ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 5, No.1, 52-57, Juli 2008

Gelanggang Evalusi dan Sifat-sifatnya

Amir Kamal Amir[†]

Abstrak

Sifat-sifat gelanggang evaluasi beserta pembuktiannya sudah ada dibeberapa literatur seperti misalnya pada McConnel & Robson (1987). Namun demikian penyajiannya belum terurai dengan jelas sehingga alur pembuktian masih sulit dimengerti. Tulisan ini akan menguraikan secara terperinci dan sistematik dengan bahasa yang mudah dimengerti sifat-sifat dan buktinya tersebut. Sifat-sifat yang akan dibahas antara lain adalah sifat-sifat yang menghubungkan gelanggang evaluasi dengan lapangan pecahan, gelanggang lokal, gelanggang Noetherian, sifat terurut total, dan terintegral tutup.

Kata Kunci : *Lapangan pecahan, gelanggang evaluasi, lokal, Noetherian, terurut total, terintegral tutup.*

1. Pendahuluan

Suatu subgelanggang *R* dari lapangan *K* adalah ***Gelanggang Evaluasi*** dari *K* jika setiap elemen tak nol $\alpha \in K$, maka salah satu dari α atau α^{-1} berada dalam *R*.

Beberapa contoh:

1. Misalkan $K = \mathbf{Q}$, himpunan bilangan rasioanal, dengan *p* adalah bilangan prima tertentu. Pilih *R* adalah himpunan semua bilangan rasioanal yang berbentuk $p^r m/n$, dimana $r \geq 0$ dan *p* tidak membagi *m* dan tidak membagi *n*.
2. Misalkan $K = k(x)$, dimana *k* adalah suatu lapangan, dan misalkan *R* adalah himpunan semua fungsi-fungsi rasional $f/g \in k(x)$ sedemikian sehingga $\deg f \leq \deg g$.

Sifat-sifat dari gelanggang ini sudah banyak diturunkan dalam literatur seperti yang disajikan pada McConnel & Robson (1987). Namun demikian penyajian pembuktian dari sifat-sifat tersebut belum terurai dengan jelas sehinga alur pembuktian masih sulit dimengerti. Papa paper ini disajikan bukti yang lebih terperinci menggunakan bahasa yang sederhana sehingga alur pembuktian bisa diikuti dari tahap ke tahap.

2. Beberapa Pengertian dan Notasi

Gelanggang Lokal

Dalam ilmu Matematika, lebih khusus dalam aljabar abstrak, suatu gelanggang *R* adalah suatu ***Gelanggang Lokal*** jika gelanggang tersebut memiliki salah satu dari sifat-sifat yang saling ekuivalen berikut ini:

- *R* mempunyai maksimal ideal kiri yang tunggal
- *R* mempunyai maksimal ideal kanan yang tunggal

[†] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar*

- Identitas perkalian tidak sama dengan identitas penjumlahan dan penjumlahan sembarang dua elemen bukan unit dalam *R* akan menghasilkan elemen bukan unit.
- Identitas perkalian tidak sama dengan identitas penjumlahan dan jika *x* adalah sembarang elemen dari *R*, maka *x* atau $1 - x$ adalah elemen unit.

Sifat ketiga di atas mengatakan bahwa, himpunan elemen-elemen bukan unit dalam suatu Gelanggang Lokal membentuk suatu **ideal.**
Sebagai contoh, semua lapangan merupakan Gelanggang Lokal, karena hanya {0} yang merupakan ideal maksimal dalam gelanggang ini.

Daerah Integral

Suatu ***Daerah Integral*** adalah suatu gelanggang komutatif dengan identitas terhadap penjumlahan adalah 0 dan identitas terhadap perkalian adalah 1 sedemikian sehingga identitas penjumlahan tidak sama dengan identitas perkalian, dimana perkalaian sembarang dua anggota yang tidak nol selalu menghasilkan anggota yang tidak nol pula. Atau dengan kata lain, tidak ada anggota yang merupakan pembagi nol. Sebagai contoh, gelanggang dari bilangan-bilangan bulat adalah daerah integral.

