J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 7, No.2, 118-123, Januari 2011

ISBN:1858-1382

Modifikasi Kontrol untuk Sistem Tak Linier Input Tunggal-Output Tunggal

Firman*

Abstrak

Dalam tulisan ini diuraikan sebuah kontrol umpan balik dinamik. Dari kontrol yang diperoleh akan dimodifikasi untuk mendapatkan suatu hukum kontrol dengan cara menambahkan suatu input artifisial. Modifikasi kontrol tersebut untuk memperoleh suatu sistem yang terbatas.

Kata Kunci: *Sistem dengan derajat relatif r, fungsi Lyapunov, kestabilan sistem.*

1. Pendahuluan

Dalam meninjau masalah kestabilan dari sistem nonlinear diperlukan suatu hukum kontrol, seperti hukum kontrol umpan balik dinamik. Dalam penelitian Shimizu et al. (1988), dikemukakan suatu hukum kontrol yang merupakan modifikasi dari kontrol *steepest ascent*, dimana kontrol tersebut dapat menstabilkan sistem dengan pembentukan fungsi objektif yang tidak melibatkan output. Dalam tulisan ini akan dikemukakan suatu hukum kontrol umpan balik dinamik didasarkan pada sebuah optimasi numerik yang didasarkan atas pemecahan persamaan diferensial yang kontinu (Naiborhu, 2007). Dari hukum kontrol umpan balik dinamik yang diperoleh tersebut belum menjamin kestabilan suatu sistem. Untuk itu kontrol tersebut akan dimodifikasi.

2. Sistem Tak Linier Input Tunggal-Output Tunggal

Pandang sistem tak linier dengan input tunggal-ouput tunggal (SISO) dinyatakan dengan

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x), \end{aligned} \tag{1}$$

dimana $x \in \Re^n$, f dan g adalah fungsi kontinu atas $\Re^n$, h fungsi bernilai real dan u adalah skalar. Sistem diatas dikatakan mempunyai derajat relatif r pada x^0, jika

(i) $L_g L_f^k h(x) = 0 \;\; \forall k < r-1$

(ii) $L_g L_f^{r-1} h(x^0) \neq 0$ (Isidori, 1995).

Misalkan

$$\begin{aligned} y^{(1)}(t) &= \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial dx}{\partial dt} = \frac{\partial h}{\partial x}(f\big(x(t)\big) + g(x(t))u(t) \\ &= L_f h\big(x(t)\big) + L_g h\big(x(t)\big)u(t). \end{aligned}$$

---

* *Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10, Tamalanrea, Makassar, email: firman_unhas@yahoo.co.id.*

Misalkan r adalah derajat relatif dan $r \ < 1$, maka $L_g h\big(x(t)\big) = 0$ dan karena itu

$$y^{(1)}(t) = L_f h\big(x(t)\big).$$

Jadi

$$y^{(2)}(t) = \frac{\partial L_f h}{\partial x}\frac{\partial dx}{\partial dt} = \frac{\partial L_f h}{\partial x}(f\big(x(t)\big) + g(x(t))u(t)$$
$$= L_f^2 h\big(x(t)\big) + L_g L_f h\big(x(t)\big)u(t)$$

Untuk sistem yang mempunyai derajat relatif lebih dari dua, maka $L_g L_f h\big(x(t)\big)u(t) = 0$ dan $y^{(2)}(t) = L_f^2 h\big(x(t)\big)$. Kemudian secara berlanjut, diperoleh

$$y^{(k)}(t) = L_f^k h\big(x(t)\big), \quad \forall k \ < r$$
$$y^{(2)}(t) = L_f^r h\big(x(t)\big) + L_g L_f^{r-1}\big(x(t)\big)u(t)$$

Misalkan sistem di atas mempunyai derajat relatif r, maka dapat ditulis

$$y^{(r)} = a(x) + b(x),$$

dimana $a(x) = L_f^r h(x)$ dan $b(x) = L_g L_f^{r-1}$ (Isidori, 1995).

