolson digunakan untuk diskritisasi waktu.

**Kata Kunci :** *Metode elemen hingga, persamaan difusi, metode Crank-Nicolson.*

## 1. Pendahuluan

Dengan kemajuan teknologi komputer, metode elemen hingga mempunyai peranan yang sangat penting [9] dalam menyelesaikan masalah-masalah nyata secara numerik. Saat ini, metode elemen hingga adalah salah satu metode yang paling efektif dalam menyelesaikan berbagai masalah yang muncul dalam teknik perancangan, pengontrolan proses industri, dan penelitian-penelitian ilmiah. Metode ini digunakan untuk memperoleh nilai pendekatan dari masalah-masalah nilai batas [9]. Untuk menentukan solusi numerik dari sebuah masalah nilai batas yang terdefinisi dalam suatu domain  $\Omega$  menggunakan metode elemen hingga, maka akan dilakukan langkah-langkah sebagai berikut [6],[9]: (1) Mendiskritisasi domain  $\Omega$  ke dalam sejumlah elemen dengan  $N$  node, sedemikian sehingga  $\Omega = \bigcap_{e=1}^E \Omega_e$ ; (2) Mentransformasi masalah nilai batas ke persamaan elemen hingga; (3) Memperoleh matriks koefisien dari setiap elemen; (4) Menggabungkan setiap matriks elemen untuk membentuk matriks global; (5) Menyelesaikan persamaan matriks global yang merupakan sistem persamaan aljabar.

Penurunan persamaan elemen hingga akan didasarkan pada pendekatan residual terboboti karena pendekatan ini lebih umum dan serbaguna [9].

## 2. Persamaan Pembangun

Persamaan pembangun dari persamaan difusi dua dimensi yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah sebagai berikut

$$u_t = \nabla^2 u - u - 4e^{-t} \quad \text{dalam domain } \Omega \times I, \quad (1)$$

dengan syarat batas

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{pada } x = 0 \text{ dan } y = 0, \quad (2)$$

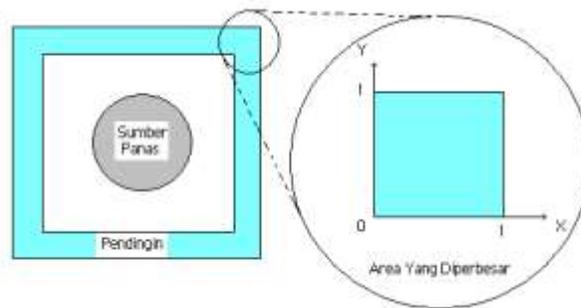
$$\frac{\partial u}{\partial n} = 2e^{-t} \quad \text{pada } x = 1 \text{ dan } y = 1,$$

<sup>†</sup> Jurusan Matematika Universitas Hasanuddin Makassar

serta syarat awal

$$u = 1 + x^2 + y^2 \quad \text{pada saat } t = 0, \quad (3)$$

dimana  $I$  menyatakan interval waktu  $[0, T]$  dan  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  adalah daerah domain. Persoalan demikian sering muncul dalam permasalahan teknik katakanlah proses pendinginan mesin dari ruang pembakaran yang berbentuk persegi ataupun persegi panjang. Sebagaimana yang telah diketahui, persamaan panas merambat dengan proses difusi. Rancangan teknologi pendinginan sering dibuat dengan melibatkan material lainnya dengan bentuk luar persegi ataupun persegi panjang sebagaimana pada gambar di bawah ini.



Gambar 1. Ilustrasi persoalan pendinginan pada mesin.

Bila ukuran-ukuran fisiknya dibuat Nondimensional, maka akan diperoleh persamaan differensial parsial yang memenuhi persamaan (1) beserta syarat batas (2) dan syarat awal (3) di atas.

### 3. Variasional Statemen

Dengan mendasarkan pada pendekatan residual terboboti, maka variasional statemen untuk persamaan pembangun pada bagian sebelumnya akan ditentukan sebagai berikut.

