J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 5, No.2, 76-85, Januari 2009

ISBN:1858-1382

Analisis Kestabilan Model Populasi Mangsa Pemangsa dengan Pemanenan dan Waktu Tunda Melalui Pendekatan Bentuk $x(t-\tau) \cong x(t) - \tau \dfrac{dx}{dt}$

Syamsuddin Toaha[†]

Abstrak

Dalam tulisan ini dibahas model populasi mangsa pemangsa dengan pemanenan usaha konstan dan waktu tunda. Bentuk $x(t-\tau)$ yang merupakan pengaruh waktu tunda pada model didekati oleh bentuk $x(t) - \tau \dfrac{dx}{dt}$ dengan menggunakan deret Taylor. Dengan pendekatan itu, model tidak lagi mengandung bentuk $x(t-\tau)$ tetapi tetap bergantung pada waktu tunda. Model yang dihasilkan selanjutnya dianalisis kestabilannya dengan menggunakan nilai eigen. Untuk model tanpa pemanenan, diperoleh suatu titik keseimbangan yang positif dan stabil untuk $\tau = 0$. Untuk $\tau > 0$, titik keseimbangan mungkin tetap stabil dan mungkin juga menjadi tidak stabil. Untuk model yang melibatkan pemanenan, mungkin diperoleh suatu titik keseimbangan yang positif asalkan nilai usaha pemanenan dikontrol dan titik keseimbangan yang terhasil juga stabil untuk $\tau = 0$. Sementara jika $\tau > 0$, titik keseimbangan mungkin tetap stabil dan mungkin juga menjadi tidak stabil. Keberadaan waktu tunda pada model mangsa pemangsa mungkin mempengaruhi kestabilan titik keseimbangan yang stabil menjadi tidak stabil.

Kata Kunci : *Model mangsa pemangsa, pemanenan, waktu tunda, nilai eigen.*

1. Pendahuluan

Model populasi mangsa–pemangsa adalah salah satu model yang telah dianalisis secara meluaskan oleh banyak peneliti. Ini disebabkan karena banyak fenomena dalam interaksi populasi yang bersifat predasi (mangsa–pemangsa). Dalam penelitian ini model laju pertumbuhan populasi mangsa–pemangsa yang merujuk kepada model Lotka–Volterra dikembangkan dengan mempertimbangkan waktu tunda dan pemanenan. Waktu tunda dilibatkan dalam laju pertumbuhan populasi karena pada kenyataannya laju pertumbuhan populasi tidak hanya bergantung pada jumlah populasi pada saat sekarang tetapi juga bergantung kepada jumlah populasi sebelumnya. Waktu tunda dimasukkan ke dalam model untuk membuat model populasi menjadi lebih akurat yang lebih mendekati fenomena sebenarnya.

Dinamika populasi disamping memberikan konsekuensi biologi dan ekologi, juga memberikan konsekuensi ekonomi. Populasi ikan, sebagai contoh, diharapkan secara ekologi tidak akan punah dan dari aspek ekonomi populasi diharapkan dapat memberikan banyak manfaat kepada manusia. Dengan demikian model populasi yang mana populasinya bernilai ekonomi seharusnya melibatkan fungsi pemanenan dalam model pertumbuhannya.

Dengan berbagai alasan, waktu tunda telah disetujui dan diterima untuk dipertimbangkan dalam berbagai model laju pertumbuhan populasi, lihat Bellman dan Cooke (1963), Hale (1977),

[†] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar*

Cushing (1977), Gopalsamy (1992), Kuang (1993) dan MacDonald (1978) untuk sistem biologi dengan waktu tunda secara umum.