Lebih lanjut, suatu daerah integral dimana setiap idealnya merupakan ideal utama, yaitu idealnya dapat dibangun oleh satu elemen saja, disebut ***Daerah Ideal Utama*** (*Principal Ideal Domain*, PID). Sebagai contoh, untuk *K* adalah lapangan, maka *K*[*x*], gelanggang dari polinomial-polinomial dalam satu variabel dengan koefisien-koefisien ada dalam *K*, merupakan Daerah Ideal Utama.

Lapangan dari Pecahan (*Field of Fractions*)

Setiap daerah integral dapat dijadikan sebagai bahan pembentukan sebuah **lapangan dari pecahan** (**Lapangan Pecahan** untuk singkatnya). Anggota-anggota dari Lapangan Pecahan dari suatu daerah integral *R* berbebtuk *a/b* dengan *a* dan *b* dalam *R*. Lapangan Pecahan dari gelanggang *R* dinotasikan sebagai ***Quot*(*R*)** atau ***Frac*(*R*).**
Lapangan Pecahan, *Quot*(*R*), dari daerah integral *R* dapat dikonstruksi sebagai berikut: *Quot*(*R*) adalah himpunan dari kelas-kelas ekuivalensi dari pasangan [*n,d*], dimana *n* dan *d* adalah elemen-elemen dari *R* dan *d* tidak nol, dan relasi ekuivalensinya adalah: [*n, d*] ekuivalen dengan [*m, b*] jika dan hanya jika $nb = md$ (kelas ekuivalensi [*n,d*] dapat dipandang sebagai pecahan *n/d*). Penjumlahan dari kelas-kelas ekuivalensi [*n.d*] dan [*m,b*] adalah kelas ekuivalensi [$nb + md$, *db*] dan perkaliannya adalah kelas ekuivalensi [*mn, db*].
Beberapa contoh :

1. Lapangan pecahan dari gelanggang bilangan bulat adalah bilangan rational, $Q := Quot(Z)$.
2. Misalkan $R := \{a + bi \mid a, b \in Z\}$ adalah gelanggang dari bilangan-bilangan bulat Gauss, maka $Quot(R) = \{c + di \mid c, d \in Q\}$, lapangan dari bilangan-bilangan rasional Gauss.

Integral Penutup (*Integral Closure*)

Misalkan *S* adalah sebuah daerah integral dengan *R* adalah suatu subgelanggang dari *S*. Suatu elemen *s* dari *S* dikatakan ***integral*** atas *R* jika *s* adalah merupakan suatu akar dari suatu polinomial monik dengan koefisien-koefisien dalam *R*.

Dapat ditunjukkan bahwa himpunan semua elemen-elemen dari *S* yang merupakan elemen integral atas *R* membentuk subgelanggang dari *S* yang memuat *R*. Gelanggang ini selanjutnya disebut ***integral penutup*** dari *R*. Jika setiap elemen dari *S* yang merupakan elemen integral atas *R* sudah berada di dalam *R*, maka *R* disebut ***Terintegral tutup*** (*integrally Closed*) dalam *S*.

Untuk contoh, himpunan bilangan-bilangan bulat $\mathbf{Z}$ adalah terintegral tutup. Integral penutup dari $\mathbf{Z}$ dalam bilangan kompleks $\mathbf{C}$ adalah himpunan semua bilangan-bilangan bulat aljabar.

Gelanggang Noetherian

Suatu ***Gelanggang Noetherian*** adalah suatu gelanggang yang memenuhi kondisi rantai membesar pada ideal-idealnya. Lebih jelasnya:

- Suatu gelanggang adalah ***Noetherian-kiri*** jika memenuhi kondisi rantai membesar pada ideal-ideal kirinya.
- Suatu gelanggang adalah ***Noetherian-kanan*** jika memenuhi kondisi rantai membesar pada ideal-ideal kanannya.
- Suatu gelanggang adalah ***Noetherian*** jika memenuhi Noetherian-kanan dan Noetherian-kiri.

Ada definisi yang lain yang ekuivalen dengan definisi Noetherian-kiri, yaitu :

Setiap ideal kiri *I* dari *R* adalah dibangun berhingga, dalam arti ada elemen-elemen $a_1, ..., a_n$ dalam *I* sedemikian sehingga $I = Ra_1 + ... + Ra_n$.

3. Sifat-sifat dari Gelanggang Evaluasi

Mulai dari sini sampai akhir, paper ini dimisalkan bahwa *V* adalah Gelanggang Penilaian dari *K*.

