J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 5, No.2, 108-114, Januari 2009

ISBN:1858-1382

Solusi Numerik Persamaan Differensial Biasa Dengan Menggunakan Metode Predictor – Corrector

Agustinus Ribal[*] dan Khaeruddin[**]

Abstrak

Dalam tulisan ini akan diperkenalkan suatu solusi numerik dari persamaan differensial biasa order pertama dengan menggunakan metode predictor-corrector. Pertama-tama formula predictor akan ditentukan, kemudian menurunkan predictor formula untuk Adam-Bashforth beserta dengan corrector formulanya dimana corrector formula akan digunakan untuk mengoreksi nilai yang telah diprediksi. Selanjutnya, perulangan corrector akan dilakukan. Metode Runge Kutta orde keempat akan digunakan sebagai nilai awal dari metode predictor.

Kata Kunci : *corrector method, masalah nilai awal, metode banyak langkah, persamaan differensial biasa.*

1. Pendahuluan

Banyak hasil perumusan matematika dalam bidang sains dan teknik berakhir dalam bentuk persamaan differensial biasa orde dan tidak dapat diselesaikan secara analitik. Untuk itulah dibutuhkan suatu metode numerik dalam menyelesaikan masalah-masalah tersebut. Dengan kemajuan teknologi komputer sekarang ini, metode numerik bukan lagi masalah. Beberapa metode numerik telah diperkenalkan untuk menyelesaikan persamaan differensial biasa seperti, metode Taylor, metode Euler, metode Runge-Kutta dan lain-lain.

Dalam tulisan ini kami akan mengkaji sebuah metode yang berbeda dengan metode yang disebutkan di atas. Metode yang akan digunakan dalam tulisan ini adalah metode predictor-corrector, dimana kita pertama-tama memprediksikan solusi numerik dari suatu persamaan differensial biasa orde pertama kemudian kita mengoreksinya dengan metode corrector. Oleh karena kelemahan utama dari predictor method adalah tidak mempunyai nilai awal, maka dalam tulisan ini akan digunakan metode Runge-Kutta orde keempat dalam menentukan nilai awal untuk metode predictor.

2. Metode Banyak Langkah (*Multistep*)

Seperti telah diketahui bahwa metode satu langkah seperti metode deret Taylor, metode Euler, dan metode Runge-Kutta yang berbentuk:

$$y_{n+1} = g(x_n, y_n)$$

menggunakan hasil dari langkah terakhir proses untuk menentukan solusi berikutnya.

Metode banyak langkah adalah pengembangan dari metode satu langkah yang menggunakan beberapa informasi sebelumnya untuk menentukan solusi yang diinginkan. Bentuk umum dari metode ini adalah:

$$y_{n+1} = g(x_n, y_n; x_{n-1}, y_{n-1}; x_{n-2}, y_{n-2}; \cdots; x_{n-p}, y_{n-p})$$

[*] dan [**] *Staf pengajar pada Jurusan Matematika F.MIPA Universitas Hasanuddin Makassar*

dimana $p \geq 0$.

Penurunan metode banyak langkah adalah sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

maka $y_{n+1} = y_{n-p} + \int_{x_{n-p}}^{x_{n+1}} f(x, y)dx; \qquad p \geq 0$ (1)

dimana

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx P_m(s) + Galat \\ &= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{-s}{k} \nabla^k f_n + (-1)^{m+1} \binom{-s}{m+1} h^{m+1} f^{(m+1)}(\xi) \end{aligned}$$

juga

$$x = x_n + sh$$

Sehingga persamaan (1) bisa ditulis:

$$y_{n+1} = y_{n-p} + h\int_{-p}^{1} P_m(s)ds$$

dan

$$error = h^{m+1} \int_{-p}^{1} (-1)^{m+1} \binom{-s}{m+1} f^{(m+1)}(\xi) \tag{2}$$

3. Metode Adam-Bashforth Predictor-Corrector

Jika kita mengambil $p = 0$ dan $m = 3$, maka persamaan (1) menjadi:

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y)dx$$

dengan $x = x_n + sh$ dan

$$f(x, y) \approx P_3(s) = f_n + s\nabla f_n + \frac{s(s+1)}{2}\nabla^2 f_n + \frac{s(s+1)(s+2)}{6}\nabla^3 f_n$$