Diketahui bahwa residual dari persamaan pembangun adalah

$$r(t) = u_t - \nabla^2 u + u + 4e^{-t} \quad (4)$$

maka total weight residual (TWR) adalah

$$\begin{aligned} TWR &= \int_{\Omega} (u_t - \nabla^2 u + u + 4e^{-t}) v \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} u_t v - v \nabla^2 u + uv + 4ve^{-t} \, d\Omega \end{aligned} \quad (5)$$

Dengan menggunakan sifat turunan, maka persamaan (5) menjadi

$$TWR = \int_{\Omega} u_t v + \nabla u \cdot \nabla v + uv + 4ve^{-t} \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot (v \nabla u) \, d\Omega \quad (6)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan teorema divergensi yaitu

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (vk \nabla T) d\Omega = \int_{\partial\Omega} vk \frac{\partial T}{\partial n} ds,$$

maka persamaan (6) menjadi:

$$\begin{aligned} TWR &= \int_{\Omega} u_t v + \nabla u \cdot \nabla v + uv + 4ve^{-t} d\Omega - \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds \\ &= \int_{\Omega} u_t v + \nabla u \cdot \nabla v + uv + 4ve^{-t} d\Omega - \int_0^1 2v(1, y)e^{-t} dy - \int_0^1 2v(x, 1)e^{-t} dx \end{aligned} \quad (7)$$

Dengan demikian, maka variasional statemennya adalah:

Tentukan  $u = u(\mathbf{x}, t) \in H^1(\Omega)$  sedemikian sehingga  $\forall t \in I$ ,  $u = 1 + x^2 + y^2$  pada saat  $t = 0$  dan

$$\int_{\Omega} u_t v + \nabla u \cdot \nabla v + uv d\Omega = - \int_{\Omega} 4ve^{-t} d\Omega + \int_0^1 2v(1, y)e^{-t} dy + \int_0^1 2v(x, 1)e^{-t} dx, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \quad (8)$$

#### 4. Persamaan Elemen Hingga Galerkin

Dengan memilih  $v = \phi_i$ , maka variasional statemen yang telah diperoleh pada bagian sebelumnya menjadi:

$$\int_{\Omega} u_t \phi_i + \nabla u \cdot \nabla \phi_i + u \phi_i d\Omega = - \int_{\Omega} 4\phi_i e^{-t} d\Omega + \int_0^1 2\phi_i(1, y)e^{-t} dy + \int_0^1 2\phi_i(x, 1)e^{-t} dx \quad (9)$$

Juga dengan menggunakan pendekatan  $u(\mathbf{x}, t)$  pada saat  $t$  sebagai:

$$u_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^N u_j(t) \phi_j(\mathbf{x}) \quad (10)$$

Untuk alasan sederhana,  $\phi_j(\mathbf{x})$  akan ditulis sebagai  $\phi_j$ .

Maka persamaan (9) menjadi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N \phi_j \phi_i \frac{du_j(t)}{dt} + \nabla \left( \sum_{j=1}^N u_j(t) \phi_j \right) \cdot \nabla \phi_i + \sum_{j=1}^N u_j(t) \phi_j \phi_i d\Omega \\ = - \int_{\Omega} 4\phi_i e^{-t} d\Omega + \int_0^1 2\phi_i(1, y)e^{-t} dy + \int_0^1 2\phi_i(x, 1)e^{-t} dx \end{aligned}$$

atau

$$\sum_{j=1}^N \left[ \int_{\Omega} \phi_j \phi_i d\Omega \right] \frac{du_j(t)}{dt} + \sum_{j=1}^N \left[ \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i + \phi_j \phi_i d\Omega \right] u_j(t)$$

$$= -\int_{\Omega} 4\phi_i e^{-t} d\Omega + \int_0^1 2\phi_i(1, y)e^{-t} dy + \int_0^1 2\phi_i(x, 1)e^{-t} dx$$