Persamaan differensial tunda secara umum memperlihatkan dinamika yang lebih kompleks dibandingkan dengan persamaan differensial biasa karena waktu tunda dapat menyebabkan suatu titik keseimbangan yang stabil menjadi tidak stabil dan menyebabkan jumlah populasi ikut terpengaruh. Waktu tunda yang disebabkan oleh kehamilan adalah suatu contoh yang sederhana. Secara umum konsumsi mangsa oleh pemangsa selama waktu yang lalu menentukan laju perubahan pemangsa pada waktu sekarang. Dengan demikian, model interaksi suatu populasi dengan populasi lainnya yang lebih realistik seharusnya mempertimbangkan pengaruh waktu tunda, Ho dan Ou (2002).

Dalam tulisan ini yang membahas model populasi mangsa–pemangsa yang melibatkan waktu tunda dan pemanenan, akan dianalisis syarat kewujudan titik keseimbangan yang positif. Selanjutnya digunakan suatu pengembangan metode dalam menganalisis pengaruh waktu tunda terhadap kestabilan titik keseimbangan model. Tulisan ini bertujuan untuk mengontrol nilai parameter, waktu tunda dan taraf pemanenan sehingga populasi mangsa dan pemangsa tetap akan wujud meskipun kedua populasi dieksploitasi dan dikenakan waktu tunda.

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah menghapuskan bentuk jumlah populasi yang bergantung kepada waktu tunda dengan menggunakan suatu pendekatan melalui deret Taylor. Selanjutnya dilakukan pelinearan di sekitar titik keseimbangan dengan menggunakan matriks Jacobian. Untuk penentuan kestabilan titik keseimbangannya digunakan metode nilai eigen.

2. Review Model Populasi Mangsa-Pemangsa dan Pemanenan

Model populasi mangsa pemangsa yang berdasarkan kepada model Lotka–Volterra adalah salah satu model yang sangat populer dalam matematika biologi. Luckinbill (1973) menunjukkan bahwa populasi mangsa dan pemangsa dapat hidup bersama dengan cara mengurangi frekuensi interaksinya. Danca *et al.* (1997) menganalisis suatu model mangsa-pemangsa dengan menggunakan metode analitik dan numerik. Mereka dapat menentukan range nilai parameter dimana sistem mempunyai keadaan stasioner atau perilaku yang kacau.

Brauer dan Soudack (1979a, 1979b dan 1981) mempertimbangkan beberapa model mangsa–pemangsa yang melibatkan masalah pemanenan dengan laju konstan. Mereka menganalisis prilaku global model mangsa–pemangsa dan membuat klasifikasi beberapa kemungkinan dan juga menentukan domain atraksi dari trayektori. Mereka juga menemukan bahwa pada kondisi tertentu model dengan pemanenan adalah stabil. Ketika model mangsa-pemangsa dalam kondisi stabil asimptotik dan kestabilannya lemah maka limit cycle asimptotik kemungkinan akan wujud, Jeffries (1974).

Kar dan Chauduri (2004) mengkaji model mangsa–pemangsa yang juga berdasarkan pada model Lotka–Volterra dengan pemanenan. Mereka menelaah kemungkinan kewujudan ekuilibrium bionomik dan pemanenan optimal. Pengaruh pemanenan dengan kuota konstan dan usaha konstan telah dikaji oleh Holmberg (1995) dan hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa tangkapan dengan kouta konstan dapat mengarah kepada keadaan osilasi dan kacau dan dapat juga meningkatkan resiko eksploitasi yang berlebihan. Kestabilan pemanenan pada model yang melibatkan dua mangsa–satu pemangsa yang berdasarkan kepada model Lotka–Volterra dalam Azar (1995) dimana populasi pemangsa dipanen juga telah dianalisis. Hasil analisis menunjukkan bahwa penggunaan fungsi pemanenan konstan membuat model lebih stabil.

Suatu model mangsa–pemangsa dengan tipe Holling yang menggunakan usaha pemanenan sebagai suatu kontrol disajikan oleh Srinivasu *et al*. (2001). Mereka menunjukkan bahwa dengan pemanenan, ada kemungkinan untuk menghentikan perilaku siklik sistem dan mengantarkan suatu limit cycle yang stabil global dalam sistem. Hogarth *et al.* (1992)

mempertimbangkan pemanenan dengan hasil konstan pada sistem satu mangsa–satu pemangsa dimana mangsa dan pemangsa dipanen dengan hasil konstan dan hasil analisis menunjukkan bahwa kestabilan pada hasil maksimum yang berkelanjutan itu dibuktikan.