Sehingga diperoleh formula predictor sebagai berikut:

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{p} &= y_n + h\int_0^1 P_3(s)ds \\ &= y_n + h\int_0^1 f_n + s\nabla f_n + \frac{s(s+1)}{2}\nabla^2 f_n + \frac{s(s+1)(s+2)}{6}\nabla^3 f_n ds \\ &= y_n + h\left\{ f_n + \frac{1}{2}\nabla f_n + \frac{5}{12}\nabla^2 f_n + \frac{3}{8}\nabla^3 f_n \right\} \\ &= y_n + \frac{h}{24}\{55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}\} \end{aligned}$$

Jadi,

$$y_{n+1}^{p} = y_n + \frac{h}{24}\{55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}\}$$

Dengan cara yang sama (menggunakan persamaan (2)), akan diperoleh galat sebagai berikut:

$$E_{i+1}^{p} = \frac{251}{720} h^5 y^{(5)}(\xi)$$

Selanjutnya formula corrector untuk Adam-Bashforth diperoleh sebagai berikut:

$$y_{n+1}^{c} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} \overline{P}_3(s)dx$$

dimana

$$\overline{P}_3(s) = f_{n+1} + s\nabla f_{n+1} + \frac{s(s+1)}{2}\nabla^2 f_{n+1} + \frac{s(s+1)(s+2)}{6}\nabla^3 f_{n+1}$$

dan $x = x_{n+1} + sh$

Sehingga diperoleh corrector formula sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
y_{n+1}^{c} &= y_n + h\int_{-1}^{0} f_{n+1} + s\nabla f_{n+1} + \frac{s(s+1)}{2}\nabla^2 f_{n+1} + \frac{s(s+1)(s+2)}{6}\nabla^3 f_{n+1} ds \\
&= y_n + h\left\{ f_{n+1} - \frac{1}{2}\nabla f_{n+1} - \frac{1}{12}\nabla^2 f_{n+1} - \frac{1}{24}\nabla^3 f_{n+1}\right\} \\
&= y_n + \frac{h}{24}\{9 f_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\}
\end{aligned}$$

Jadi,

$$y_{n+1}^{c} = y_n + \frac{h}{24}\{9 f_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\}$$

dengan galat sebesar

$$E_{i+1}^{c} = -\frac{19}{720} h^5 y^{(5)}(\xi)$$

4. Diskritisasi Galat

Galat pemotongan dapat diperkirakan pada setiap langkah untuk mengurangi banyaknya iterasi dari corrector sebagai berikut:

P: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\{55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3}\}$

dengan galat

$$E_{i+1}^{p} = \frac{251}{720} h^5 y^{(5)}(\xi)$$

C: $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\{9 f_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2}\}$

dengan galat

$$E_{i+1}^{c} = -\frac{19}{720} h^5 y^{(5)}(\xi)$$

Misalkan y_{n+1}^{p} adalah nilai dari y_{n+1} yang diperoleh dari P, maka

$$y(x_{n+1}) = y_{n+1}^{p} + E_{n+1}^{p} = y_{n+1}^{p} + \frac{251}{720}h^{5}y^{(5)}(\xi_{1}); \quad x_{n-3} < \xi_{1} < x_{n+1} \tag{3}$$

$$y(x_{n+1}) = y_{n+1}^{c} + E_{n+1}^{c} = y_{n+1}^{c} - \frac{19}{720}h^{5}y^{(5)}(\xi_{2}); \quad x_{n-2} < \xi_{2} < x_{n+1} \tag{4}$$

Jika kita asumsikan bahwa turunan orde kelima dari $y(x)$ konstan, maka

$$y^{(5)}(\xi_{2}) = y^{(5)}(\xi_{1}) = y^{(5)}(\xi)$$

Oleh karena itu, dari persamaan (4) diperoleh

$$galat = y(x_{n+1}) - y_{n+1}^{c} = -\frac{19}{720}h^{5}y^{(5)}(\xi) \tag{5}$$

Juga dari (3) dan (4) diperoleh

$$y_{n+1}^{c} - y_{n+1}^{p} = \frac{3}{8}h^{5}y^{(5)}(\xi)$$

maka

$$y^{(5)}(\xi) = \frac{8}{3h^{5}}\left(y_{n+1}^{c} - y_{n+1}^{p}\right) \tag{6}$$

