ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 11, No. 1, 45-55, Juli 2014

MASALAH DISTRIBUSI BOLA KE DALAM WADAH SEBAGAI FUNGSI ATAU KUMPULAN FUNGSI

Fauziah Baharuddin[1], Loeky Haryanto[2], Nurdin [3]

Abstrak

Penulisan ini bertujuan untuk mendapatkan perumusan banyak cara berbeda dalam masalah distribusi bola ke dalam wadah, sesuai ketentuan atau syarat yang diberikan pada cara distribusi atau pada fungsi-fungsi yang terkait dengan distribusi tersebut. Tujuan lainnya adalah memberi intreprestasi beberapa masalah distribusi bola ke wadah menjadi masalahyang berbeda (tetapi ekuivalen) ke dalam bahasa matematis.

Kata Kunci : Fungsi, Permutasi, Koefisien Binomial, Partisi Bilangan.

Abstract

The goal of this paper is primarily to obtain the number of different ways in distributing *n* balls into *k* urns subject to some conditions imposed on the balls and the urns as well as on the associated functions related to the distributions. Another goal is to find distinct interpretations, but equivalent for each distribution intomathematicallanguage.

Key Words : Functions, Permutations, BinomialCoefficient, Numbers Partition.

1. Pendahuluan

Dalam kehidupan sehari-hari manusia melihat dan mengenali berbagai bentuk objek di sekitarnya. Sering ada keinginan untuk mengetahui cara-cara sekumpulan objekdapat diklasifikasikan berdasarkan suatu kriteria sehingga terjadi partisi atas objek-objek tersebut menjadi beberapa kelompok yang berbeda dan saling lepas satu sama lain.Lebih jauh, berbagai masalah nyata dalam kehidupan sehari-hari ternyata ekuivalen dengan masalah menghitung banyaknya fungsi yang terbentuk berdasarkan ukuran dari kelompok yang berlabel sama. Masalah yang sejenis atau tidak sejenis di klasifikasi berdasarkan banyak label (yang digunakan dan tidak digunakan) dan mungkin dengan tambahan beberapa syarat atau kriteria lain.

Obyek-obyek yang akan diklasifikasi seringkali biasa dinyatakan dalam suatu model sebagai unsur-unsur dari daerah asal atau daerah hasil suatu fungsi(injektif, surjektif, dan sebagainya). Dalam hal ini, jenis masalah ini dikelompokkan ke dalam *masalah pengisan* (*occupancyproblem*) yang merupakan bagian dari *masalah enumerasi* dalam teori kombinatorik dan matematika diskrit. Dalam teori pengisian, unsur di dalam daerah asal fungsi berperan

[1] Program S1 Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin
[2] Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin
[3] Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin

sebagai bola yang dimasukkan ke dalam wadah yang diperankan oleh unsur-unsur di dalam daerah hasil fungsi. [4]

Dalam masalah pengisian, banyakmasalahpencacahandapatdirumuskan sebagaimenghitungjumlahdistribusibolake dalam wadah[5]. Himpunan semua fungsi yang terbentuk sangat tergantung pada asumsi-asumsi atau syarat-syaratyang diberikan sebagai berikut:

1. Apakah masing-masing bola bisa dibedakan?
2. Apakah masing-masing wadah bisa dibedakan?
3. Apakah fungsi yang diinginkan bersifat 1-1, pada, atau sembarang?

Berdasarkan asumsi atau persyaratan ini, masalah yang akan dibahasterbagi atas 12 submasalah yang bisa dinyatakan melalui skema berikut

Tabel 1. Submasalah untuk distribusi bola ke wadah

Dalam uraian latar belakang dapat diketahui tujuan dari penulisan sebagai berikut:

Kriteria untuk *n* = banyak bola *k* = banyak wadah	**Tanpa syarat**	**1 – 1**	**Pada (onto)**
***n* berlabel *k* berlabel**	Submasalah 1 (k^n fungsi - fungsi)	Submasalah 2	Submasalah 3
***n* tdk berlabel *k* berlabel**	Submasalah 4	Submasalah 5	Submasalah 6
***n* berlabel *k* tdk berlabel**	Submasalah 7	Submasalah 8	Submasalah 9
***n* tdk berlabel *k* tdk berlabel**	Submasalah 10	Submasalah 11	Submasalah 12

1. Mendapatkan perumusan banyak cara berbeda dalam masalah distribusi bola ke dalam wadah, sesuai ketentuan atau syarat yang diberikan pada caa distribusi bola ke dalam wadah tersebut.
2. Memberi intreprestasi beberapa masalah distribusi bola ke dalam wadah ke bentuk masalahyang berbeda (tetapi ekuivalen).
3. Merumuskan hubungan antara beberapa konsep matematika yang terkait dengan masalah distribusi bola ke dalam wadah, sesuai dengan hasil studi literatur.