Matsuda dan Abrams (2004) menyelidiki pengaruh pada ukuran populasi dan hasil pemanenan pada level yang berbeda pada suatu pemangsa dalam sistem mangsa–pemangsa. Hasil analisis menunjukkan bahwa jumlah pemangsa mungkin meningkat dengan meningkatnya usaha penangkapan, meskipun ketika mangsa digolongkan memberikan suatu pengaruh positif pada laju pertumbuhannya ataupun ketika mangsa dieksploitasi berlebih oleh pemangsa.

Song dan Chen (2002) mempertimbangkan esploitasi pada populasi mangsa–pemangsa dengan tingkat struktur dan pemanenan untuk mangsa dan hasil menunjukkan bahwa titik keseimbangan nonnegatif stabil global dan asimptotik pada suatu kondisi tertentu. Di samping itu wujud suatu ambang pemanenan pada populasi mangsa dan waktu tunda optimal memaksimumkan jumlah total populasi.

Sistem mangsa-pemangsa telah banyak dikaji penulis, misalnya oleh Rinaldi dan Muratori (1992), Kuang dan Beretta (1998) dan Fan dan Kuang (2004). Sementara model mangsa–pemangsa dengan pemanenan telah dikaji oleh Kitabatake (1987), Jonzen *et al*. (2001), Toaha dan Budin (2005) dan Toaha *et al*. 2007, serta model mangsa–pemangsa dengan waktu tunda telah ditelaah Xu *et al*. (2004).

3. Model Mangsa Pemangsa dengan Pemanenan dan Waktu Tunda

Dalam penelitian ini kita akan mempertimbangkan suatu model mangsa–pemangsa yang berdasarkan kepada model Lotka–Volterra dengan satu populasi mangsa dan satu popoluasi pemangsa. Misalkan $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ menyatakan ukuran populasi mangsa dan pemangsa pada waktu *t*, maka model laju pertumbuhan populasi mangsa dan pemangsa diberikan oleh sistem persamaan differensial autonomi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \alpha xy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + \beta xy\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Model (1) meliputi parameter *K*, yaitu kapasitas bawaan populasi mangsa pada kondisi tidak ada interaksi dengan populasi pemangsa. Parameter *r* adalah laju pertumbuhan intrinsik populasi mangsa, *c* adalah laju kematian populasi pemangsa, α mengukur laju konsumsi mangsa oleh pemangsa, β mengukur konversi mangsa yang dikonsumsi ke dalam laju reproduksi pemangsa.

Bermula dari model logistik waktu tunda oleh Hutchinson, May (1974) mengusulkan model mangsa–pemangsa dengan waktu tunda

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= rx(t)\left(1 - \frac{x(t-\tau)}{K}\right) - \alpha x(t)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -cy(t) + \beta x(t)y(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Model (2) meliputi satu waktu tunda τ dan laju pertumbuhan populasi mangsa tidak hanya bergantung kepada ukuran populasi sekarang tetapi juga bergantung kepada ukuran populasi pada beberapa waktu sebelumnya. Jika periode persiapan populasi mangsa untuk bereproduksi adalah τ, maka laju pertumbuhan per kapita harus memuat suatu waktu tunda τ. Model (2) merupakan pengembangan dari model (1) dimana laju pertumbuhan populasi mangsa tidak hanya bergantung pada ukuran populasi sekarang tetapi juga bergantung pada ukuran populasi yang waktu sebelumnya.

