ISBN:1858-1382

J M S K

Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 8, No.1, 12-24, Juli 2011

Kontrol Optimal Upaya Pencegahan Infeksi Virus Flu Burung H5N1 dalam Populasi Burung dan Manusia

Kasbawati*

Abstrak

Pada penelitian ini dikaji mengenai aplikasi dari teori kontrol optimal pada sistem persamaan differensial dari model matematika penyakit flu burung yang telah dibentuk. Pada penelitian sebelumnya diketahui bahwa penyebaran virus flu burung sangat bergantung pada keberadaan populasi yang infektif sehingga perlu dilakukan pengontrolan terhadap populasi tersebut melalui suatu treatment tertentu. Teori kontrol optimal diaplikasikan pada model untuk mendapatkan bentuk kontrol yang optimal sehingga jumlah populasi yang infektif dapat ditekan secara maksimal. Target utama yang akan dicapai pada penelitian ini adalah menemukan bentuk kontrol optimal yang tunggal yang mana kontrol optimal tersebut dapat digambarkan sebagai tingkat efisiensi dari vaksinasi pada burung sehat dan pengobatan pada penderita flu burung yang dilakukan untuk menurunkan jumlah infeksi dan mencegah terciptanya infeksi baru dalam sistem.

Kata kunci: Penyakit Flu Burung, model Epidemiologi, kontrol optimal, prinsip Pontryagin.

Abstract

In this paper, we study about the application of the optimal control theory on the system of differential equations of mathematical model of avian flu disease. In the previous studies we found that the spread of bird flu virus was very dependent on the presence of an infective population. As a result, controlling the population needs to be done through a special treatment. Optimal control theory was applied to the model to obtain the optimal form of the control so that the number of infective population can be suppressed to the fullest. The main target in this paper is to find a uniq optimal control where the optimal control can be described as an efficiency rate of vaccination in healthy birds and an efficiency rate of treatment in patients. These two controls are expected to reduce the number of infections and prevent the creation of new infections in the system.

Keywords: Avian Influenza disease, mathematical epidemiology, optimal control, Pontryagin principle.

1. Pendahuluan

Penyakit flu burung adalah penyakit menular yang disebabkan oleh virus influenza tipe A yang dapat menyebabkan epidemi dan pandemi. Virus tersebut lebih mudah menular dari unggas ke manusia dibandingkan dengan dari manusia ke manusia. Wabah influensa unggas yang sangat patogen, secara keseluruhan dapat mengakibatkan kehancuran bagi industri ternak unggas, apalagi bagi peternak individual [6]. Kerugian ekonomis biasanya hanya sebagian yang secara langsung diakibatkan oleh kematian unggas yang terinfeksi H5N1. Berbagai upaya yang

* *Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10 Makassar, kasbawati@gmail.com*

dilakukan untuk mencegah penyebaran lebih lanjut juga memerlukan biaya yang besar. Sekali wabah sudah meluas, pengendaliannya semakin sulit dilakukan dan mungkin memerlukan waktu sampai bertahun-tahun [1]. Kontrol optimal merupakan suatu metode standar yang digunakan untuk menyelesaikan masalah optimasi dari suatu sistem dinamik kontinu. Pendefinisian fungsi objektif didasarkan pada tujuan yang akan dicapai, misalnya ingin mengontrol gerak roket yang meminimumkan jumlah bahan bakar yang digunakan, mengatur laju produksi barang sehingga dapat memaksimumkan laba yang diperoleh, dan sebagainya. Beberapa peneliti matematika yang bekerja dengan kontrol optimal pada kasus penyakit yang infektif di antaranya adalah Hattaf K., dkk pada tahun 2009 [2], Jung E. dkk pada tahun 2002 [3], dan Renee Fister K. pada tahun 1998 [7].

Pada penelitian sebelumnya, lihat [4], secara matematis diperoleh hasil bahwa beberapa upaya yang dapat dilakukan untuk mencegah terjadinya wabah yaitu dengan melakukan vaksinasi pada semua unggas peliharaan, mengisolasi semua burung maupun manusia yang diduga terjangkit virus AI, dan meningkatkan pengobatan pada penderita flu burung. Pada kenyataannya hal ini tentunya membutuhkan biaya yang cukup besar, akibatnya diperlukan adanya kajian untuk mengetahui tingkat optimal dari vaksinasi dan pengobatan yang dilakukan sehingga manfaat yang diperoleh cukup tinggi dengan pengeluaran biaya yang serendah mungkin. Pada penelitian lanjutan ini, akan diaplikasikan teori kontrol optimum pada sistem persamaan differensial dari model matematika penyebaran virus flu burung yang terbentuk, untuk menentukan bentuk kontrol optimum yang tepat yang dapat digunakan untuk menekan laju pertambahan jumlah burung dan manusia yang infektif.

