J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 7, No.2, 92-97, Januari 2011

ISBN:1858-1382

Parameterisasi Pengontrol yang Menstabilkan Melalui Pendekatan Faktorisasi

Nur Erawati*

Abstrak

Suatu sistem linear yang matriks transfernya berupa matriks rasional proper, ada sistem linear yang lain yang merupakan pengontrol dari sistem linear awal. Melalui pendekatan faktorisasi, akan ditentukan parameterisasi semua pengontrol yang dapat menstabilkan.

Kata Kunci: *Sistem linear, pengontrol, faktorisasi.*

1. Pendahuluan

Bidang teori koding, optimasi, kontrol dan beberapa bidang ilmu lain merupakan ilmu yang sedang berkembang pesat seiring semakin majunya ilmu pengetahuan dan bertambahnya kebutuhan pada alat-alat yang memudahkan kehidupan.

Perkembangan bidang-bidang ilmu ini demikian pentingnya karena banyak permasalahan-permasalahan pada masa mendatang membutuhkan penelitian yang lebih mendalam pada bidang-bidang tersebut.

Tahun-tahun terakhir ini, ilmu yang mempelajari masalah perencanaan sistem kontrol *feedback multivariabel* menjadi ilmu yang dipelajari secara khusus dan mendalam.

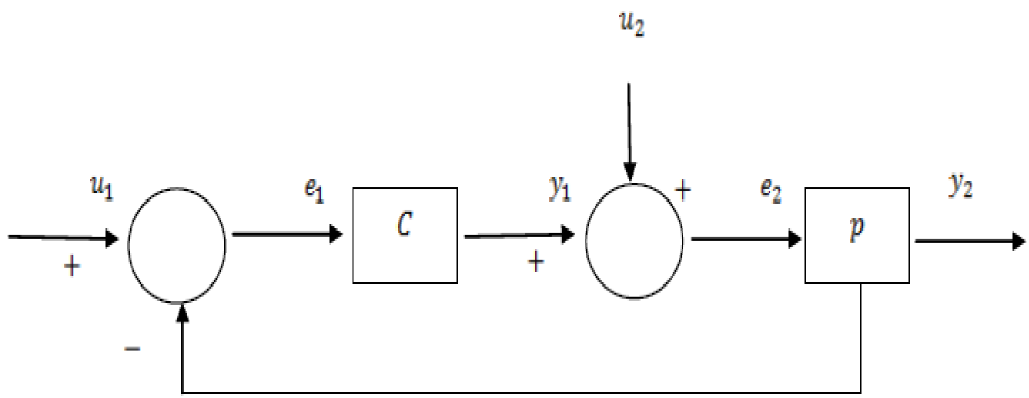
Permasalahan sederhana pada sistem kontrol misalnya ada sebuah sistem, biasanya disebut plant, yang secara umum tidak stabil. Masalah yang muncul, adakah suatu sistem pengontrol (kompensator) yang dapat menstabilkan sistem yang diberikan tadi (plant). Jika ada, ada berapa banyak pengontrol yang menstabilkan tersebut, sehingga dapat dipilih satu pengontrol yang "terbaik".

Pada tulisan ini, masih merupakan pembahasan yang sederhana, sistem yang dibicarakan dibatasi pada sistem skalar, yaitu sistem dengan *single-input-single-output*, linear, *time invariant*. Khususnya pula bagi sistem loop tertutup dengan satu parameter. Selanjutnya untuk lebih memudahkan, pembahasannya melalui pendekatan faktorisasi. Dalam artian bahwa suatu bentuk rasional diurai menjadi hasil bagi dua unsur bentuk rasional sejati yang stabil.

2. Pembahasan

Pada tulisan ini, sistem yang dibicarakan dibatasi pada sistem skalar yaitu sistem dengan *single-input-single-output*. Misalkan $\mathbb{R}(s)$ merupakan himpunan bentuk (fungsi) rasional dengan koefisien bilangan real. Misalkan plant $p \in \mathbb{R}(s)$ merupakan fungsi transfer dari sistem skalar, linear, *time-invariant*. Misalkan pula suatu kompensator (pengontrol) $c \in \mathbb{R}(s)$ terhubung dengan plant p dalam suatu konfigurasi feedback sebagaimana yang diberikan pada Gambar 1 berikut.

* *Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10, Tamalanrea, Makassar.*



Gambar 1. Sistem *Feedback*.