Sehingga diperoleh

$$M\dot{u} + Au = F \quad (11)$$

dimana

$$M = \{m_{ij}\}_{N \times N} \text{ dengan } m_{ij} = \int_{\Omega} \phi_j \phi_i d\Omega,$$

$$A = \{a_{ij}\}_{N \times N} \text{ dengan } a_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i + \phi_j \phi_i d\Omega,$$

$$F = \{f_i\}_{N \times 1}$$

dengan

$$f_i = -\int_{\Omega} 4\phi_i e^{-t} d\Omega + \int_0^1 2\phi_i(1, y)e^{-t} dy + \int_0^1 2\phi_i(x, 1)e^{-t} dx.$$

#### a. Metode Crank–Nicolson

Untuk diskritisasi waktu, maka metode Crank – Nicolson akan diterapkan pada masalah ini sebagai berikut.

Dari persamaan (11) diperoleh

$$M\dot{u} + Au = F$$

Sehingga

$$M\dot{u}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) + Au\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = F\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)$$

Diketahui bahwa:

$$\dot{u}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} = \frac{u_{r+1} - u_r}{\Delta t}$$

$$u\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) = \frac{u(t + \Delta t) + u(t)}{2} = \frac{u_{r+1} + u_r}{2}$$

Maka diperoleh,

$$M\left(\frac{u_{r+1} - u_r}{\Delta t}\right) + A\left(\frac{u_{r+1} + u_r}{2}\right) = F_{r+\frac{1}{2}}$$

$$M(u_{r+1} - u_r) + A\frac{\Delta t}{2}(u_{r+1} + u_r) = \Delta t F_{r+\frac{1}{2}}$$

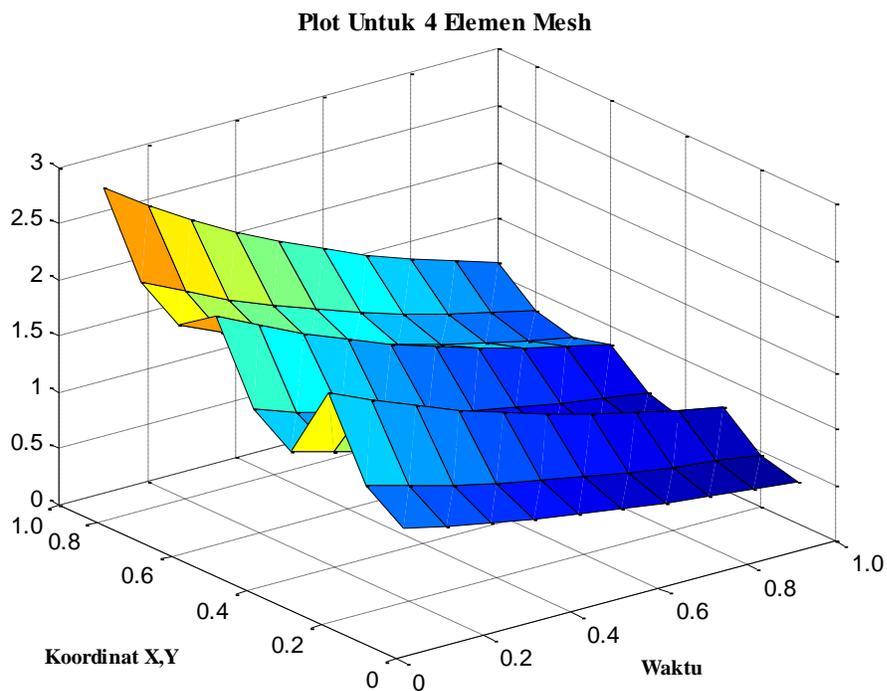
$$\left(M + \frac{\Delta t}{2}A\right)u_{r+1} - \left(M - \frac{\Delta t}{2}A\right)u_r = \Delta t F_{r+\frac{1}{2}}$$

Sehingga persamaan bedanya adalah,

$$\left(M + \frac{\Delta t}{2}A\right)u_{r+1} = \left(M - \frac{\Delta t}{2}A\right)u_r + \Delta t F_{r+\frac{1}{2}} \quad (12)$$