2. Model Matematika

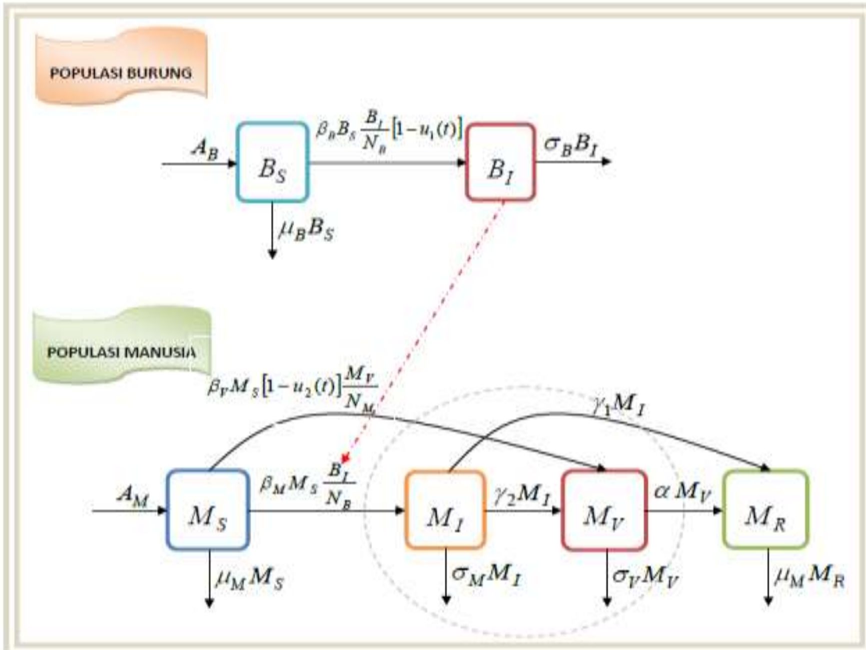
Tinjau kembali model matematika dari penyakit Flu Burung pada populasi burung atau unggas dan manusia dalam bentuk sistem persamaan differensial tak linier enam dimensi [4], yaitu

$$
\begin{aligned}
\frac{dB_S(t)}{dt} &= A_B - \beta_B B_S(t)\frac{B_I(t)}{N_B}(1-v) - \mu_B B_S(t),\\
\frac{dB_I(t)}{dt} &= \beta_B B_S(t)\frac{B_I(t)}{N_B}(1-v) - \sigma_B B_I(t),\\
\frac{dM_S(t)}{dt} &= A_M - \beta_M M_S(t)\frac{B_I(t)}{N_B} - \beta_V M_S(t)\frac{M_V(t)}{N_M} - \mu_M M_S(t),\\
\frac{dM_I(t)}{dt} &= \beta_M M_S(t)\frac{B_I(t)}{N_B} - (\gamma_1+\gamma_2)M_I(t) - \sigma_M M_I(t),\\
\frac{dM_V(t)}{dt} &= \beta_V M_S(t)\frac{M_V(t)}{N_M} + \gamma_2 M_I(t) - \alpha M_V(t) - \sigma_V M_V(t),\\
\frac{dM_R(t)}{dt} &= \gamma_1 M_I(t) + \alpha M_V(t) - \mu_M M_R(t),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

dengan $N_B = B_S + B_I$ dan $N_M = M_S + M_I + M_V + M_R$. Semua parameter dalam persamaan (1) diasumsikan positif. Proses pembentukan model matematika dalam persamaan (1) dapat dilihat dalam [4]. Diagram skematik mengenai pembagian kompartemen model dalam persamaan (1) dapat dilihat dalam Gambar 2 dan keterangan mengenai satuan dari semua variabel dan parameter model diberikan secara ringkas dalam Tabel 1.

Tabel 1. Keterangan Variabel dan Parameter Model dalam Persamaan (1), lihat [4].

Variabel/ Parameter	**Interpretasi**	**Satuan**
N_B	Total populasi burung pada saat t	Ekor
N_M	Total populasi manusia pada saat t	Orang
$B_S(t)$	Jumlah burung sehat pada saat t	Ekor
$B_I(t)$	Jumlah burung yang terinfeksi virus AI pada saat t	Ekor
$M_S(t)$	Jumlah manusia sehat pada saat t	Orang
$M_I(t)$	Jumlah manusia yang terjangkit virus AI pada saat t	Orang
$M_V(t)$	Jumlah manusia yang terjangkit virus hasil mutasi virus AI pada saat t	Orang
$M_R(t)$	Jumlah manusia yang sembuh pada saat t	Orang
A_M	Banyaknya manusia sehat yang lahir secara alami persatuan waktu	Orang/waktu
A_B	Banyaknya burung sehat yang lahir secara alami	Ekor/waktu
β_B	Rata-rata kontak yang terjadi antara burung sehat dengan burung terinfeksi	1/waktu
μ_B	Rata-rata kematian alami burung sehat	1/waktu
μ_M	Rata-rata kematian alami manusia sehat	1/waktu
σ_B	Rata-rata kematian burung akibat infeksi virus AI	1/waktu
β_M	Rata-rata kontak yang terjadi antara manusia sehat dengan burung terinfeksi	1/waktu
γ_1	Rata-rata banyaknya manusia yang sembuh dari penyakit	1/waktu
σ_M	Rata-rata banyaknya manusia yang mati akibat penyakit flu burung	1/waktu
γ_2	Rata-rata banyaknya manusia yang terinfeksi virus AI yang kemudian bermutasi sehingga dapat menularkan penyakit ke manusia sehat lain	1/waktu
β_V	Rata-rata kontak yang terjadi antara manusia sehat dengan manusia yang terjangkit virus mutan AI yang bersifat infektif	1/waktu
α	Rata-rata banyaknya manusia yang sembuh dari penyakit	1/waktu
σ_V	Rata-rata banyaknya manusia yang meninggal akibat terinfeksi virus mutan AI	1/waktu



Gambar 1. Diagram Skematik Model Penyebaran Virus AI pada Populasi Burung dan Manusia [4].