Dengan memasukkan (6) ke (5) diperoleh

$$galat = -\frac{19}{270}\left(y_{n+1}^{c} - y_{n+1}^{p}\right)$$

Jadi galat pada setiap langkah adalah $-\frac{19}{270}\left(y_{n+1}^{c} - y_{n+1}^{p}\right)$

5. Solusi Numerik

Pada bagian ini akan dipelajari sebuah contoh dimana kita akan menentukan solusi dari persamaan differensial biasa orde pertama yaitu

$$y' = x + y; \quad x \in [0,0.1]$$
$$y(0) = 1$$

Penentuan solusi dari persamaan differensial biasa di atas akan dicari dengan dua cara yaitu dengan predictor-corrector dan dengan perulangan corrector sebanyak dua kali. Sebagaimana telah diketahui bahwa metode predictor tidak mempunyai nilai awal, maka dalam hal ini kami akan menggunakan metode Runge-kutta orde keempat untuk menentukan nilai awalnya.

- Solusi dengan menggunakan Predictor Method

Hasil dari persamaan differensial biasa di atas dengan metode predictor atau metode banyak langkah (*multistep*) adalah sebagai berikut:

Tabel 1. Metode Prediktor

n	*X*	*Y*	*f*	*eksak*	*galat*
4	0.000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	0.000000000000
	0.025	1.025630240885	1.050630240885	1.025630241049	0.000000000164
	0.050	1.052542192417	1.102542192417	1.052542192752	0.000000000335
	0.075	1.080768301254	1.155768301254	1.080768301769	0.000000000515

	0.100	1.110341828472	1.210341828472	1.110341836151	0.000000007679

Sambungan Tabel 1.

n	*x*	*Y*	*f*	*eksak*	*galat*
16	0.000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	0.000000000000
	0.025	1.025630241042	1.050630241042	1.025630241049	0.000000000007
	0.050	1.052542192747	1.102542192747	1.052542192752	0.000000000005
	0.075	1.080768301766	1.155768301766	1.080768301769	0.000000000003
	0.100	1.110341836150	1.210341836150	1.110341836151	0.000000000001
32	0.000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	0.000000000000
	0.025	1.025630241049	1.050630241049	1.025630241049	0.000000000000
	0.050	1.052542192752	1.102542192752	1.052542192752	0.000000000000
	0.075	1.080768301769	1.155768301769	1.080768301769	0.000000000000
	0.100	1.110341836152	1.210341836152	1.110341836151	0.000000000001
40	0.000	1.000000000000	1.000000000000	1.000000000000	0.000000000000
	0.025	1.025630241049	1.050630241049	1.025630241049	0.000000000000
	0.050	1.052542192752	1.102542192752	1.052542192752	0.000000000000
	0.075	1.080768301769	1.155768301769	1.080768301769	0.000000000000
	0.100	1.110341836151	1.210341836151	1.110341836151	0.000000000000

- Solusi numerik dengan menggunakan Predictor-Corrector (PEC)Method

Tabel 2. Predictor-Corector Method

n	*x*	*Y*	*f*	*eksak*	*galat*
4	0.100	1.110341836107	1.210341836107	1.110341836151	0.000000000044
16	0.025	1.025630241049	1.050630241049	1.025630241049	0.000000000000
	0.050	1.052542192754	1.102542192754	1.052542192752	0.000000000002
	0.075	1.080768301773	1.155768301773	1.080768301769	0.000000000004
	0.100	1.110341836158	1.210341836158	1.110341836151	0.000000000007
32	0.025	1.025630241049	1.050630241049	1.025630241049	0.000000000000
	0.050	1.052542192752	1.102542192752	1.052542192752	0.000000000000
	0.075	1.080768301770	1.155768301770	1.080768301769	0.000000000001
	0.100	1.110341836152	1.210341836152	1.110341836151	0.000000000001
40	0.025	1.025630241049	1.050630241049	1.025630241049	0.000000000000
	0.050	1.052542192752	1.102542192752	1.052542192752	0.000000000000
	0.075	1.080768301769	1.155768301769	1.080768301769	0.000000000000
	0.100	1.110341836151	1.210341836151	1.110341836151	0.000000000000