3. Desain kontrol

Dalam menentukan suatu kontrol umpan balik dinamik didasarkan pada sebuah metode optimasi numerik yang didasarkan atas pemecahan persamaan diferensial yang kontinu. Pertama-tama perhatikan masalah meminimumkan fungsi objektif $G(u)$, dengan $G: R^r \to R$. Misalkan u^* akan memberikan suatu minimum lokal untuk fungsi objektif, maka akan diperoleh

$$G(u^*) \ \leq G(u^* + \Delta u),$$

untuk suatu Δu yang sangat kecil. Dengan Teorema Taylor diperoleh

$$G(u^* + \Delta u) = G(u^*) + \frac{\partial G(u^*)}{\partial u}\Delta u + \ \mathrm{o}(\Delta u).$$

Misalkan $\Delta G|_{u^*} \ = G(u^* + \Delta u) - G(u^*)$, maka

$$\Delta G|_{u^*} \approx \ \frac{\partial G(u^*)}{\partial u}\Delta u \ \geq 0.$$

Dengan membagi persamaan tersebut dengan Δt dan misalkan $\Delta u \to 0$ dan $\Delta t \to 0$, maka

$$\left.\frac{dG}{dt}\right|_{u^*} = \ \frac{\partial G(u^*)}{\partial u}u^* \ \geq 0.$$

Berikut ini akan ditentukan suatu fungsi $f(u)$ sedemikian hingga jika dipecahkan persamaan diferensial

$$\dot{u} = f(u) \tag{2}$$

dengan syarat awal $u(0)$, maka nilai fungsi objektif akan turun sepanjang trajektori dari persamaan (2). Turunan $G(u)$ terhadap waktu sepanjang trajektori yang dihasilkan oleh solusi (2) untuk $u = u^*$ adalah

$$\left.\frac{dG}{dt}\right|_{u^*} = \left.\frac{dG}{du}\right|_{u^*} f(u^*) \geq 0.$$

Karena diinginkan solusi pada suatu trajektori yang akan mendapatkan suatu minimum, maka pada pengamatan di atas dipilih

$$f(u) = -\left[\frac{\partial G}{\partial u}\right]^T. \tag{3}$$

Dan persamaan akan berubah menjadi

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial G}{\partial u} f(u) < 0, \forall \neq u^* . \tag{4}$$

Jadi untuk memecahkan masalah meminimumkan fungsi objektif $G(.)$ dalam suatu ruang kontrol tanpa kendala, diperlukan pemilihan kondisi awal yang layak untuk u dan mengintegrasikan

$$\dot{u} = -\left[\frac{\partial G}{\partial u}\right]^T. \tag{5}$$

Akan dipertimbangkan untuk mendesain suatu hukum kontrol $u(.)$ berdasarkan atas sifat-sifat dari persamaan diferensial biasa orde tinggi

$$c_r y^{(r)}(t) + c_{r-1} y^{(r-1)}(t) + \ ... + \ c_1 \dot{y}(t) + c_0 y(t) = 0, \tag{6}$$

dimana r adalah derajat relatif dari sistem (1). Jika polinomial

$$p(s) = \ c_r s^r + c_{r-1} s^{r-1} + \ ... + \ c_1 s + c_0 \tag{7}$$

adalah Hurwitz, maka solusi persamaan differensial akan menuju nol untuk $t \to \infty$. Konstanta-konstanta c_i dapat dipilih sedemikian rupa sehingga polinomial (7) adalah Hurwitz (Barnet dan Cameron, 1990).

Misalkan sistem (1) mempunyai derajat relatif r. Dari (6) diperoleh

$$c_r \frac{\partial \beta^{r-1}(x)}{\partial x} (f(x) + \ g(x)u) + \ c_{r-1} y^{(r-1)} + \ ... + \ c_1 \dot{y} + c_0 y = 0. \tag{8}$$

Dari persamaan (8) diperoleh kontrol input u sebagai berikut:

$$u = \ \frac{c_r \frac{\partial \beta^{r-1}(x)}{\partial x} f(x) + \left(\sum_{j-0}^{r-1} c_j y^{(j)}\right)}{c_r \frac{\partial \beta^{r-1}(x)}{\partial x} g(x)}, \tag{9}$$

dengan $\frac{\partial \beta^{r-1}(x)}{\partial x} g(x) \neq 0$. Namun dalam kasus hukum kontrol statis sulit untuk diterapkan. Jadi akan dikembangkan suatu hukum kontrol dinamis untuk mengatur output dari sistem yang secara global didasarkan pada sistem dengan derajat relatif terdefinisi dengan baik.