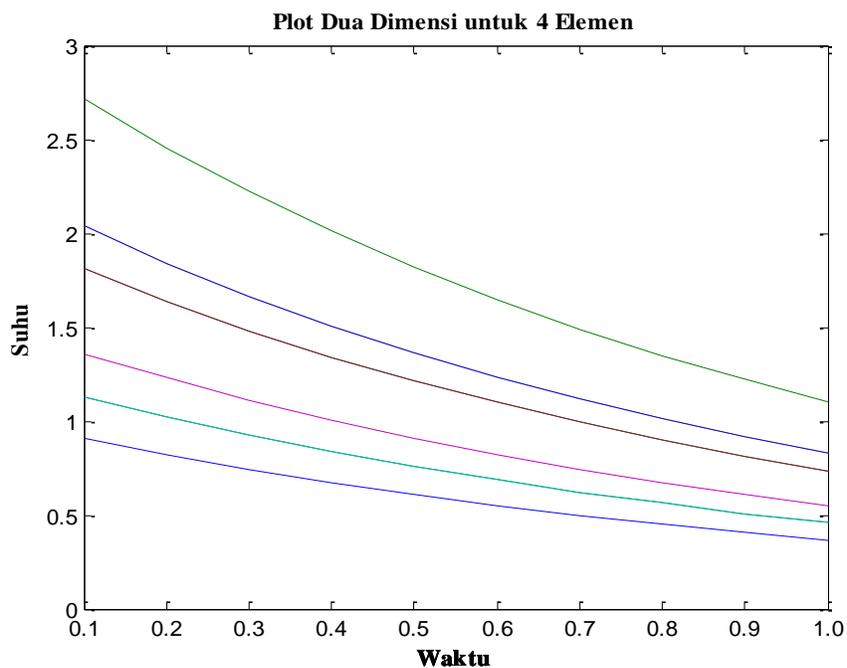
**b. Hasil Numerik**

Dengan menggunakan persamaan beda pada persamaan (12), maka diperoleh hasil numerik untuk 4 elemen, 16 elemen dan 64 elemen sebagai berikut.

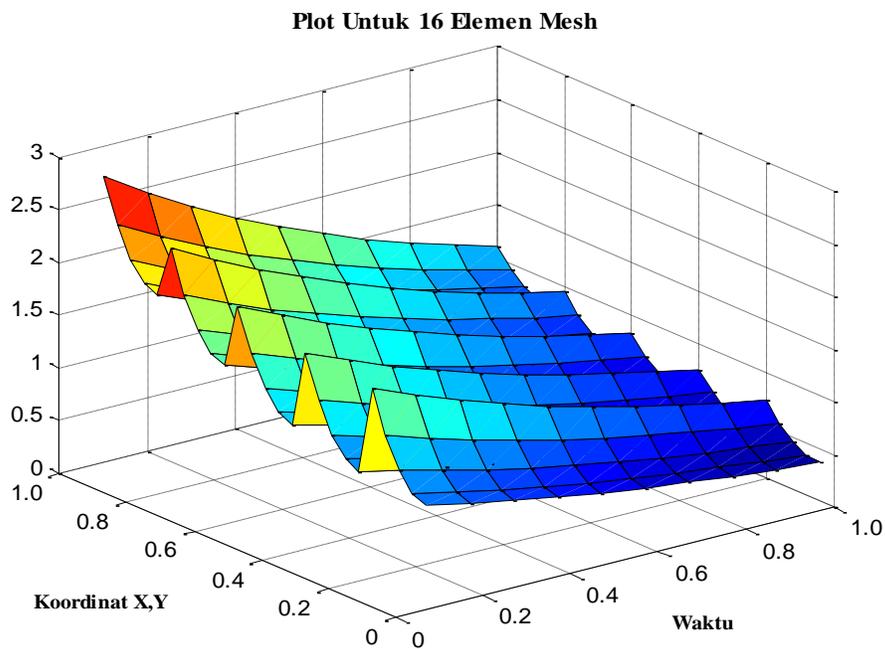


Gambar 2. Plot tiga dimensi untuk empat elemen mesh.