Pada penelitian sebelumnya, lihat [4], secara matematis diperoleh hasil bahwa beberapa upaya yang dapat dilakukan untuk mencegah terjadinya wabah yaitu dengan melakukan vaksinasi pada semua unggas peliharaan, mengisolasi semua burung maupun manusia yang diduga terjangkit virus AI, dan meningkatkan pengobatan pada penderita flu burung. Hal ini tentunya membutuhkan biaya yang cukup besar akibatnya perlu ditentukan bentuk kontrol optimal dari vaksinasi dan pengobatan yang dilakukan agar manfaat yang diperoleh cukup tinggi dengan pengeluaran biaya yang serendah mungkin.

Pada penelitian lanjutan ini, akan diaplikasikan teori kontrol optimum pada sistem persamaan differensial dari model matematika penyebaran virus flu burung yang terbentuk dalam persamaan (1), untuk menentukan bentuk kontrol optimum yang tepat yang dapat digunakan untuk menekan laju pertambahan jumlah burung dan manusia yang infektif. Dalam hal ini akan ditentukan suatu kontrol $u(t)$ yang dapat menekan laju pertambahan populasi B_I dan M_V .

Secara matematis, model deterministik penyakit flu burung yang mengandung kontrol dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dM_S(t)}{dt} &= A_M - \beta_M M_S(t)\frac{B_I(t)}{N_B} - \beta_V M_S(t)\frac{M_V(t)}{N_M}\left[1-u_2(t)\right] - \mu_M M_S(t),\\
\frac{dM_I(t)}{dt} &= \beta_M M_S(t)\frac{B_I(t)}{N_B} - \gamma_1 M_I(t) - \gamma_2 M_I(t) - \sigma_M M_I(t),\\
\frac{dM_V(t)}{dt} &= \beta_V M_S(t)\frac{M_V(t)}{N_M}\left[1-u_2(t)\right] + \gamma_2 M_I(t) - \alpha M_V(t) - \sigma_V M_V(t),\\
\frac{dM_R(t)}{dt} &= \gamma_1 M_I(t) + \alpha M_V(t) - \mu_M M_R(t).
\end{aligned} \tag{2a}$$

$$\frac{dB_S(t)}{dt} = A_B - \beta_B B_S(t)\frac{B_I(t)}{N_B}\left[1-u_1(t)\right] - \mu_B B_S(t),$$
$$\frac{dB_I(t)}{dt} = \beta_B B_S(t)\frac{B_I(t)}{N_B}\left[1-u_1(t)\right] - \sigma_B B_I(t), \tag{2b}$$

Fungsi $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ dalam persamaan (2) merupakan fungsi kontrol yang terbatas (*bounded*) dan terintegral Lebesgue (*Lebesgue integrable functions*), lihat [5]. Kontrol $u_1(t)$ menunjukkan tingkat efisiensi dari vaksinasi yang diberikan pada burung sehat sehingga jumlah burung yang terinfeksi dapat dikurangi, dan fungsi $u_2(t)$ menunjukkan tingkat efisiensi pengobatan yang diberikan pada penderita flu burung yang infektif akibat terinfeksi mutasi virus flu burung menjadi virus yang ganas dan infektif. Jika $u_1(t) = u_2(t) = 1$ maka treatment vaksinasi dan pengobatan yang diberikan sangat efektif (100% efektif). Sebaliknya jika $u_1(t) = u_2(t) = 0$ maka treatment vaksinasi dan pengobatan yang diberikan sama sekali tidak efektif dalam mengurangi jumlah kelas yang infektif. Jadi akan dicari bentuk dari $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ yang optimal yaitu $u_1^*(t)$ dan $u_2^*(t)$, dimana $0 \le u_1^*(t) \le 1$ dan $0 \le u_2^*(t) \le 1$, sehingga upaya treatment yang dilakukan dapat maksimal dengan biaya yang minimum.

3. Masalah Kontrol Optimal

Pada bagian ini akan didefinisikan fungsi objektif yang akan diminimumkan dan ruang kontrol dari sistem yang diperkenankan. Pada penelitian ini diasumsikan bahwa vaksinasi dan pengobatan diberikan dalam interval waktu tertentu, dan akan dicari nilai optimanya dalam interval waktu tersebut. Akibatnya akan ditentukan bentuk kontrol *u* dalam interval waktu tertentu. Misalkan didefinisikan himpunan kontrol,

$$U = \left\{ (u_1, u_2) \;\middle|\; u_i \text{ fungsi terukur}, \ 0 \le u_i \le 1,\ t \in [0, t_f],\ i = 1,2 \right\}, \tag{3}$$

dan fungsi objektif yang akan diminimumkan yaitu

$$J(u_1, u_2) = \int_0^{t_f} \left(B_I(t) + M_V(t) + \frac{C_1}{2}u_1^2 + \frac{C_2}{2}u_2^2 \right) dt, \tag{4}$$