Model (1) kemudian dikembangkan dengan pertimbangan bahwa kedua populasi mempunyai nilai jual, sebagai contoh populasi ikan. Disini, kedua populasi dipanen dengan usaha konstan. Pengaruh pemanenan ini tidak serta merta mempengaruhi laju perubahan populasi, tetapi perlu beberapa waktu untuk memberikan efek kepada laju pertumbuhan populasi. Dengan demikian laju tangkapan proporsional dengan ukuran populasi pada beberapa waktu sebelumnya. Model populasi mangsa–pemangsa yang terhasil dengan waktu tunda dalam bentuk pemanenan adalah

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= rx(t)\left(1-\frac{x(t)}{K}\right)-\alpha x(t)y(t)-q_x E_x x(t-\tau) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -cy(t)+\beta x(t)y(t)-q_y E_y y(t-\tau)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Konstanta q_x dan q_y adalah koefisien ketertangkapan populasi mangsa dan pemangsa manakala E_x dan E_y adalah usaha pemanenan untuk populasi mangsa dan pemangsa. Penglibatan waktu tunda dalam bentuk laju pemanenan juga telah dipertimbangkan oleh Kar (2003). Untuk keperluan analisis model diasumsikan $q_x = q_y = 1$.

Dalam kasus dimana populasi mangsa dan pemangsa ditangkap dengan menggunakan alat penangkapan yang sama, maka sangat beralasan untuk mengasumsikan bahwa usaha penangkapan yang digunakan adalah sama, yaitu $E = E_x = E_y$.

Dari pengembangan model populasi mangsa–pemangsa, ada beberapa permasalahan yang akan dianalisis dan diselesaikan, yaitu (1) menentukan syarat kewujudan titik keseimbangan model yang positif, (2) menentukan nilai waktu tunda sehingga titik keseimbangan yang stabil tetap stabil, (3) menentukan interval untuk nilai usaha pemanenan sehingga tetap diperoleh titik keseimbangan yang positif dan stabil, (4) mengontrol nilai waktu tunda, parameter model, jumlah awal populasi dan jumlah tangkapan sehingga wujud titik keseimbangan yang positif dan stabil sehingga populasi tidak akan punah untuk selamanya.

4. Metodologi dan Analisis Kestabilan

Model populasi mangsa–pemangsa akan dianalisis untuk menentukan kestabilan titik keseimbangan dan menentukan ambang batas waktu tunda sehingga titik keseimbangan yang stabil tetap stabil. Sebelum penentuan kestabilan titik keseimbangan model, kita sediakan syarat perlu atau cukup untuk kewujudan titik keseimbangan positif karena model yang dianalisis adalah model populasi.

Metode yang digunakan dalam menganalisis kestabilan titik keseimbangan dan penentuan ambang batas waktu tunda adalah metode pelinearan, penghapusan bentuk $x(t-\tau)$ dengan melakukan pendekatan dan transformasi. Dari model linear yang terhasil, penentuan kestabilan titik keseimbangan dan ambang batas waktu tunda dapat dilakukan.

Langkah-langkah dalam metode ini secara berurut adalah sebagai berikut :

1. Penentuan titik keseimbangan model yang positif untuk model nonlinear yang mengandung waktu tunda.

2. Menentukan suatu syarat sehingga titik keseimbangan yang positif itu stabil jika tidak ada waktu tunda.
3. Menghapuskan bentuk $x(t-\tau)$ dengan pendekatan $x(t-\tau) \cong x(t) - \tau \dfrac{dx}{dt}$.
4. Menggantikan $x(t-\tau)$ dengan $x(t) - \tau \dfrac{dx}{dt}$ pada model sehingga diperoleh model tanpa bentuk $x(t-\tau)$ tetapi masih melibatkan waktu tunda τ.
5. Melinearkan model di sekitar titik keseimbangan positif dengan menggunakan matriks Jacobian sehingga terhasil model linear dengan titik keseimbangan $(0, 0)$.
6. Dari model linear selanjutnya ditentukan syarat kestabilan titik keseimbangan melalui persamaan karakteristik dan nilai eigen dari matriks Jacobian.
7. Ambang batas nilai waktu tunda ditentukan dengan memberikan suatu syarat pada persamaan karakteristik sehingga semua nilai eigen mempunyai bagian riil yang negatif.