4. Pengembangan Hukum Kontrol Dinamis

Berikut ini akan diturunkan suatu hukum kontrol $u(.)$ sedemikian sehingga fungsi obyektif menjadi minimum dan keadaan $x(t)$ adalah terbatas. Masalah ini dapat diformulasikan sebagai berikut (Naiborhu, 2007). Definisikan fungsi obyektif

$$F(y, \dot{y}, ..., y^r) = \ \left(\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)}\right)^2. \tag{10}$$

Pendefinisian fungsi obyektif seperti itu karena

1. Kontrol input u dapat di desain apabila ada suatu hubungan yang eksplisit antara input u dengan output y. Jadi fungsi objektif harus merupakan sebuah fungsi dari $y^{(r)}$.
2. Memenuhi fungsi definit positif. Untuk memecahkan masalah minimisasi di atas, maka seperti telah dibahas sebelumnya, kontrol input u akan ditentukan dari persamaan diferensial berikut:

$$\dot{u} = -\frac{dF}{du} = \ -2C_r \left(\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)}\right) \frac{\partial \beta^{r-1}(x)}{\partial x} g(x). \tag{11}$$

Selanjutnya akan dihitung turunan fungsi objektif terhadap waktu sepanjang trajektori dari sistem yang diperluas, yaitu

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{12}$$

$$\dot{u} = -2C_r\left(\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)}\right)\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x}g(x). \tag{13}$$

Maka

$$F(y, \dot{y}, \dots, y^r) = 2\left(\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)}\right)\left(\sum_{j=1}^{r} c_{j-1} y^j + c_r \frac{d}{dt}(y^{(r)})\right). \tag{14}$$

Dengan substitusi (11) ke persamaan (14), diperoleh

$$\begin{aligned}
\dot{F}(y, \dot{y}, \dots, y^r)& \\
&= 2\left(\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)}\right)\left[\sum_{j=1}^{r} c_{j-1} y^j + c_r\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x}f(x)\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x}g(x)\right)u + \left(\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x}g(x)\right)\dot{u}\right\}\right] \\
&= 2\left(\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)}\right)\left[\sum_{j=1}^{r} c_{j-1} y^j + c_r\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x}f(x)\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x}f(x)\right)u\right\}\right] + 2c_r\left(\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)}\right)\left(\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x}g(x)\right) \\
&\quad \times\left\{-2c_r\left(\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)}\right)\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x}g(x)\right\} \\
&= 2\left(\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)}\right)\left[\sum_{j=1}^{r} c_{j-1} y^j + c_r\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x}f(x)\right)\right.\right. \\
&\quad \left.\left.+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x}g(x)\right)u\right\}\right] - 4c_r^2\left(\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)}\right)^2\left(\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x}g(x)\right)^2.
\end{aligned}$$

Dari persamaan tersebut, terlihat bahwa nilai turunan fungsi obyektif terhadap waktu sepanjang trajektori (12) sampai (13) adalah tidak dapat dijamin akan lebih kecil dari nol untuk semua $t \geq 0$. Perhatikan sistem yang diperluas pada (12) dan (13) dan turunan fungsi objektif terhadap waktu, disini tidak ditemukan suatu variabel yang dapat digunakan sedemikian sehingga turunan fungsi obyektif terhadap waktu menjadi lebih kecil dari nol. Jadi akan dimodifikasi kontrol yang dinyatakan dalam persamaan dengan menambahkan sebuah input artivisial v. Akibatnya sistem yang diperluas menjadi

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \tag{15}$$

$$\dot{u} = -2c_r\left(\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)}\right)\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x}g(x) + v\ . \tag{16}$$

Dengan cara yang sama, akan dihitung turunan fungsi obyektif terhadap waktu sepanjang trajektori (15)-(16), sehingga diperoleh

$$\dot{F}(y,\dot{y},\dots,y^r) = 2\left(\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)}\right)\left[\sum_{j=0}^{r} c_{j-1} y^j + c_r\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x} f(x)\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x} g(x)\right)u\right\}\right] + 2\left(\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)}\right)\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x} g(x) \times \left\{-2c_r\left(\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)}\right)\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x} g(x) + v\right\}$$

$$2\left(\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)}\right)\left[\sum_{j=0}^{r} c_{j-1} y^j + c_r\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x} f(x)\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x} g(x)\right)u\right\}\right] - 4{c_r}^2\left(\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)}\right)^2\left(\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x} g(x)\right)^2 + c_r\left(\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)}\right)\left(\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x} g(x)\right)v \quad (17)$$