[1,2,3] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10 Makassar*

2. Tinjauan Pustaka

2.1 Fungsi

Fungsi merupakan keadaan khusus dari suatu relasi. Diberikan himpunan Ndan K. Suatu fungsi $f$dengan daerah asal Ndan daerah kawan Kdidefinisikan sebagai himpunan pasangan-pasangan $(x, f(x))$ dimana $x \in N$dan $f(x) \in K$ yang memenuhi syarat:

1. Untuk setiap $x \in N$ terdapat $f(x) \in K$sedemikian sehingga $(x, f(x)) \in f$.
2. Untuk setiap $(x_1, f(x_1)) \in f$ dan $(x_2, f(x_2)) \in f$berlaku implikasi: jika $x_1 = x_2$maka

$$f(x_1) = f(x_2)$$

Dari semua pasangan tersebut, himpunan Ndisebut daerah asal (domain) dan himpunan Kdisebut daerah kawan (ko-domain) dari fungsi.

2.2 Permutasi

Dalam matematika, penyusunan obyek yang terdiri dari beberapa unsur dengan memperhatikan urutan disebut dengan permutasi**.** Notasi Permutasi k objek dari n objek yang berbeda dilambangkan $_nP_k$, *P(n,k)* , atau P_k^n

2.2.1 Permutasi *n* objek dari *n* objek yang berbeda

Masalah yang dibahas di sini dapat dipandang sebagai masalah menempatkan n bola berlabel ke dalam n wadah yang juga berlabel dimana setiap wadah hanya bisa diisi tepat 1 bola.Sehingga berdasarkan **Prinsip kaidah perkalian,** banyak cara mengisi wadah tersebut adalah

$$n.(n-1).(n-2)....2.1 = n!$$

2.2.2 Permutasi *k* objek dari *n* objek yang berbeda, $k \leq n$

Masalah memilih k diantara n bola berlabel kemudian menempatkan ke dalam n wadah yang juga berlabel dimana setiap wadah hanya bisa diisi tepat 1 bola. Banyak cara mengisi wadah tersebut adalah

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\ ...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}[2]$$

2.3 Koefisien Binomial

Definisi 2.1 (Fungsi faktorial)
Didefinisikan

$$0! = 1$$

dan untuk setiap bilangan bulat positif n berlaku

$$n! = n(n-1)(n-2)...(2)(1) \quad (1)$$

Permutasi k dari n dengan $n \geq k$ atau $P(n,k)$, didefinisikan sebagai banyaknya cara memilih k obyek yang berbeda dari n obyek yang berbeda dimana urutan obyek sangat diperhatikan. $P(n,k)$ juga bisa didefinisikan sebagai banyaknya pemetaan satu-satu yang berbeda dari daerah asal X dengan $|X| = k$ ke daerah hasil Y dengan $|Y| = n$. Dari definisi ini bisa dibuktikan

$$P(n,k) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1). \qquad (2)$$

Definisi 2.2 (Koefisien Binomial)
Untuk setiap bilangan bulat tak negatif dengan k dan n dengank ≤ n, bilangan-bilangan bulat.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (3)$$

disebut koefisien binomial.

Koefisien binomial bisa digunakan untuk mencari banyaknya subhimpunan yang berbeda dengan banyak elemen k dari himpunan dengan n elemen.

Teorema 2.2 (*Binomial*)
Untuk setiap $a,b \in \mathbb{R}$ dan bilangan bulat positif n ,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad (4)$$

Ada banyak penerapan dari teorema binomial. Misalnya untuk menghitung banyaknya semua subhimpunan yang dimiliki dari himpunan dengan n elemen,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k.1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n,$$

2.4 Bilangan Stirling

Konsep faktorial $k!$ mensyaratkan k bulat tak negatif. Generalisasi terhadap faktorial $k!$ dengan k bulat tak negatif dilakukan dengan memperlonggar persyaratan bilangan bulat tak negatif k menjadi sembarang bilangan real t dan kemudian mengelompokkan atas dua jenis faktorial sebagai berikut. Untuk setiap bilangan real t dan bilangan bulat positif n,