<u>**Sifat-sifat dari Gelanggang Evaluasi.**</u>

1. Lapangan Pecahan dari *V* adalah *K*.
   Bukti:
   Misalkan *K'* adalah lapangan pecahan dari *V*. Akan ditunjukkan bahwa *K'* = *K*.
   Ambil $\alpha \in K'$, maka karena *K'* adalah lapangan pecahan , maka $\alpha = \frac{a}{b}$, dimana $a, b \in V$.
   Karena $V \subseteq K$ dan K adalah lapangan maka $\alpha = \frac{a}{b} \in K$. Langkah ini membuktikan bahwa $K' \subseteq K$.
   Selanjutnya, ambil $\alpha \in K$, dimana α tidak nol, maka $\alpha \in V$ atau $\alpha^{-1} \in V$. Jika $\alpha \in V$, maka $\alpha = \frac{\alpha}{1} \in K'$, sedangkan jika $\alpha^{-1} \in V$, maka $\alpha = \frac{1}{\alpha^{-1}} \in K'$. Langkah ini membuktikan bahwa $K' \supseteq K$ yang sekaligus melengkapi pembuktian sifat ini.
2. Sembarang subgelanggang dari *K* yang memuat *V* adalah suatu Gelanggang Evaluasi dari *K*
   Bukti:
   Misalkan *V'* adalah subgelanggang dari *K* yang memuat *V*. Akan ditunjukkan bahwa *V'* adalah suatu gelangang penilaian dari *K*. Ambil $\alpha \in K$, dimana α tidak nol. Karena *V* adalah gelanggang penilaina dari *K*, maka $\alpha \in V$ atau $\alpha^{-1} \in V$. Selanjutnya, karena *V'* memuat *V*, maka $\alpha \in V'$ atau $\alpha^{-1} \in V'$.
3. *V* adalah gelanggang lokal.
   Bukti:

Kita akan tunjukkan bahwa himpunan *M* dari anggota-anggota yang bukan anggota satuan dari *V* adalah suatu Ideal. Untuk membuktikan bahwa *M* adalah ideal akan ditunjukkan dua hal, yaitu (1). $a,b \in M$, $maka\ a+b \in M$ dan (2). $r \in V$ dan $a \in M$, maka $ra \in M$.
Jika *a* dan *b* adalah anggota-anggota satuan tidak nol, maka salah satu dari *a/b* atau *b/a* yang berada di *V*, karena *V* adalah gelanggang evaluasi dari *K*. Jika $\frac{a}{b} \in V$, maka $a+b=b(1+\frac{a}{b}) \in M$ (sebab jika $b(1+\frac{a}{b}) \notin M$ berarti $b(1+\frac{a}{b})$ adalah anggota satuan dari *V*, yang akan menyebabkan *b* anggota satuan juga. Hal ini tidak mungkin karena dari awal sudah diasumsikan bahwa *b* bukan anggota satuan). Serupa dengan itu, Jika $\frac{b}{a} \in V$, maka $a+b \in M$. Selanjutnya, jika $r \in V$ dan $a \in M$, maka $ra \in M$, kalau tidak demikian maka *a* akan merupakan anggota unit yang akan bertentangan dengan asumsi semula.