Metode di atas dapat diaplikasikan untuk menganalisis kestabilan titik keseimbangan model nonlinear jika titik keseimbangan itu stabil untuk $\tau = 0$. Selanjutnya, karena nilai eigen yang terhasil merupakan suatu fungsi yang kontinu terhadap τ maka nilai eigen yang bergantung kepada τ juga masih mempunyai bagian riil yang positif untuk suatu waktu τ yang relatif kecil. Dengan menggunakan pendekatan yang digunakan dalam metode di atas, penentuan ambang batas nilai waktu tunda τ dapat dilakukan. Jika waktu tunda yang diaplikasikan dalam model melebihi nilai ambang batas waktu tunda tersebut, maka titik keseimbangan menjadi tidak stabil yaitu pada saat terdapat nilai eigen dengan bagian riil positif, lihat Willems (1970).

Model (1) mempunyai titik keseimbangan positif $\left(\dfrac{c}{\beta}, \dfrac{r(K\beta - c)}{\alpha\beta K}\right)$ jika $K\beta - c > 0$ dan titik keseimbangan ini stabil asimptotik global, Ho dan Ou (2002). Dengan mengenakan pendekatan $x(t-\tau) \cong x(t) - \tau \dfrac{dx}{dt}$ pada bentuk waktu tunda untuk model (2) diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= rx(t) - \frac{r}{K}x(t)\left(x(t) - \tau\frac{dx(t)}{dt}\right) - \alpha x(t)y(t)\\
\frac{dy(t)}{dt} &= -cy(t) + \beta x(t)y(t),
\end{aligned}$$

yang dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= \frac{rx(t) - \frac{r}{K}x(t)^2 - \alpha x(t)y(t)}{\left(1 - \frac{r\tau}{K}x(t)\right)}\\
\frac{dy(t)}{dt} &= -cy(t) + \beta x(t)y(t).
\end{aligned} \tag{4}$$

Titik keseimbangan positif untuk model (4) sama dengan titik keseimbangan model (1) ataupun model (2) yaitu $\left(\dfrac{c}{\beta}, \dfrac{r(K\beta - c)}{\alpha\beta K}\right)$, namun model (4) mensyaratkan bahwa $x(t) \neq \dfrac{K}{r\tau}$. Matriks Jacobian untuk model (4) adalah

$$J = \begin{pmatrix} -\dfrac{-rK^2 + 2xrK - r^2x^2\tau + \alpha yK^2}{(r\tau x - K)^2} & \dfrac{\alpha Kx}{(r\tau x - K)} \\ y\beta & -c + \beta x \end{pmatrix}.$$

Matriks Jacobian yang bersesuaian dengan titik keseimbangan $\left(\dfrac{c}{\beta}, \dfrac{r(K\beta - c)}{\alpha\beta K}\right)$ adalah $J1 = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & 0 \end{pmatrix}$ dengan $P = \dfrac{rc}{rc\tau - \beta K}$, $Q = \dfrac{\alpha Kc}{rc\tau - \beta K}$ dan $R = \dfrac{r(\beta K - c)}{\alpha K}$. Nilai eigen dari matriks Jacobian $J1$ adalah $\lambda_{1,2} = \dfrac{P \pm \sqrt{P^2 + 4QR}}{2}$. Untuk analisis kestabilan titik keseimbangan ini, akan ditinjau 2 kasus.

Kasus 1: $\dfrac{c}{\beta} < \dfrac{K}{r\tau}$ atau $\tau < \dfrac{K\beta}{rc}$.

Untuk $\tau < \dfrac{K\beta}{rc}$ maka diperoleh P dan Q keduanya bernilai negatif yang mengakibatkan bagian real dari kedua nilai eigen bernilai negatif. Dengan demikian titik keseimbangan $\left(\dfrac{c}{\beta}, \dfrac{r(K\beta - c)}{\alpha\beta K}\right)$ stabil asimptotik jika $0 < \tau < \dfrac{K\beta}{rc}$.