dimana B_I merupakan jumlah burung yang infektif, M_V merupakan jumlah manusia yang infektif, dan koefisien $C_1 \ge 0$ dan $C_2 \ge 0$ merupakan koefisien bobot untuk meminimumkan jumlah infektif yang didasarkan pada manfaat (*benefits*) dan biaya (*costs*) dari treatment yang dilakukan. Nilai C_1 dan C_2 merupakan nilai penyeimbang antara manfaat dan biaya dari kontrol yang dilakukan. Dengan kata lain, akan diminimumkan jumlah burung terinfeksi dan manusia yang terinfeksi melalui proses treatment dengan biaya treatment yang minimum. Fungsi u_i berbentuk kuadratik dengan tujuan agar integran dari fungsi objektif J memenuhi sifat fungsi konkaf sehingga eksistensi dari kontrol yang optimal dapat dijamin. Jadi akan dicari $u_1, u_2 \in U$ yang optimal sedemikian sehingga

$$J\left(u_1^*, u_2^*\right) = \min_U J(u_1, u_2) . \tag{5}$$

Syarat perlu yang harus dipenuhi oleh suatu kontrol optimal diberikan dalam prinsip Maksimum Pontryagin [5]. Misalkan sistem (2) dituliskan dalam bentuk,

$$\begin{aligned}
\frac{dB_S(t)}{dt} &= f_1\left(B_S, B_I, M_S, M_I, M_V, M_R\right),\\
\frac{dB_I(t)}{dt} &= f_2\left(B_S, B_I, M_S, M_I, M_V, M_R\right),\\
\frac{dM_S(t)}{dt} &= f_3\left(B_S, B_I, M_S, M_I, M_V, M_R\right),\\
\frac{dM_I(t)}{dt} &= f_4\left(B_S, B_I, M_S, M_I, M_V, M_R\right),\\
\frac{dM_V(t)}{dt} &= f_5\left(B_S, B_I, M_S, M_I, M_V, M_R\right),\\
\frac{dM_R(t)}{dt} &= f_6\left(B_S, B_I, M_S, M_I, M_V, M_R\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Proses penentuan kontrol, state, dan co-state yang optimal diberikan dalam Teorema 1 berikut.

Teorema 1.

Terdapat kontrol optimal u_1^* dan u_2^* yang bersesuaian dengan solusi optimal B_S^*, B_I^*, M_S^*, M_I^*, M_V^*, M_R^*, dan J^* yang akan meminimumkan $J(u_1, u_2)$ dalam U. Terdapat fungsi adjoin $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_6$ yang memenuhi persamaan

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1 &= \lambda_1\left[\beta_B \frac{B_I^*}{N_B}[1-u_1] + \mu_B\right] - \lambda_2\left[\beta_B \frac{B_I^*}{N_B}[1-u_1]\right],\\
\dot{\lambda}_2 &= \left(-1 + \lambda_1\left[\beta_B \frac{B_S^*}{N_B}[1-u_1]\right] - \lambda_2\left[\beta_B \frac{B_S^*}{N_B}[1-u_1] - \sigma_B\right] + \lambda_3 \frac{\beta_M M_S^*}{N_B} - \lambda_4 \frac{\beta_M M_S^*}{N_B}\right),\\
\dot{\lambda}_3 &= \left(\lambda_3\left[\frac{\beta_M B_I^*}{N_B} + \frac{\beta_V M_V^*}{N_M}[1-u_2] + \mu_M\right] - \lambda_4 \frac{\beta_M B_I^*}{N_B} - \lambda_5 \frac{\beta_V M_V^*}{N_M}[1-u_2]\right),\\
\dot{\lambda}_4 &= \lambda_4\left[\gamma_1 + \gamma_2 + \sigma_M\right] - \lambda_5\gamma_2 - \lambda_6 ,\\
\dot{\lambda}_5 &= \left(-1 + \lambda_3\beta_V \frac{M_S^*}{N_M}[1-u_2] - \lambda_5\left[\beta_V \frac{M_S^*}{N_M}[1-u_2] - \alpha - \sigma_V\right] - \lambda_6\alpha\right),\\
\dot{\lambda}_6 &= \lambda_6\mu_M ,
\end{aligned}$$

dengan syarat batas (kondisi tranversal), $\lambda_j(t_f) = 0,\ \forall\ j = 1,2,\cdots,6.$

Bentuk kontrol optimal u_1^* dan u_2^* adalah

$$u_1^* = \min\left\{\max\left\{0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\beta_B B_S^* B_I^*}{C_1 N_B}\right\}, 1\right\},$$

$$u_2^* = \min\left\{\max\left\{0, \frac{(\lambda_5 - \lambda_3)\beta_V M_S^* M_V^*}{C_2 N_M}\right\}, 1\right\}.$$