4. *V* adalah terintegral tutup
   Bukti:
   Misalkan α adalah suatu elemen tak nol dari *K*, dengan α intergral terhadap *V*. Untuk menunjukkan bahwa *V* adalah terintegral tutup, akan ditunjukkan bahwa α berada dalam *V*.
   Karena *V* adalah gelanggang evaluasi dari *K*, maka $\alpha \in V$ atau $\alpha^{-1} \in V$. Jika $\alpha \in V$, maka pembuktian sudah selesai. Namun, jika $\alpha^{-1} \in V$, maka terlebih dahulu kita memperhatikan bahwa α adalah integral terhadap *V*. Dengan demikian terdapat suatu persamaan yang berbetuk
   $$\alpha^n + c_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + c_1\alpha + c_0 = 0 .$$
   Dengan $c_i \in V$. Jika persamaan ini dikalikan dengan $\alpha^{-(n-1)}$, maka kita akan memperoleh
   $$\alpha = -c_{n-1} - c_{n-2}\alpha^{-1} - \cdots - c_1\alpha^{-(n-2)} - c_0\alpha^{-(n-1)} .$$
   Karena c_i dan α^{-1} berada dalam V, maka disimpulkan bahwa
   $$\alpha = -c_{n-1} - c_{n-2}\alpha^{-1} - \cdots - c_1\alpha^{-(n-2)} - c_0\alpha^{-(n-1)} \in V .$$
5. Jika *I* dan *J* adalah ideal-ideal dari *V*, maka salah satu dari $I \subseteq J$ atau $J \subseteq I$ benar. Sehingga ideal-ideal dari *V* terurut total oleh urutan himpunan bagian.
   Bukti:
   Untuk membuktikan ini, akan ditunjukkan bahwa, jika *I* tidak termuat dalam *J*, maka $J \subseteq I$.
   Misalkan *I* tidak termuat dalam *J*, pilih anggota $a \in I \setminus J$ (dari sini diketahui $a \neq 0$). Selanjutnya, untuk menunjukkan bahwa $J \subseteq I$, akan ditunjukkan bahwa, jika $b \in J$, maka $b \in I$. Jika $b = 0$, maka bukti sudah selesai. Sekarang asumsikan bahwa $b \neq 0$. Karena V adalah gelanggang evaluasi, maka $b/a \in V$ atau $a/b \in V$. Namun demikian dipastikan $b/a \in V$, karena apabila $a/b \in V$, akan diperoleh $a = (a/b)b \in J$ yang akan berakibat terjadinya kontradiksi. Oleh karena itu disimpulkan $b = (b/a)a \in I$.

6. Kebalikan dari 5, misalkan *V* adalah daerah integral dengan lapangan pecahan *K*. Jika ideal-ideal dari *V* terurut total oleh urutan himpunan bagian, maka *V* adalah sebuah gelanggang evaluasi.

Bukti:
Jika α adalah elemen taknol dari *K*, maka $\alpha = (a/b)$ dengan *a* dan *b* elemen-elemen taknol dari *V* (*K* adalah lapangan pecahan dari *V*). Dengan hipotesis bahwa ideal-ideal dari *V* terurut total oleh urutan himpunan bagian, maka diperoleh $< a > \subseteq < b >$ atau $< b > \subseteq < a >$. Jika $< a > \subseteq < b >$, maka $a = b^n$ untuk suatu *n*. Dari sini diketahui $a/b = b^{n-1} \in V$. Namun, jika $< b > \subseteq < a >$, maka dengan cara yang analog diperoleh $b/a \in V$.

7. Jika *V* adalah gelanggang penilaian Noetherian, maka *V* adalah suatu Daerah Ideal Utama (PID). Lebih lanjut, untuk suatu $p \in V$, setiap ideal berbentuk $< p^m >,\ m \geq 0$.
   Bukti:
   Karena *V* adalah Noetherian, suatu ideal *I* dari *V* adalah dibangun berhingga, katakanlah dibangun oleh $a_1, \cdots, a_n$. Dengan sifat 5, kita dapat mengatur kembali indeks dari a_i sedemikian sehingga $< a_1 > \subseteq < a_2 > \subseteq \cdots \subseteq < a_n >$. Tetapi itu berarti $I \subseteq < a_n > \subseteq I$, sehingga $I = < a_n >$.

8. Let *R* adalah sebuah subgelanggang dari lapangan *K*. Integral penutup $\overline{R}$ dari R dalam *K* adalah irisan dari semua gelanggang-gelanggang evaluasi *V* dari *K* sedemikian sehingga $V \supseteq R$.
   Untuk pembuktian sifat ini kita membutuhkan teorema berikut ini. Bukti dari teorema ini disajikan dengan lengkap pada [...]

   Teorema 1.
   Misalkan *R* adalah suatu subgelanggang dari lapangan *K*, dan $h : R \to C$ adalah suatu homomorfisma gelanggang dari *R* ke suatu lapangan aljabar tertutup *C*, maka maka *h* mempunyai ekstensi maksimal $(V, \overline{h})$. Dengan kata lain, *V* adalah subgelanggang dari *K* yang memuat *R*, $\overline{h}$ adalah suatu ektensi dari *h*, dan tidak ada ektensi ke subgelanggang yang lebih besar. Lebih lanjut, untuk sembarang maksimal ekstension, *V* adalah suatu gelanggang evaluasi dari *K*.