1. faktorial naik adalah polinom derajat n yang didefinisikan dan diberi lambang seperti berikut

$$t^{\overline{n}} = t(t+1)(t+2)\ldots(t+n-1)$$

2. faktorial turun adalah polinom derajat $n$berikut

$$t^{\underline{n}} = t(t-1)(t-2)\ldots(t-n+1).$$

Dengan faktorial turun, bilangan Stirling jenis pertama $s(n,k)$didefinisikan sebagai koefisien dari jumlahan di ruas kanan kesamaan

$$t^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) t^k$$

sedangkan bilangan Stirling jenis kedua $S(n,k)$didefinisikan sebagai koefisien di ruas kanan kesamaan

$$t^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)t^k$$

2.5 Partisi Bilangan

Partisi dari suatu bilangan bulat adalah cara untuk menuliskan bilangan tersebut sebagai jumlah dari bilangan bulat positif.

Definisi 2.3:
Partisi dari bilangan n adalah sebuah barisan yang diberi lambang
$\boldsymbol{\lambda} = <\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k>$ *dan memenuhi sifat* (5)
i. $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k$, *dan*
ii. $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1$.

Jadi, $|\boldsymbol{\lambda}| = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i$adalah bilangan asli yang dipartisi menjadi barisan $\boldsymbol{\lambda}$.Apabila $\boldsymbol{\lambda}$ adalah partisi dari n atas jumlahan sebanyak k suku yaitu, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, dikatakan $\boldsymbol{\lambda}$ adalah partisi-k. Dalam hal ini, $1 \leq k \leq n$. (Aigner, 2007)

$\mathrm{Par}(n)$ dinotasikan sebagai himpunan semua partisi dari n. Demikian pula $\mathrm{Par}(n;k)$ dinotasikan sebagai himpunan semua partisi -k dari n, ukuran (banyak partisi di dalam) masing-masing himpunan $\mathrm{Par}(n)$ dan $\mathrm{Par}(n;k)$ adalah

$$p(n) = |\mathrm{Par}(n)| \text{dan } p(n;k) = |\mathrm{Par}(n;k)| \quad (6)$$

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Distribusi Bola yang Berbeda dan Wadah yang Berbeda Tanpa Mensyaratkan Sifat Fungsi yang Terkait

Teorema 3.1
Jika masing-masing bola dan wadah bisa dibedakan, banyak cara distribusi n bola$b_1, b_2, ..., b_n$ *ke dalam k wadah*$w_1, w_2, ..., w_k$ *adalah sama dengan banyaknya semua fungsi*

$$f:\{b_1, b_2, ..., b_n\} \to \{w_1, w_2, ..., w_k\};$$

yaitu k^n.
Bukti:
Himpunan semua cara distribusi berkawan 1-1 dengan himpunan fungsi-fungsi f yang mengawankan setiap b_i dengan $w_j$dengan mendefinisikan $f(b_i) = w_j$ jika dan hanya jika bola $b_i$dimasukkan ke dalam wadah w_j.Karena wadah untuk setiap bola bisa bebas dipilih salah satu di antara$k$wadah, ada sebanyak $k$pilihan untuk setiap bola. Karena cara memilih setiap bola saling bebas satu sama lain dan terdapat n bola, dengan menggunakan prinsip perkalian disimpulkan bahwa banyak cara distribusi bola yang berbeda adalahk^n.■

3.2 Distribusi Bola yang Berbeda dan Wadah yang Berbeda Sebagai Fungsi Injektif
Teorema 3.2

Jika $N = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ *dan* $K = \{w_1, w_2, ..., w_k\}$, *maka terdapat* $k^{\underline{n}} = k(k-1)(k-2)...(k-n+1)$ *fungsi injektif dari N→ K.*

Bukti:
Untuk $k \geq n$, Banyak fungsi injektif $f : N \to K$ diperoleh dengan prinsip perkalian dalam kombinatorik.Karena terdapat k pilihan untuk $f(b_1)$**,** $k - 1$ pilihan untuk $f(b_2)$, $k - 2$pilihan untuk $f(b_3)$, …, dan $k - (n - 1) = k - n + 1$ pilihan untuk $f(b_n)$, maka ada sebanyak $k^{\underline{n}} = k(k-1) \ldots (k - n + 1)$ cara yang berbeda untuk memilih nilai-nilai fungsi, dengan kata lain $k^{\underline{n}}$ fungsi injektif yang berbeda. ■

3.3 Distribusi Bola yang Berbeda dan Wadah yang Berbeda Sebagai Fungsi Surjektif

Teorema 3.3
Jika masing-masing bola dan wadah bisa dibedakan, banyak cara distribusi n bola$b_1, b_2, ..., b_n$ *ke dalam k wadah*$w_1, w_2, ..., w_k$ *adalah* $k!S(n, k)$