Bukti:
Tinjau bentuk fungsi objektif *J* dalam persamaan (4).
Bentuk integran dari fungsi *J* memenuhi sifat fungsi konkaf terhadap *u*. Selain itu, sifat keterbatasan dari solusi sistem dan sifat fungsi Lipschitz dipenuhi sistem terhadap variabel sistem. Akibatnya syarat eksistensi dari kontrol optimal dapat dijamin [2,3,7].
Dengan menggunakan prinsip Maksimum Pontryagin diperoleh persamaan Hamilton untuk sistem (6) dan fungsi objektif (4), yaitu

$$H = B_I(t) + M_V(t) + \frac{C_1}{2}u_1^2 + \frac{C_2}{2}u_2^2 + \sum_{i=1}^{6}\lambda_i f_i \,. \tag{7}$$

dimana λ_i merupakan fungsi adjoin (pengali Lagrange) dan f_i adalah fungsi dalam persamaan (6). Melalui persamaan (7) diperoleh persamaan State, Co-State, dan kondisi stationer dari sistem. Persamaan state yang diperoleh dari (7) adalah

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial}{\partial \lambda_1}\left[B_I(t) + M_V(t) + \frac{C_1}{2}u_1^2 + \frac{C_2}{2}u_2^2 + \sum_{i=1}^{6}\lambda_i f_i\right]$$

$$= A_B - \beta_B B_S(t)\frac{B_I(t)}{N_B}[1 - u_1(t)] - \mu_B B_S(t),$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial}{\partial \lambda_2}\left[B_I(t) + M_V(t) + \frac{C_1}{2}u_1^2 + \frac{C_2}{2}u_2^2 + \sum_{i=1}^{6}\lambda_i f_i\right]$$

$$= \beta_B B_S(t)\frac{B_I(t)}{N_B}[1 - u_1(t)] - \sigma_B B_I(t),$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_3} = \frac{\partial}{\partial \lambda_3}\left[B_I(t) + M_V(t) + \frac{C_1}{2}u_1^2 + \frac{C_2}{2}u_2^2 + \sum_{i=1}^{6}\lambda_i f_i\right]$$

$$= A_M - \beta_M M_S(t)\frac{B_I(t)}{N_B} - \beta_V M_S(t)\frac{M_V(t)}{N_M}[1 - u_2(t)] - \mu_M M_S(t),$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_4} = \frac{\partial}{\partial \lambda_4}\left[B_I(t) + M_V(t) + \frac{C_1}{2}u_1^2 + \frac{C_2}{2}u_2^2 + \sum_{i=1}^{6}\lambda_i f_i\right]$$

$$= \beta_M M_S(t)\frac{B_I(t)}{N_B} - \gamma_1 M_I(t) - \gamma_2 M_I(t) - \sigma_M M_I(t),$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_5} = \frac{\partial}{\partial \lambda_5}\left[B_I(t) + M_V(t) + \frac{C_1}{2}u_1^2 + \frac{C_2}{2}u_2^2 + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i f_i \right]$$
$$= \beta_V M_S(t)\frac{M_V(t)}{N_M}\left[1-u_2(t)\right] + \gamma_2 M_I(t) - \alpha M_V(t) - \sigma_V M_V(t),$$
$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_6} = \frac{\partial}{\partial \lambda_6}\left[B_I(t) + M_V(t) + \frac{C_1}{2}u_1^2 + \frac{C_2}{2}u_2^2 + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i f_i \right]$$
$$= \gamma_1 M_I(t) + \alpha M_V(t) - \mu_M M_R(t).$$

Persamaan Co-State yang diperoleh dari (7) adalah

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial B_S} = -\frac{\partial}{\partial B_S}\left[B_I(t) + M_V(t) + \frac{C_1}{2}u_1^2 + \frac{C_2}{2}u_2^2 + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i f_i \right]$$
$$= \lambda_1\left[\beta_B \frac{B_I(t)}{N_B}\left[1-u_1(t)\right] + \mu_B \right] - \lambda_2\left[\beta_B \frac{B_I(t)}{N_B}\left[1-u_1(t)\right]\right],$$
$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial B_I} = -\frac{\partial}{\partial B_I}\left[B_I(t) + M_V(t) + \frac{C_1}{2}u_1^2 + \frac{C_2}{2}u_2^2 + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i f_i \right]$$
$$= \begin{pmatrix} -1 + \lambda_1\left[\beta_B \frac{B_S(t)}{N_B}\left[1-u_1(t)\right]\right] - \lambda_2\left[\beta_B \frac{B_S(t)}{N_B}\left[1-u_1(t)\right] - \sigma_B \right] \\ + \lambda_3\left[\beta_M \frac{M_S(t)}{N_B}\right] - \lambda_4\left[\beta_M \frac{M_S(t)}{N_B}\right] \end{pmatrix},$$
$$\dot{\lambda}_3 = -\frac{\partial H}{\partial M_S} = -\frac{\partial}{\partial M_S}\left[B_I(t) + M_V(t) + \frac{C_1}{2}u_1^2 + \frac{C_2}{2}u_2^2 + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i f_i \right]$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda_3\left[\beta_M \frac{B_I(t)}{N_B} + \beta_V \frac{M_V(t)}{N_M}\left[1-u_2(t)\right] + \mu_M \right] \\ -\lambda_4\left[\beta_M \frac{B_I(t)}{N_B}\right] - \lambda_5\left[\beta_V \frac{M_V(t)}{N_M}\left[1-u_2(t)\right]\right] \end{pmatrix},$$
$$\dot{\lambda}_4 = -\frac{\partial H}{\partial M_I} = -\frac{\partial}{\partial M_I}\left[B_I(t) + M_V(t) + \frac{C_1}{2}u_1^2 + \frac{C_2}{2}u_2^2 + \sum_{i=1}^{6} \lambda_i f_i \right]$$
$$= \lambda_4\left[\gamma_1 + \gamma_2 + \sigma_M\right] - \lambda_5\gamma_2 - \lambda_6 \ ,$$