Mudah dicek bahwa $P^2 + 4QR > 0$ jika dan hanya jika $\tau > \tau_*$ dimana $\tau_* = \dfrac{4K\beta(K\beta - c) - rc}{4rc(K\beta - c)}$. Dengan demikian titik keseimbangan $\left(\dfrac{c}{\beta}, \dfrac{r(K\beta - c)}{\alpha\beta K}\right)$ stabil asimptotik dan merupakan node jika $\max\{0, \tau_*\} \le \tau < \dfrac{K\beta}{rc}$ dan stabil spiral jika $0 < \tau < \tau_*$ sekiranya τ_* bernilai positif.

Kasus 2: $\dfrac{c}{\beta} > \dfrac{K}{r\tau}$ atau $\tau > \dfrac{K\beta}{rc}$.

Untuk $\tau > \dfrac{K\beta}{rc}$ maka diperoleh P dan Q keduanya bernilai positif yang mengakibatkan kedua nilai eigen bernilai real dan berbeda tanda. Dengan demikian titik keseimbangan $\left(\dfrac{c}{\beta}, \dfrac{r(K\beta - c)}{\alpha\beta K}\right)$ tidak stabil yang merupakan titik pelana.

Dengan mengasumsikan $q_x = q_y = 1$ dan $E = E_x = E_y$, maka model (3) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= rx(t) - Ex(t-\tau) - \frac{r}{K}x(t)^2 - \alpha x(t)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -cy(t) - Ey(t-\tau) + \beta x(t)y(t). \end{aligned} \tag{5}$$

Dengan mengenakan pendekatan $x(t-\tau) \cong x(t) - \tau \dfrac{dx(t)}{dt}$ pada bentuk tundaan waktu untuk model (5) diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= rx(t) - E\left(x(t) - \tau\frac{dx(t)}{dt}\right) - \frac{r}{K}x(t)^2 - \alpha x(t)y(t)\\ \frac{dy(t)}{dt} &= -cy(t) - E\left(y(t) - \tau\frac{dy(t)}{dt}\right) + \beta x(t)y(t),\end{aligned}$$

yang dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= \frac{r_1 x(t) - \frac{r}{K}x(t)^2 - \alpha x(t)y(t)}{(1-E\tau)}\\ \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{-c_1 y(t) + \beta x(t)y(t)}{(1-E\tau)},\end{aligned} \qquad (6)$$

dengan $r_1 = r - E$ dan $c_1 = c + E$ serta diasumsikan bahwa $r - E > 0$.

Dengan menganggap bahwa $\tau \neq \dfrac{1}{E}$, model (6) mempunyai titik keseimbangan positif $\left(\dfrac{c_1}{\beta}, \dfrac{r_1 K\beta - rc_1)}{\alpha\beta K}\right)$ apabila $r_1 K\beta - rc_1 > 0$ dan hal ini terjadi jika $E < E_1$ dengan $E_1 = \dfrac{r(K\beta - c)}{(K\beta + r)}$ dan diasumsikan pula bahwa $K\beta - c > 0$. Matriks Jacobian untuk model (6) adalah

$$J2 = \begin{pmatrix} \dfrac{-r_1 K + 2rx + \alpha yK}{K(E\tau - 1)} & \dfrac{\alpha x}{(E\tau-1)} \\ \dfrac{-y\beta}{(E\tau-1)} & \dfrac{\beta x - c_1}{(E\tau-1)} \end{pmatrix}.$$

Matriks Jacobian yang bersesuaian dengan titik keseimbangan $\left(\dfrac{c_1}{\beta}, \dfrac{r_1 K\beta - rc_1)}{\alpha\beta K}\right)$ adalah

$$J3 = \begin{pmatrix} P_1 & Q_1 \\ R_1 & 0 \end{pmatrix}$$

dengan $P_1 = \dfrac{rc_1}{\beta K(E\tau - 1)}$, $Q_1 = \dfrac{c_1\alpha}{\beta K(E\tau-1)}$ dan $R_1 = \dfrac{-(r_1\beta K - rc_1)}{\alpha K(E\tau - 1)}$. Nilai eigen dari matriks Jacobian $J3$ adalah $\lambda_{1,2} = \dfrac{P_1 \pm \sqrt{P_1^2 + 4Q_1R_1}}{2}$. Untuk analisis kestabilan titik keseimbangan ini, akan ditinjau 2 kasus.