Persamaan yang menyatakan sistem loop- tertutup tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & p \\ -c & o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix},$$

yang mana dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+pc)} & \frac{-p}{(1+pc)} \\ \frac{c}{(1+pc)} & \frac{1}{(1+pc)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

dengan $1 + pc \neq 0$ (Vardulakis, 1991; Vidyasagar, 1985).
Misalkan

$$H(p,c) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+pc)} & \frac{-p}{(1+pc)} \\ \frac{c}{(1+pc)} & \frac{1}{(1+pc)} \end{bmatrix} \tag{1}$$

yang menyatakan matriks transfer dari (u_1, u_2) ke (e_1, e_2). Pasangan (p, c) disebut stabil dan c menstabilkan p jika dan hanya jika $H(p,c) \in S^{2\times 2}$ (S himpunan bentuk rasional sejati yang stabil). Dengan kestabilan loop-tertutup demikian, syarat perlu dan cukup untuk kondisi tersebut adalah melalui lemma berikut.

Lemma 1. (Vidyasagar, 1985)
Misalkan $p, c \in \mathbb{R}(s)$ dan misalkan $p = \frac{n_p}{d_p}$ $c = \frac{n_c}{d_c}$, dimana $n_p, d_p, n_c, d_c \in S$ dan n_p, d_p saling prim, n_c, d_c saling prim. Definisikan $\delta(p,c) = n_p n_c + d_p d_c$ maka pasangan (p, c) stabil jika dan hanya jika $\delta(p,c) \in U$ (U himpunan semua unit-unit di S).

Akibat 1. (Vidyasagar, 1985)
Misalkan $p \in \mathbb{R}(s)$ dan misalkan $p = \frac{n_p}{d_p}$ dengan $n_p,\ d_p \in S$ saling prim, maka $c \in \mathbb{R}(s)$ menstabilkan p jika dan hanya jika $c = \frac{n_c}{d_c}$ untuk suatu , $n_p, d_c \in S$ yang memenuhi

$$n_p n_c + d_p d_c = 1. \tag{6}$$

Hasil yang penting yaitu parameterisasi semua kompensator yang menstabilkan suatu plant yang diberikan merupakan hasil yang sering digunakan.

Teorema 1. (Vidyasagar, 1985)
Misalkan $p \in \mathbb{R}(s)$ *dan* $p = \frac{n_p}{d_p}$ *dengan* $n_p, d_p \in S$ *saling prim. Pilih* $x, y \in S$ *sehingga* $xn_p + yd_p = 1$. *Maka himpunan semua kompensator yang menstabilkan p, ditulis* $S(p)$ *diberikan oleh*

$$S(p) = \left\{ c = \frac{x + rd_p}{y - rn_p} \;\middle|\; r \in S, y - rn_p \neq 0 \right\}. \tag{7}$$

Untuk menerapkan Teorema 1, dengan kata lain untuk menentukan himpunan semua kompensator yang menstabilkan plant p yang diberikan, harus melakukan dua hal, yaitu

(i) Nyatakan p sebagai hasil bagi n_p / d_p, dengan $n_p, d_p \in S$ saling prim,

(ii) Tentukan penyelesaian khusus x, y dari persamaan (7).

Langkah (ii) ini menurut akibat 1, ekuivalen dengan menentukan satu kompensator yang menstabilkan p. Untuk sistem skalar, langkah (i) tentulah mudah. Rumus pada teorema 1 merupakan parameterisasi himpunan $S(p)$ dari semua kompensator yang menstabilkan p.

Akibat 2. (Vidyasagar, 1985)
Misalkan p, n_p, d_p, x, y *sebagaimana pada teorema 1, misalkan pula* $c = \frac{x + rd_p}{y - rn_p}$ *dengan* $r \in S$, *maka*

$$H(p, c) = \begin{bmatrix} d_p(y - rn_p) & -n_p(x + rd_p) \\ d_p(x + rd_p) & d_p(y - rn_p) \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Penerapan teorema dan akibatnya diilustrasikan pada contoh berikut.

Contoh 1. Misalkan $p(s) = \frac{s}{(s+1)(s-1)}$, maka $p = n_p / d_p$ dimana

$$n_p(s) = \frac{s}{(s+1)^2}, \quad d_p(s) = \frac{s-1}{(s+1)}.$$

Misalkan bahwa diperoleh suatu kompensator yang menstabilkan untuk p, namakan

$$c(s) = \frac{2(s+2)}{\delta - 0{,}5}.$$

Dapat ditentukan penyelesaian khusus sebagai berikut.
Misalkan

$$n_1(s) = \frac{2(s+2)}{\delta + 1}, \quad d_1(s) = \frac{s - 0{,}5}{s+1},$$

maka

$$\delta(p, c) = n_p n_1 + d_p d_1 = \frac{s^3 + 1{,}5s^2 + 3s + 0{,}5}{(s+1)^3}. \tag{9}$$