***Bukti* :**
Diberikan fungsi $f : N \to K$Pertama kali didefinisikan himpunan

$$f^{-1}[w] = \{ b \in N \mid f(b) = w\} \subseteq N.$$

Dari definisi, f surjektif jika dan hanya jika untuk setiap $w \in K$, $f^{-1}[w] \neq \emptyset$. Padahal himpunan-himpunan $f^{-1}[w]$ saling lepas dan gabungannya sama dengan N. Ini berarti himpunan-himpunan $f^{-1}[w_1]$, $f^{-1}[w_2]$, … , $f^{-1}[w_k]$ membentuk partisi pada N sehingga setiap fungsi surjektif bersesuaian dengan tepat satu partisi semacam. Jika unsur-unsur $w_1, w_2, \ldots, w_k$ diurutkan secara tetap, maka berdasarkan definisi bilangan Stirling jenis kedua (lihat Fifik Astuti,2013 Definisi 3.2 dan 3.3 misalnya), banyaknya partisi yang berbeda adalah $S(n, k)$. Tetapi untuk urutan $w_1, w_2, \ldots, w_k$ lain, diperoleh partisi $f^{-1}[w_1]$, $f^{-1}[w_2]$, … , $f^{-1}[w_k]$ yang berbeda. Karena ada $k!$ urutan $w_1, w_2, \ldots, w_k$ yang berbeda, maka total ada $k!S(n, k)$ partisi yang berbeda. Ini membuktikan terdapat fungsi surjektif yang berbeda.■

3.4 Distribusi Bola yang Tidak Bisa Dibedakan dan Wadah yang Bisa Dibedakan Tanpa Mensyaratkan Sifat Fungsi yang Terkait

Teorema 3.4
Banyak cara distribusi*n bola yang tidak bisa dibedakan ke dalam k wadah*(*yang bisa dibedakan*) *adalah*

$$\binom{n+k-1}{n}$$

Bukti :
Karena masing-masing bola identik atau tidak bisa dibedakan sedangkan wadah bisa dibedakan maka terdapat asosiasi antara setiap cara disitribusi$n$ bola ke dalam k wadah dengan sebuah untaian biner yang panjangnya $n + k - 1$ sesuai skema berikut:

No. **Wadah 1**	**Wadah 2**	…	**Wadah *k***	**Untaian Biner Yang Berasosiasi**
1.*bbb … bb*	-	-	-	111…11000…00
(semua *n* bola berada di dalam Wadah 1)				
2.*bbb…b*	*b*	-	-	111…10100..00
($n - 1$ bola di dalam Wadah 1, 1 bola di dalam Wadah 2)				

....
M. - | - | - | *bbb* ... 000..00111…11
(semua *n* bola ke dalam Wadah *k*)

Untaian biner yang bersesuaian dengan suatu distribusi bola diperoleh dengan cara mengganti lambang bola *b* dengan bit-1 dan mengganti pagar | (pembatas wadah) dengan bit-0. Jadi disimpulkan bahwa banyaknya cara distribusi penempatan *n* bola tak berlabel sama ke dalam sebanyak *k* wadah dengan banyaknya untaian biner panjangnya $n - k + 1$ yang memuat *n* bit-1. Berdasarkan rumus koefisien binomial, banyaknya untaian biner panjang $n + k - 1$ tersebut adalah

$$M = \binom{n+k-1}{n}. \qquad \blacksquare$$

3.5 Distribusi n Bola yang Tidak Bisa Dibedakan ke dalam k Wadah yang Bisa Dibedakan Dengan Syarat Paling Banyak Satu Wadah Berisi Satu Bola Sebagai Fungsi Injektif

Teorema 3.5

Banyak cara distribusi*n bola yang tidak bisa dibedakan ke dalam k wadah*(*yang bisa dibedakan*) *dengan syarat paling banyak satu bola dalam satu wadah adalah*

$$\binom{k}{n}$$

Bukti :

Dengan syarat tambahan paling banyak satu wadah berisi satu bola, maka $n \leq k$. Jika semua *k* wadah, namakanwadah x_1,wadah x_2, ... wadah x_k disusun secara berurutan dalam bentuk

$$x_1\, x_2 \ldots x_k;$$

kemudian lambang x_i untuk wadah ke-*i* yang berisi bola diganti bit-1 dan wadah $x_j$yang kosong diganti bit-0, maka terbentuk untaian biner panjang *k* yang banyaknya bit-1 adalah *n* (banyak wadah yang berisi) dan banyaknya bit-0 adalah $k - n$ (banyak wadah tidak terisi). Karena untaian yang berbeda menyatakan distribusi yang berbeda, maka banyaknya distribusi yang berbeda dalam kasus ini sama dengan banyaknya untaian biner dengan panjang *k* dan memuat sebanyak $n \leq k$ bit 1, yaitu

$$\binom{k}{n} \qquad \blacksquare$$

3.6 Distribusi nBola yang Tidak Bisa Dibedakan ke dalam k Wadah yang Bisa Dibedakan Dengan Syarat Paling Sedikit Satu Wadah Berisi Satu Bola Sebagai Fungsi Surjektif