Kasus 1. $E\tau - 1 < 0$ atau $\tau < \dfrac{1}{E}$.

Untuk $\tau < \dfrac{1}{E}$ diketahui bahwa P_1 dan Q_1 bernilai negatif sementara R_1 bernilai positif. Dengan demikian diperoleh bagian real dari nilai eigen matriks $J3$ keduanya bernilai negatif yang berarti bahwa titik keseimbangan $\left(\dfrac{c_1}{\beta}, \dfrac{r_1 K\beta - rc_1)}{\alpha\beta K}\right)$ stabil asimptotik.

Mudah dicek bahwa $P_1^2 + 4Q_1R_1 > 0$ jika dan hanya jika $E < E_2$ dengan $E_2 = \dfrac{4K\beta(K\beta - c) - rc}{4rc(K\beta - c)}$. Dengan demikian titik keseimbangan $\left(\dfrac{c_1}{\beta}, \dfrac{r_1 K\beta - rc_1)}{\alpha\beta K}\right)$ stabil asimptotik dan merupakan node jika memenuhi $\tau < \dfrac{1}{E}$ dan $0 < E < E_2$. Dapat dengan mudah dibuktikan bahwa $E_2 < E_1$. Sementara jika $\tau < \dfrac{1}{E}$ dan $E_2 < E < E_1$ maka titik keseimbangan $\left(\dfrac{c_1}{\beta}, \dfrac{r_1 K\beta - rc_1)}{\alpha\beta K}\right)$ stabil spiral.

Kasus 2. $E\tau - 1 > 0$ atau $\tau > \dfrac{1}{E}$.

Untuk $\tau > \dfrac{1}{E}$ diketahui bahwa P_1 dan Q_1 keduanya bernilai positif dan R_1 juga bernilai positif. Dengan demikian diperoleh nilai eigen matriks $J3$ keduanya bernilai real dengan tanda yang berbeda, positif dan negatif, yang berarti bahwa titik keseimbangan $\left(\dfrac{c_1}{\beta}, \dfrac{r_1 K\beta - rc_1)}{\alpha\beta K}\right)$ tidak stabil, ia adalah titik pelana.

Daftar Pustaka

1. Azar, C. 1995. Long-term environmental problems economic measures and physical indicators. http://www2.lib.chalmers.se/cth/diss/doc/9596/Azar Christian.html [20 Agustus 2004].

2. Bellman, R. dan Cooke, K.L. 1963. *Differential difference equations*. New York: Academic Press.

3. Brauer, F. dan Soudack, A.C. 1979a. Stability regions and transition phenomena for harvested predator-prey systems. *Journal Math. Biology* 7:319-337.

4. Brauer, F. dan Soudack, A.C. 1979b. Stability regions in predator-prey systems with constant-rate prey harvesting. *Journal Math. Biology* 8:55-71.

5. Brauer, F. dan Soudack, A.C. 1981. Coexistence properties of some predator-prey systems under constant rate harvesting and stocking. *Journal Math. Biology* 12:101-114.

6. Cushing, J.M. 1977. *Integrodifferential equations and delay models in population dynamics*. Heidelberg: Springer-Verlag.

7. Danca, M., Codreanu, S. dan Bako, B. 1997. Detailed analysis of a nonlinear prey-predator model. *Journal of Biological Physics* 23:11-20.

8. Fan, M. dan Kuang, Y. 2004. Dynamics of a nonautonomous predator-prey system with the Beddington-DeAngelis functional response. *J. Math. Anal. Appl.* 295:15-39.