Dalam persamaan (17), dapat dipilih input artivisial v sedemikian sehingga $\dot{F}(y,\dot{y},\dots,y^r)$ dapat dibuat lebih kecil dari nol. Jika dipilih v sebagai berikut:

$$v = -\frac{1}{c_r\left(\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x} g(x)\right)}\left[\sum_{j=1}^{r} c_{j-1} y^j + c_r\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x} f(x)\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x} g(x)\right)u\right\}\right] \quad (18)$$

Maka $\dot{F}(y,\dot{y},\dots,y^r) = -\left(\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)}\right)^2\left(\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{\partial x} g(x)\right)^2.$ (19)

Dari persamaan (19) terlihat bahwa nilai turunan fungsi obyektif terhadap waktu (10) sepanjang trajektori (15)-(16) dapat dibuat lebih kecil dari nol untuk $\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)} \neq 0$. Penambahan input artifisial v ke dalam kontrol seperti pada persamaan (11) digunakan untuk menjamin bahwa fungsi obyektif (10) akan turun menjadi nol. Dengan alasan ini, maka cukup realistis untuk mengambil nilai v menjadi nol, jika $\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)} = 0$. Jadi untuk $\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)} \neq 0$ diperoleh

$$v = -\frac{1}{c_r\left(\frac{\partial\beta^{r-1}}{x} g(x)\right)}\left[\sum_{j=1}^{r} c_{j-1} y^j + c_r\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{x} f(x)\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\beta^{r-1}(x)}{x} g(x)\right)u\right\}\right].$$

dan untuk $\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)} = 0, v = 0$.

Pandang persamaan (19). Misal $\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)} = 0, \forall\, t \geq t_1 > 0$. Dari persamaan (19), $\dot{F}(y,\dot{y},\dots,y^r)$ telah tercapai. Jadi apabila dipilih $c_j, j = 0,1\dots,r$ sedemikian sehingga polinomial (6) adalah Hurwitz, maka y menuju 0 untuk $t \to \infty$. Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa kontrol input u adalah terbatas. Dari penjelasan di atas diketahui bahwa fungsi obyektif turun hingga $t = t_1$. Karena itu keadaan x dan kontrol input u adalah terbatas untuk semua $t \in [t_0, t_1]$. Untuk $t > t_1$, $\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)} = 0$. Jadi $v = 0$. Dari (13) untuk $t > t_1$, kontrol input u menjadi konstan. Jadi kontrol input u adalah terbatas untuk setiap t.

Jadi dengan memodifikasi kontrol pada persamaan (13), maka diperoleh proposisi sebagai berikut. Misalkan sistem tak linear input tunggal-output tunggal

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$
$$y = (x),$$

dengan derajat relatif $r \leq n$. Pilih konstanta c_i sedemikian hingga polynomial

$$p(s) = c_0 + c_1 s + \cdots + c_{r-1} s^{r-1} + c_r s^r$$

adalah Hurwitz. Dengan menggunakan kontrol umpan balik dinamik

$$\dot{u} = -2c_j \left(\sum_{j=0}^{r} c_j y^{(j)}\right) \frac{\partial \beta^{r-1}(x)}{dx} g(x) + v$$

dengan v seperti pada (15), maka y menuju nol dan x adalah terbatas jika t menuju tak berhingga.

5. Kesimpulan

Pada paper ini diperoleh hasil bahwa untuk memperoleh suatu sistem yang terbatas, kontrol umpan balik dinamik dimodifikasi dengan cara menambahkan suatu input artifisial pada sistem yang diperluas.

Daftar Pustaka

Barnet, S. dan Cameron, R.G., 1990. *Introduction to Mathematical Control Theory*. Oxford University Press.

Isidori, A. dan Heidelberg, 1995. *Nonlinear Control Systems, Third Edition*. Springer-Verlag, Berlin.

Naiborhu, J., 2007. Output tracking control of nonlinear non-minimum phase systems by gradient descent control. *Presented in SEAMS-Gadjah Mada University International Conference on Mathematics and Its Applications*, Yogyakarta, 24 – 27 Juli 2007.

Shimizu, K., Ito, S., dan Suzuki, S., 1988. Tracking control of general nonlinear systems by direct gradient descent control. *Preprints of the 4th IFAC Symposium on Nonlinear Control System Design*, 98, pp. 185-190.