   Bukti sifat 8:
   Jika $a \in \overline{R}$, maka a adalah integral atas *R*. Dari sini, a integral atas sembarang gelanggang penilaian $V \supseteq R$. Tetapi karena *V* terintegral tutup maka dengan sifat 4, diperoleh $a \in V$. Uraian di atas membuktikan bahwa integral penutup $\overline{R}$ adalah himpunan bagian dari irisan dari semua gelanggang-gelanggang penilaian *V* dari *K*.
   Kebalikannya, misalkan a anggota irisan semua gelanggang-gelanggang evaluasi *V* dari *K*. Kemudian andaikan $a \notin \overline{R}$, maka a tidak berada pada gelanggang $R' = R[a^{-1}]$.(karena jika *a* berada dalam *R'* atau a merupakan polinomial dari a^{-1}, maka kita dapat mengalikan polinomial tersebut dengan *a* berpangkat tertentu untuk mendapatkan polinomila monik yang dipennuhi oleh *a*, yang menyebabkan a merupakan anggota $\overline{R}$). Dengan demikian, a^{-1} bukan anggota unit dari *R'*. (karena jika $ba^{-1} = 1$ dengan $b \in R'$, maka $a = a1 = aa^{-1}b = b \in R'$, akan terjadi kontradiksi). Oleh karena itu, a^{-1} masuk ke suatu

maksimal ideal *M'* dari *R'*. Misalkan *C* adalah penutup aljabar dari lapangan *k = R'/M'*, dan misalkan *h* adalah komposisi dari pemetaan kanonik $R' \to R'/M' = k$ dan inklusi $k \to C$. Dengan teorema di atas, *h* mempunyai maksimal ekstension ke $\overline{h}: V \to C$ untuk beberapa gelanggang evaluasi *V* dari *K* yang memuat $R' \supseteq R$. Sekarang $\overline{h}(a^{-1}) = h(a^{-1})$ karena $a^{-1} \in M' \subseteq R$, dan $h(a^{-1}) = 0$ yang disebabkan oleh defenisi dari *h*. Sebagai kosekuensinya $a \notin V$, karena jika $a \in V$, maka

$$1 = \overline{h}(1) = \overline{h}(aa^{-1}) = \overline{h}(a)\overline{h}(aa^{-1}) = 0,$$

Terjadi suatu kontradiksi.

9. Misalkan R adalah suatu daerah integral dengan lapangan pecahan K, maka R adalah terintegral tutup jika dan hanya jika $R = \bigcap_{\alpha} V_{\alpha}$, yaitu irisan dari beberapa (tidak harus semua) gelanggang evaluasi dari K.
Bukti:
Bukti dari kanan ke kiri mengikut dari sifat 8.
Untuk bukti dari kanan ke kiri. Karena setiap V_{α} adalah terintegral tertutup maka dengan sifat 4 diperoleh, *R* juga terintegral tutup. □

4. Kesimpulan

Dari pemaparan di atas dapat ditarik beberapa kesimpulan:
1. Lapangan pecahan dari suatu gelanggang evaluasi sama dengan lapangannya sendiri.
2. Gelanggang evaluasi akan selalu juga merupakan gelanggang lokal.
3. Ideal-ideal dari suatu gelanggang evaluasi dapat diurutkan dengan menggunakan urutan himpunan bagian. Begitu juga sebaliknya, jika ideal-ideal dari suatu gelanggang dapat diurutkan, maka gelanggang tesebut adalah gelanggang evalusi.
4. Jika suatu gelanggang sekaligus merupakan gelanggang evaluasi dan Noetherian, maka gelanggang tersebut merupakan daerah ideal utama.

Daftar Pustaka

1. McConnel, J.C., and Robson, J.C., *Noncommutative Noetherian Rings*, John Wiley & Sons, 1987.

2. Fraleigh, J.B., *A First Course in Abstract Algebra*, Addison-Wesley, 1994.

3. Lam, T.Y., *Lectures on Modules and Rings*, Springer-Verlag, 1999.

4. ________, *A First Course in Noncommutative Rings* , Springer-Verlag, 1991.

5. Roman, S., *Advanced Linear Algebra*. Springer-Verlag, 1992.

6. Wisbauer, R., *Foundation of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach Science, 1991.

7. http://www.math.uiuc.edu/~r-ash/ComAlg/ComAlg3.pdf.