9. Gopalsamy, K. 1992. *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

10. Hale, J.K. 1977. *Theory of functional differential equations*. Heidelberg: Springer-Verlag.

11. Ho, C.P. dan Ou, Y.L. 2002. Influence of time delay on local stability for a predator-prey system. *Journal of Tunghai Science* 4:47-62.

12. Hogarth, W.L., Norbury, J., Cunning, I. dan Sommers, K. 1992. Stability of a predator-prey model with harvesting. *Ecological Modelling* 62:83-106.

13. Holmberg, J. 1995. Socio-ecological principles and indicators for sustainability, PhD Thesis, Goteborg University, Sweden.

14. Jeffries, C. 1974. Probabilistic limit cycles. In *Lecture notes in biomathematics* (2nd ed.), ed. S. Levin, pp 123-131. New York: Spinger-Verlag.

15. Jonzen, N., Lundberg, P. dan Gardmark, A. 2001. Harvesting spatially distributed populations. *J. Wildl. Biol*. 7:197-203.

16. Kar, T.K. 2003. Selective harvesting in a prey-predator fishery with time delay. *Mathematical and Computer Modelling* 38:449-458.

17. Kar, T.K. dan Chaudhuri, K.S. 2004. Harvesting in a two-prey one predator fishery: A bioeconomic model. *J. ANZIAM* 45:443-456.

18. Kitabatake, Y. 1987. A dynamic predator-prey model for the utilization of fishery resources: A case of trawling in lake Kasumigaura. In *Mathematical modelling of environmental and ecological systems*, ed. J.B. Shukla, T.G. Hallam, and V. Capasso, pp 233-253. Elsevier Science Publishers.

19. Kuang, Y. 1993. *Delay differential equations with application in population dynamics*. New York: Academic Press.

20. Kuang, Y. dan Beretta, E. 1998. Global qualitative analysis of a ratio-dependent predator-prey system. *J. Math. Biol*. 36:389-406.

21. Luckinbill, L. S. 1973. Coexistence in laboratory populations of paramecium aurelia and its predator didinium nasutum. *Journal of Ecology* 54(6):1320-1327.

22. MacDonald, N. 1978. *Time lag in biological models*. Heidelberg: Springer-Verlag.

23. Matsuda, H. dan Abrams, P.A. 2004. Effects of predators-prey interaction and adaptive change on sustainable yield. *Can. J. Fish. Aquat. Sci./J. Can. Sci. Halieut. Aquat.* 61(2):175-184.

24. May, R.M. 1974. *Stability and complexity of model ecosystems*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

25. Rinaldi, S. dan Muratori, S. 1992. Slow-fast limit cycles in predator-prey models. *Ecological Modelling* 61:287-308.

26. Song, X.Y. dan Chen, L.S. 2002. Optimal harvesting and stability for a predator-prey system with stage structure. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica* 18(3):423-430.

27. Srinivasu, P.D., Ismail, S. dan Naidu, C.R. 2001. Global dynamics and controllability of a harvested prey-predator system. *J. Biological Systems* 9(1):67-79.

28. Toaha, S. dan Budin, H. 2005. Stability analysis of one prey – two predators population model under constant quota of harvesting. In *Proceedings of The second International Conference on Research and Education in Mathematics (ICREM 2)*, ed. U.D. Bekbaev, pp 365-374. Serdang, Malaysia.

29. Toaha, S., Hassan, M.A., Ismail, F. dan June, L.W. 2007. Stability analysis and maximum profit of one prey- two predators model under constant effort of harvesting, *Malaysian Journal of Science* 26:43-51.

30. Willems, J.L. 1970. *Stability theory of dynamical systems*. London: Thomas Nelson & Sons.

31. Xu, R., Chaplain, M.A.J. dan Davidson, F.A. 2004. Periodic solution for a three-species Lotka-Voterra food-chain model with time delays. *Mathematical and Computer Modelling* 40:823-837.