Semua pembuat nol polinom pembilang dari $\delta(p,c)$ terletak pada bidang sebelah kiri sehingga $\delta(p,c)$ suatu unit di S. Ini sesuai dengan yang diharapkan, karena c menstabilkan kompensator. Sebagaimana pada akibat Lemma 1, definisikan

$$x(s) = \frac{n_1}{\delta(p,c)} = \frac{2(s+2)(s+1)^2}{\emptyset(s)},$$
$$y(s) = \frac{d_1}{\delta(p,c)} = \frac{(s-0.5)(s+1)^2}{\emptyset(s)},$$

dimana $\emptyset(s) = s^3 + 1{,}5s^2 + 3s + 0{,}5$, maka x, y memenuhi persamaaan (7). Dengan menggunakan teorema atas, dapat diperoleh himpunan semua kompensator yang menstabilkan p, dengan c yang berbentuk

$$c(s) = \frac{x + rd_p}{y - rn_p} = \frac{2(s+2)(s+1)^4 + r(s)(s-1)(s+1)\emptyset(s)}{(s-0{,,}5)(s+1)^4 - r(s)s\emptyset(s)}, \tag{10}$$

dimana $r \in S$. Pernyataan (10) dapat disederhanakan. Bagi kedua pembilang dan penyebut dengan $(s+1)^3$,

$$c(s) = \frac{2(s+2)(s+1) + r(s)\delta(s)(s-1)(s+1)}{(s-0{,}5)(s+1) - r(s)\delta(s)s}, \tag{11}$$

dimana $\delta(s) = \delta(p,c)(s)$ sebagaimana didefinisikan pada (9). Sekarang $\delta(p,c)$ unit di S, dengan demikian r bervarasi terhadap S, demikian pula $r\delta$. Dengan kata lain, pemetaan $r \longmapsto r\delta$ merupakan pemetaan satu-satu dari S ke dirinya sendiri. Karena itu $r\delta$ dapat digantikan dengan parameter q, yang juga merupakan anggota S. Jadi himpunan kompensator yang menstabilkan p diberikan oleh

$$S(p) = \left\{c \mid c(s) = \frac{2(s+2)(s+1) + q(s)(s-1)(s+1)}{(s-0{,}5)(s+1) - sq(s)}, q \epsilon S\right\}. \tag{12}$$

dengan satu kompensator c yang berbentuk seperti pada persamaan (11) diberikan oleh persamaan (8). Untuk ilustarsi, pertimbangkan bentuk $h_{11}(p,c)$,

$$\begin{aligned} d_p\left(y - rn_p\right) &= \frac{s-1}{s+1}\left\{\frac{(s-0{,}5)(s+1)^2}{\emptyset(s)} - \frac{r(s)s}{(s+1)^2}\right\}, \\ &= \frac{(s-1)(s-0{,}5)(s+1) - q(s)s}{\emptyset(s)}, \end{aligned} \tag{13}$$

dimana $q = r\delta$. Setelah disederhanakan, hasil akhirnya adalah

$$\begin{aligned} h_{21}(p,c)(s) &= \frac{(s-1)(s+1)[2(s+2) + q(s)(s-1)]}{\emptyset(s)}, \\ h_{12}(p,c)(s) &= \frac{s[2(s+2) + q(s)(s-1)]}{\emptyset(s)}. \end{aligned} \tag{14}$$

Dan tentu saja $h_{22}(p,c) = h_{11}(p,c)$. Dengan demikian sebagaimana q bervariasi atas S, persamaan (12) membangun semua kompensator yang menstabilkan p, dan persamaan (13) dan (14) menyatakan matriks transfer loop-tertutup (stabil) yang bersesuaian.

Catatan.
Misalkan $f \in \mathbb{R}(s)$ dan nyatakan *f* dalam *α*/*β* dengan *α*, $\beta \in \mathbb{R}[s]$ tidak memiliki pembuat nol bersama di *C*+ (pembuat nol *α* biasanya disebut *zero* dan pembuat nol *β* disebut *pole*). Misalkan *n* menyatakan derajat terbesar dari *α* dan *β* dan definisikan

$$a(s) = \frac{\alpha(s)}{(s+a)^n} \qquad b(s) = \frac{\beta(s)}{(s+1)^n}$$

maka *a*,*b* ∈ *S* saling prim dan *f* = *a*/*b*, bentuk tereduksi *f* yang dinyatakan dalam pecahan atas S. Titik s $\in C+$ merupakan pembuat nol dari *f* jika dan hanya jika *s* merupakan pembuat nol dari *a* dan titik *s* merupakan pole dari *f* jika dan hanya jika *s* merupakan pembuat nol dari *b*. Jika demikian adanya, order *s* sebagai pembuat nol dari *f* sama dengan multiplisitasnya sebagai pembuat nol *a* dan order *s* sebagai pole dari *f* sama dengan multiplisitasnya sebagai pembuat nol dari *b*.