$$\dot{\lambda}_5 = -\frac{\partial H}{\partial M_V} = -\frac{\partial}{\partial M_V}\left[B_I(t) + M_V(t) + \frac{C_1}{2}u_1^2 + \frac{C_2}{2}u_2^2 + \sum_{i=1}^{6}\lambda_i f_i \right]$$
$$= \left(-1 + \lambda_3\left[\beta_V \frac{M_S(t)}{N_M}\left[1 - u_2(t)\right] \right] - \lambda_5\left[\beta_V \frac{M_S(t)}{N_M}\left[1 - u_2(t)\right] - \alpha - \sigma_V \right] - \lambda_6\alpha \right),$$
$$\dot{\lambda}_6 = -\frac{\partial H}{\partial M_R} = -\frac{\partial}{\partial M_R}\left[B_I(t) + M_V(t) + \frac{C_1}{2}u_1^2 + \frac{C_2}{2}u_2^2 + \sum_{i=1}^{6}\lambda_i f_i \right] = \lambda_6\mu_M \ ,$$

dengan syarat batas (kondisi tranversal),

$$\lambda_j(t_f) = 0,\ \forall\ j = 1,2,\cdots,6. \tag{8}$$

Jadi terdapat fungsi adjoin $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_6$ yang memenuhi persamaan co-state,

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_1\left[\beta_B \frac{B_I^*}{N_B}\left[1 - u_1\right] + \mu_B \right] - \lambda_2\left[\beta_B \frac{B_I^*}{N_B}\left[1 - u_1\right] \right],$$
$$\dot{\lambda}_2 = \left(-1 + \lambda_1\left[\beta_B \frac{B_S^*}{N_B}\left[1 - u_1\right] \right] - \lambda_2\left[\beta_B \frac{B_S^*}{N_B}\left[1 - u_1\right] - \sigma_B \right] + \lambda_3 \frac{\beta_M M_S^*}{N_B} - \lambda_4 \frac{\beta_M M_S^*}{N_B} \right),$$
$$\dot{\lambda}_3 = \left(\lambda_3\left[\frac{\beta_M B_I^*}{N_B} + \frac{\beta_V M_V^*}{N_M}\left[1 - u_2\right] + \mu_M \right] - \lambda_4 \frac{\beta_M B_I^*}{N_B} - \lambda_5 \frac{\beta_V M_V^*}{N_M}\left[1 - u_2\right] \right),$$
$$\dot{\lambda}_4 = \lambda_4\left[\gamma_1 + \gamma_2 + \sigma_M\right] - \lambda_5\gamma_2 - \lambda_6 \ ,$$
$$\dot{\lambda}_5 = \left(-1 + \lambda_3\beta_V \frac{M_S^*}{N_M}\left[1 - u_2\right] - \lambda_5\left[\beta_V \frac{M_S^*}{N_M}\left[1 - u_2\right] - \alpha - \sigma_V \right] - \lambda_6\alpha \right),$$
$$\dot{\lambda}_6 = \lambda_6\mu_M \ ,$$

Kontrol optimal *u* dapat diperoleh melalui syarat keoptimalan (kondisi stationer), yaitu

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1}\left[B_I(t) + M_V(t) + \frac{C_1}{2}u_1^2 + \frac{C_2}{2}u_2^2 + \sum_{i=1}^{6}\lambda_i f_i \right] = 0$$
$$\left[C_1u_1 + \lambda_1\beta_B B_S(t)\frac{B_I(t)}{N_B} - \lambda_2\beta_B B_S(t)\frac{B_I(t)}{N_B} \right] = 0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2}\left[B_I(t) + M_V(t) + \frac{C_1}{2}u_1^2 + \frac{C_2}{2}u_2^2 + \sum_{i=1}^{6}\lambda_i f_i \right] = 0$$
$$\left[C_2u_2 + \lambda_3\beta_V M_S(t)\frac{M_V(t)}{N_M} - \lambda_5\beta_V M_S(t)\frac{M_V(t)}{N_M} \right] = 0\ . \tag{10}$$

Dari kondisi stationer dalam persamaan (9) dan (10) diperoleh bentuk kontrol yang optimal, yaitu

$$u_1^* = \frac{1}{C_1}(\lambda_2 - \lambda_1)\beta_B B_S^* \frac{B_I^*}{N_B} \tag{11}$$

$$u_2^* = \frac{1}{C_2}(\lambda_5 - \lambda_3)\beta_V M_S^* \frac{M_V^*}{N_M}. \tag{12}$$

Tinjau kembali himpunan kontrol yang diperkenankan, yaitu

$$U = \left\{ (u_1, u_2) \;\middle|\; u_i \text{ fungsi terukur},\ 0 \le u_i \le 1,\ t \in [0, t_f],\ i = 1,2 \right\}.$$