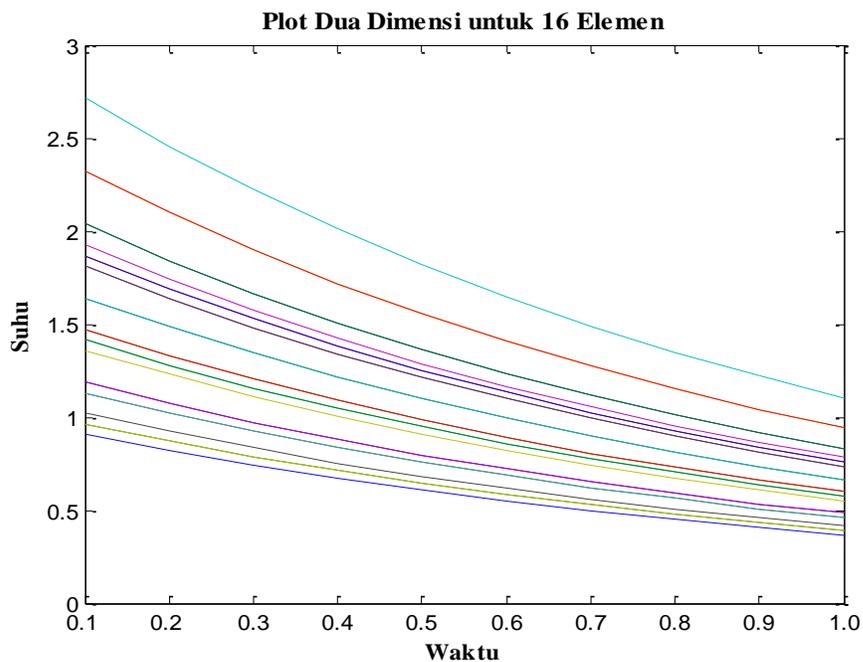
Dalam tinjauan dua dimensi, maka akan diperoleh sebagai berikut.



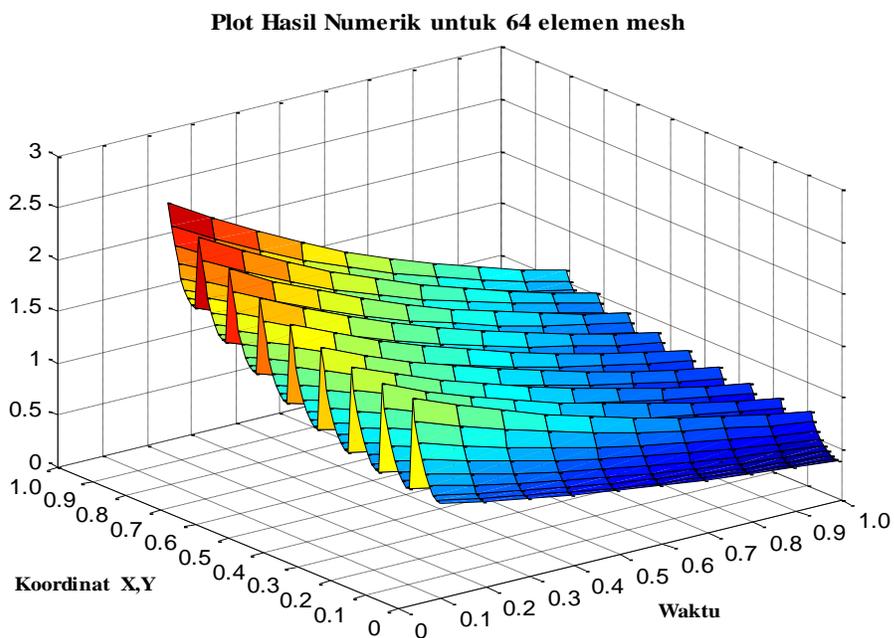
Gambar 3. Plot dua dimensi untuk empat elemen.



Gambar 4. Plot tiga dimensi untuk 16 elemen mesh.  
Dalam tinjauan dua dimensi, maka akan diperoleh plot seperti dalam Gambar 5 berikut.