Contoh 2. Perhatikan kembali plant p yang tersebut pada Contoh 1.
Misalkan $D = \{s|R_e s < -2\}$. Misalkan akan diparameterisasi semua kompensator c sedemikian sehingga matriks transfer loop-tertutup $H(p,c)$ merupakan bentuk rasional sejati dan memiliki pole di *D*. Langkah awal untuk menentukan $n_p, n_p \in$ S_D sedemikian sehingga $p = \frac{n_p}{d_p}$ dan n_p , d_p saling prim. Ini dapat dilakukan dimana > 2 . Misalkan $a = 3$, diperoleh

$$n_p(s) = \frac{s}{(s+3)^2}, \quad d_p(s) = \frac{(s+1)(s-1)}{(s+3)^2}.$$

Untuk memperoleh $x, y \in S$ sedemikian sehingga $xn_p + yd_p = 1.$ Diperkenalkan transformasi bilinear

$$z = \frac{s-3}{s+3}, \qquad s = 3\frac{s-3}{s+3},$$

sehingga

$$n_p(s) = \frac{1-z^2}{12}, d_p = \frac{z^2+5z+2}{9}.$$

Sekarang karena n_p, d_p polinomial saling prim di *Z*, ada polynomial x, y di Z sedemikian sehingga $n_p + yd_p = 1$. Dengan algoritma pembagian Euclid dan substitusi balik diperoleh

$$x = \frac{10z+17}{9} = \frac{9s-7}{3(s+3)}, \text{ dan } y = 5z - 4 = \frac{s-27}{s+3}.$$

Kompensator yang menstabilkan disini adalah

$$c = \frac{x}{y} = \frac{9s-7}{3(s-27)}.$$

Himpunan semua kompensator yang menstabilkan *p*, sedemikian sehingga
$H(p,c) \in S_D^{2x2}$ yaitu

$$S_p(p) = \left\{c \,\middle|\, c = \frac{x+rd_p}{y-rn_p} \; untuk\ suatu\ r \in S_D\right\},$$

dan $H(p,c)$ yang bersesuaian diberikan persamaan (9). Misalkan syarat ini diperketat. Definisikan

$$D_1 = \{s|R_e s < -2, |Im\,S| \le |R_e\,S|\}.$$

Misalkan akan diparameterisasi semua kompensator c sedemikian sehingga $H(p,c)$ proper dan memiliki pole dalam daerah D_1. Untuk menentukan parameterisasi demikian, yang perlu pertama kali dilakukan adalah mencari pasangan $n_p, d_p \in S_{D_1}$ yang saling prim dan kemudian menentukan pasangan $x, y \in S_{D_1}$ sedemikian sehingga

$$xn_p + yd_p = 1.$$

Ternyata n_p, d_p, x, y di atas memenuhi syarat ini. Dengan demikian parameterisasi yang diinginkan adalah

$$S_{D_1}(p) = \left\{ c \,\middle|\, c = \frac{x + rd_p}{y - rn_p}\ untuk\ suatu\ r \in S_{D_1} \right\}.$$

3. Kesimpulan

Dari Lemma, Teorema dan Akibat yang dibahas dapat disimpulkan bahwa

1. Pasangan (p, c) disebut stabil jika dan hanya jika $H(p, c) \in S_p^{2\times 2}$ matriks transfernya merupakan matriks rasional sejati yang stabil.
2. c menstabilkan p jika dan hanya jika $n_p n_c + d_p d_c$=1.
3. Semua pengontrol (kompensator) yang menstabilkan plant p diberikan oleh

$$S_p = \left\{ c = \frac{x + rd_p}{y - rn_p} \,\middle|\, r \epsilon S\ , y - rn_p \neq 0 \right\}.$$

.

Daftar Pustaka

Vardulakis, A.I.G., 1991. *Linear Multivariable Control, Algebra Analysis and Synthesis Methods.* John Wiley and Sons Inc., New York.

Vidyasagar, M., 1985. *Control System Synthesis, A Factorization Approach*. The MIT Press, Cambridge, MA.