- Solusi numerik dengan perulangan corrector (PE(CE)^2)

Tabel 3. Metode Perulangan corrector

n	*x*	*Y*	*f*	*eksak*	*galat*
4	0.100	1.110341836178	1.210341836178	1.110341836151	0.000000000027
16	0.025	1.025630241049	1.050630241049	1.025630241049	0.000000000000
	0.050	1.052542192754	1.102542192754	1.052542192752	0.000000000002
	0.075	1.080768301773	1.155768301773	1.080768301769	0.000000000004
	0.100	1.110341836158	1.210341836158	1.110341836151	0.000000000007
32	0.025	1.025630241049	1.050630241049	1.025630241049	0.000000000000
	0.050	1.052542192752	1.102542192752	1.052542192752	0.000000000000
	0.075	1.080768301770	1.155768301770	1.080768301769	0.000000000001
	0.100	1.110341836152	1.210341836152	1.110341836151	0.000000000001
40	0.025	1.025630241049	1.050630241049	1.025630241049	0.000000000000
	0.050	1.052542192752	1.102542192752	1.052542192752	0.000000000000
	0.075	1.080768301769	1.155768301769	1.080768301769	0.000000000000
	0.100	1.110341836151	1.210341836151	1.110341836151	0.000000000000

6. Kesimpulan

Dengan memperhatikan hasil numerik pada bagian sebelumnya, maka kita bisa melihat bahwa hasil numerik setelah dilakukan koreksian lebih akurat dari sebelumnya. Juga setelah dilakukan perulangan terhadap corrector, maka nilai yang diperoleh pun lebih akurat.

Daftar Pustaka

[1]. C. Arévalo, C. Führer & M. Selva, 2002, " *A Collocation Formulation of Multistep Methods for Variable Step-size Extensions*", *Applied Numerical Mathematics*, no. 42, pp. 5-16.

[2]. R.I. Becker, 1981, "*Two-Sided Stability and Convergence of Multistage and Multistep Methods for Ordinary Differential Equations*", *Mathematical Analysis and Applications*, vol. 81, pp. 453-473.

[3]. J.C. Butcher, 2000, "*Numerical methods for ordinary differential equations in the 20th century*", *Computational and Applied Mathematics*, no. 125, pp. 1-29.

[4]. J. Frank, W. Hundsdorfer, & J.G. Verwer, 1997, "*On the Stability of Implicit-explicit Linear Multistep Methods*", *Applied Numerical Mathematics*, no. 25, pp. 193 - 205.

[5]. S.K.Ghoshal, M. Gupta & V.Rajaraman, 1989, *"A Parallel Multistep Predictor-Corrector Algorithm for Solving Ordinary Differential Equations"*, *Parallel and Distributed Computing*, no. 6, pp. 36-648.

[6]. KJit Hout, 2002, "*On the contractivity of implicit–explicit linear multistep methods*", *Applied Numerical Mathematics*, no. 42, p. 201–212.

[7]. IN Katz, MA Franklin, & A. Sens, 1977, "*Optimally Stable Parallel Predictors for Adams-Moulton Correctors"*, *Computation and Mathematics with Applications*, vol. 3, pp. 217-233.

[8]. PSRC Rao, 2006, *"Special Multistep Methods Based on Numerical Differentiation for Solving the Initial Value Problem"*, *Applied Mathematics and Computation*, no. 181, pp. 500-510.

[9]. H. Tian, L.Fan & J.Xiang, 2007, *"Numerical Dissipativity of Multistep Methods for Delay Differential Equations"*, *Applied Mathematics and Computation*, no. 188, p. 934–941.

[10]. A. UsmanaA & G. Hallb, 2000, *"Alternative Stepsize Strategies for Adams Predictor-Corrector Codes"*, *Computational and Applied Mathematics*, no. 116, pp. 105-120.

[11]. D. Voss & S. Abbas, 1997, *"Block Predictor-Corrector Scheme for the Parallel Solution of ODES"*, *Computers Math. Applic.*, vol. 33, no. 6, pp. 65-72.

[12]. RV. Wyk, 1970, *"Variable Mesh Multistep Methods for Ordinary Differential Equations"*, *Computational Physics*, vol. 5, pp. 244 - 264.