Sesuai dengan interval kontrol yang diperkenankan maka persamaan (11) dan (12) dapat dituliskan menjadi

$$u_1^* = \begin{cases} \dfrac{(\lambda_2 - \lambda_1)\beta_B B_S^* B_I^*}{C_1 N_B}, & \text{jika } 0 < \dfrac{(\lambda_2 - \lambda_1)\beta_B B_S^* B_I^*}{C_1 N_B} < 1 \\ 0, & \text{jika } \dfrac{(\lambda_2 - \lambda_1)\beta_B B_S^* B_I^*}{C_1 N_B} < 0 \\ 1, & \text{jika } \dfrac{(\lambda_2 - \lambda_1)\beta_B B_S^* B_I^*}{C_1 N_B} \ge 1 \end{cases},$$

$$= \min\left\{ \max\left\{ 0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\beta_B B_S^* B_I^*}{C_1 N_B} \right\}, 1 \right\}$$

dan

$$u_2^* = \begin{cases} \dfrac{(\lambda_5 - \lambda_3)\beta_V M_S^* M_V^*}{C_2 N_M}, & \text{jika } 0 < \dfrac{(\lambda_5 - \lambda_3)\beta_V M_S^* M_V^*}{C_2 N_M} < 1 \\ 0, & \text{jika } \dfrac{(\lambda_5 - \lambda_3)\beta_V M_S^* M_V^*}{C_2 N_M} < 0 \\ 1, & \text{jika } \dfrac{(\lambda_5 - \lambda_3)\beta_V M_S^* M_V^*}{C_2 N_M} \ge 1 \end{cases}$$

$$= \min\left\{ \max\left\{ 0, \frac{(\lambda_5 - \lambda_3)\beta_V M_S^* M_V^*}{C_2 N_M} \right\}, 1 \right\}.$$

Jadi diperoleh bentuk kontrol optimal u_1^* dan u_2^* yang akan mengoptimalkan fungsi objektif yang diberikan, yaitu

$$u_1^* = \min\left\{ \max\left\{ 0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\beta_B B_S^* B_I^*}{C_1 N_B} \right\}, 1 \right\}$$

$$u_2^* = \min\left\{ \max\left\{ 0, \frac{(\lambda_5 - \lambda_3)\beta_V M_S^* M_V^*}{C_2 N_M} \right\}, 1 \right\}. \blacksquare$$

Jika kontrol optimal yang diperoleh disubtitusi ke persamaan state dan co-state, maka akan diperoleh persamaan state dan co-state yang optimal, yaitu

$$\frac{dM_S(t)}{dt} = A_M - \beta_M M_S(t)\frac{B_I(t)}{N_B} - \beta_V M_S(t)\frac{M_V(t)}{N_M}\left[1-\min\left\{\max\left\{0,\frac{(\lambda_5-\lambda_3)\beta_V M_S^* M_V^*}{C_2 N_M}\right\},1\right\}\right] - \mu_M M_S(t),$$

$$\frac{dM_I(t)}{dt} = \beta_M M_S(t)\frac{B_I(t)}{N_B} - \gamma_1 M_I(t) - \gamma_2 M_I(t) - \sigma_M M_I(t),$$

$$\frac{dM_V(t)}{dt} = \beta_V M_S(t)\frac{M_V(t)}{N_M}\left[1-\min\left\{\max\left\{0,\frac{(\lambda_5-\lambda_3)\beta_V M_S^* M_V^*}{C_2 N_M}\right\},1\right\}\right] + \gamma_2 M_I(t) - \alpha M_V(t) - \sigma_V M_V(t),$$

$$\frac{dM_R(t)}{dt} = \gamma_1 M_I(t) + \alpha M_V(t) - \mu_M M_R(t),$$

$$\frac{dB_S(t)}{dt} = A_B - \beta_B B_S(t)\frac{B_I(t)}{N_B}\left[1-\min\left\{\max\left\{0,\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\beta_B B_S^* B_I^*}{C_1 N_B}\right\},1\right\}\right] - \mu_B B_S(t),$$

$$\frac{dB_I(t)}{dt} = \beta_B B_S(t)\frac{B_I(t)}{N_B}\left[1-\min\left\{\max\left\{0,\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\beta_B B_S^* B_I^*}{C_1 N_B}\right\},1\right\}\right] - \sigma_B B_I(t),$$

dan

$$\dot{\lambda}_1 = \lambda_1\left[\beta_B\frac{B_I(t)}{N_B}\left[1-\min\left\{\max\left\{0,\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\beta_B B_S^* B_I^*}{C_1 N_B}\right\},1\right\}\right] + \mu_B\right] - \lambda_2\left[\beta_B\frac{B_I(t)}{N_B}\left[1-\min\left\{\max\left\{0,\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\beta_B B_S^* B_I^*}{C_1 N_B}\right\},1\right\}\right]\right],$$

$$\dot{\lambda}_2 = \begin{pmatrix} -1+\lambda_1\left[\beta_B\frac{B_S(t)}{N_B}\left[1-\min\left\{\max\left\{0,\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\beta_B B_S^* B_I^*}{C_1 N_B}\right\},1\right\}\right]\right] \\ -\lambda_2\left[\beta_B\frac{B_S(t)}{N_B}\left[1-\min\left\{\max\left\{0,\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\beta_B B_S^* B_I^*}{C_1 N_B}\right\},1\right\}\right] - \sigma_B\right] \\ +\lambda_3\left[\beta_M\frac{M_S(t)}{N_B}\right] - \lambda_4\left[\beta_M\frac{M_S(t)}{N_B}\right] \end{pmatrix},$$