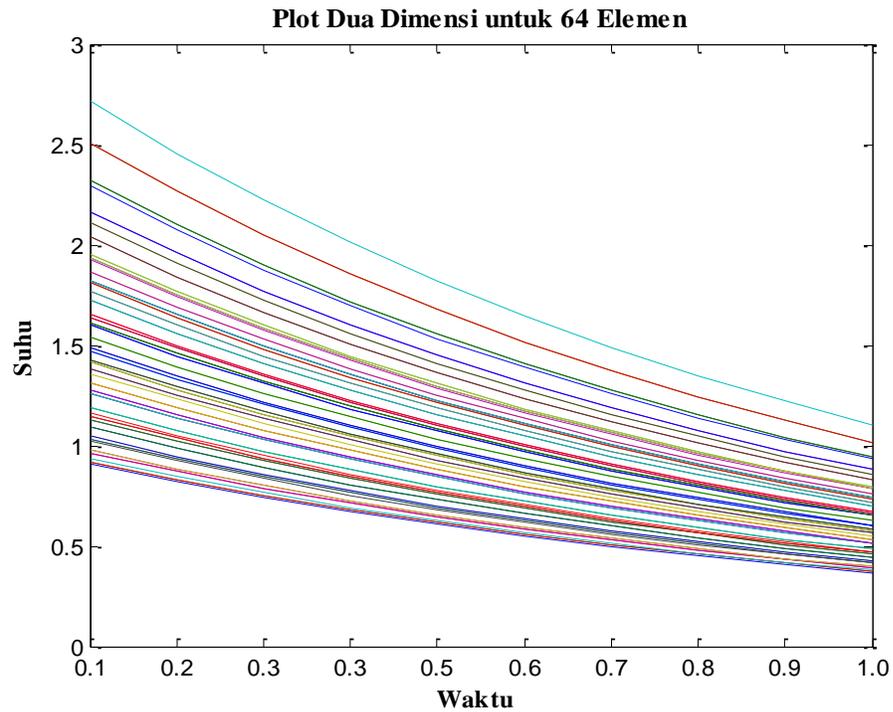


Gambar 5. Plot dua dimensi untuk 16 elemen mesh.



Gambar 6. Plot tiga dimensi untuk 64 elemen mesh.

Dalam tinjauan dua dimensi, maka akan diperoleh gambar sebagai berikut.



Gambar 6. Plot tiga dimensi untuk 64 elemen mesh.

## 5. Kesimpulan

Dari hasil perhitungan numerik di atas, dapat disimpulkan bahwa dengan berjalannya waktu maka suhu atau temperatur pada mesin akan menurun.

## Daftar Pustaka

1. Allievi, A., and Bermejo, R. 2000. *Finite Element Modified Method of Characteristics for the Navier-Stokes Equations*. Int. J. Numer. Meth. Fluids, 32, 439–464.
2. Cuvelier, C., Segal, A., and Steenhoven, A.A.V. 1986. *Finite Element Methods and Navier-Stokes Equations*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
3. Girault, V., Raviart, P-A. 1986. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations: Theory and Algorithms*. Berlin: Springer-Verlag.
4. Holman, T.P. 1986. *Heat Transfer*. New York: McGraw-Hill.

5. Incropera, F.P., and Dewitt, D.P. 1996. *Introduction to Heat Transfer*, 3th ed. New York: Wiley.
6. Lewis, R.W. 1996. *The Finite Element Method in Heat Transfer Analysis*. New York: Wiley.
7. Richter, G.R. 1994. *An Explicit Finite Element Method for the Wave Equation*. Applied Numerical Mathematics, 16, 65–80.
8. Weinan E, and Liu, J.G. 2000. *Gauge Finite Element Method for Incompressible Flows*. Int. J. Numer. Meth. Fluids, 34, 701–710.
9. Wu, Y.H., and Wiwatanapataphee, B. 2006. *Finite Element Method and Applications*. Bangkok: Misterkopy Publishing Company.