$$\dot{\lambda}_3 = \begin{pmatrix} \lambda_3\left[\beta_M\frac{B_I(t)}{N_B} + \beta_V\frac{M_V(t)}{N_M}\left[1-\min\left\{\max\left\{0,\frac{(\lambda_5-\lambda_3)\beta_V M_S^* M_V^*}{C_2 N_M}\right\},1\right\}\right] + \mu_M\right] \\ -\lambda_4\left[\beta_M\frac{B_I(t)}{N_B}\right] - \lambda_5\left[\beta_V\frac{M_V(t)}{N_M}\left[1-\min\left\{\max\left\{0,\frac{(\lambda_5-\lambda_3)\beta_V M_S^* M_V^*}{C_2 N_M}\right\},1\right\}\right]\right] \end{pmatrix},$$

$$\dot{\lambda}_4 = \lambda_4\left[\gamma_1+\gamma_2+\sigma_M\right] - \lambda_5\gamma_2 - \lambda_6\ ,$$

$$\dot{\lambda}_5 = -\frac{\partial H}{\partial M_V} = -\frac{\partial}{\partial M_V}\left[B_I(t) + M_V(t) + \frac{C_1}{2}u_1^2 + \frac{C_2}{2}u_2^2 + \sum_{i=1}^{6}\lambda_i f_i\right]$$

$$= \left(-1 + \lambda_3\left[\beta_V \frac{M_S(t)}{N_M}\left[1 - u_2(t)\right]\right] - \lambda_5\left[\beta_V \frac{M_S(t)}{N_M}\left[1 - u_2(t)\right] - \alpha - \sigma_V\right] - \lambda_6\alpha\right),$$

$$\dot{\lambda}_6 = -\frac{\partial H}{\partial M_R} = -\frac{\partial}{\partial M_R}\left[B_I(t) + M_V(t) + \frac{C_1}{2}u_1^2 + \frac{C_2}{2}u_2^2 + \sum_{i=1}^{6}\lambda_i f_i\right] = \lambda_6\mu_M .$$

4. Kesimpulan

Pada penelitian ini telah diaplikasikan teori kontrol optimal pada model matematika penyebaran penyakit Flu Burung untuk menentukan bentuk kontrol yang optimal yang dapat menekan laju pertambahan jumlah populasi yang infektif. Bentuk kontrol yang telah diperoleh, yaitu

$$u_1^* = \min\left\{\max\left\{0, \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)\beta_B B_S^* B_I^*}{C_1 N_B}\right\}, 1\right\}$$

dan

$$u_2^* = \min\left\{\max\left\{0, \frac{(\lambda_5 - \lambda_3)\beta_V M_S^* M_V^*}{C_2 N_M}\right\}, 1\right\}.$$

Dari kedua bentuk tersebut dapat dilihat bahwa kontrol optimal yang diperoleh bergantung pada beberapa nilai parameter, diantaranya parameter rata-rata kontak antara burung sehat dengan burung terinfeksi (β_B), rata-rata kontak antara manusia sehat dengan manusia yang terjangkit virus mutan AI yang bersifat infektif (β_V), jumlah populasi burung dan manusia, serta nilai bobot C_1 dan C_2. Jika nilai rata-rata kontak cukup besar maka diperlukan usaha yang cukup besar pula untuk mengoptimalkan usaha pencegahan infeksi yang dilakukan.

Daftar Pustaka

[1] Centers for Disease Control and Prevention, 2006. *Key facts about avian influenza (bird flu) and avian influenza A (H5N1) virus*. Sumber: http://www.cdc.gov/flu/avian/gen-info/pdf/avianfacts.pdf, diakses pada tanggal 30 Juni 2008.

[2] Hattaf K., Rachik M., Saadi S. & Yousfi N., 2009. Optimal Control of Treatment in a Basic Virus Infection Model. *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 3, no. 20, hal. 949 – 958.

[3] Jung E., Lenhart S., Feng Z., 2002. Optimal Control of Treatments in a Two-Strain Tuberculosis Model. *Disc. & Cont. Dynamical Systems–Series B*, Vol. 2, No 4, hal. 473-482.

[4] Kasbawati, Nurwahyu B., 2010. Model Matematika Penyebaran Virus Flu Burung H5N1 pada Populasi Burung dan Manusia. *Prosiding Sem-Nas Matematika UNPAR*, Vol.5 thn

2010, hal. 103-111. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Katolik Parahyangan, Bandung.

[5] Lewis F. & Syrmos V., 1995. *Optimal Control*, Second Edition. John Wiley & Sons Inc., New York.

[6] Mulyadi B. & Prihatini, 2005. Diagnosis Laboratorik Flu Burung (H5N1) (Laboratoric Diagnosis of Avian Influenzae (H5N1)). *Indonesian Journal of Clinical Pathology and Medical Laboratory*, Vol. 12, No. 2, Mar 2005, hal. 71-81.

[7] Renee Fister K., Lenhart S. & Scott J., 1998. Optimizing Chemotherapy in an HIV Model. *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 1998(1998), No. 32, hal. 1-12.