Teorema 3.6

Banyak cara distribusi n bola yang tidak berlabel dengan k wadah berlabel dengan syarat paling sedikit satu bola dalam satu wadahadalah

$$\binom{n-1}{k-1}$$

Bukti:

Isi semua *k* wadah dengan satu bola, tersisa $n - k$ bola yang akan didistribusikan ke dalam *k* wadah. Menurut hasil 3.4, banyak cara mendistribusikan $n - k$ bola ke dalam *k* wadah adalah

$$\binom{(n-k)+(k-1)}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}. \qquad \blacksquare$$

3.7 Distribusi Bola yang Bisa Dibedakan dan Wadah yang Tidak Bisa Dibedakan Sebagai Fungsi Surjektif atau Paling Sedikit 1 bola Dalam Wadah

Teorema 3.7
Banyak cara distribusi n bola yang berlabel dengan k wadah yang tidak berlabel dengan syarat paling sedikit satu bola dalam satu wadah adalah

$$S_{n,k}$$

Bukti:
Misalkan $f : N \to K$dan didefinisikan himpunan

$$f^{-1}[\,w] = \{\, b \in N \mid f(b) = w\} \subseteq N.$$

Jelas f surjektif jika dan hanya jika untuk setiap $w \in K$, $f^{-1}[w] \neq \emptyset$. Padahal himpunan-himpunan $f^{-1}[w]$ saling lepas dan gabungannya sama dengan N. Ini berarti himpunan-himpunan $f^{-1}[\,w]$ dengan $w \in K$ membentuk partisi pada N. Jadi, banyaknya partisi yang berbeda adalah bilangan stirling jenis kedua $S(n,k)$.

$\blacksquare$

3.8 Distribusi Bola yang Bisa Dibedakan dan Wadah yang Tidak Bisa Dibedakan Tanpa Mensyaratkan Sifat Fungsi yang Terkait

Teorema 3.8
Banyak cara distribusi n bola yang berlabel dengan k wadah yang tidak berlabel adalah

$$\left(\sum_{j=1}^{k} S_{n,j}\right)$$

Bukti:
Misalkan $N = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ dan K adalah sembarang himpunan dengan $|K| = k$. Setiap distribusi bola berlabel ke dalam k wadah akan menyebabkan N terpartisiatas j subhimpunan, di mana $j \in \{1, 2, ..., k\}$ menyatakan banyak wadah yang terisi dan $k \leq n$.
Misalkan j tetap. Akan dihitung banyaknya semua distribusi yang bersesuaian dengan partisi pada himpunan N atas j subhimpunan$j \in \{1, 2, ..., k\}$
Setiap partisi pada N atas j subhimpunan bersesuaian dengan sekumpulan fungsi di mana setiap fungsi f di dalam kumpulan ini memiliki sifat: hanya terdapat$j$nilai yang berbeda, katakan i_1, i_2, ..., i_j sehingga ke-j subhimpunan yang saling lepas tersebut adalah $f^{-1}(i_1)$,$f^{-1}(i_2)$, ..., $f^{-1}(i_j)$dan$f^{-1}(i_1) \cup f^{-1}(i_2) \cup \ldots \cup f^{-1}(i_j) = N$. Dengan kata lain, $f^{-1}(i_1)$,$f^{-1}(i_2)$, ..., $f^{-1}(i_j)$membentuk partisi pada himpunan N atas j subhimpunan.
Karena setiap partisi pada N atas j subhimpunan bersesuaian dengan satu fungsi sedangkan setiap fungsi bersesuaian dengan satu cara distribusi, maka setiap partisi pada N atas j subhimpunan bersesuaian dengan satu cara distribusi, padahal berdasarkan Teorema 2.3 tentang bilangan Stirling jenis kedua, banyak partisi yang berbeda pada himpunan dengan n unsur atas j subhimpunan adalah $S_{n,j}$.
Kesimpulannya, untuk suatu nilai j yang tetap, banyak distribusi yang berbeda adalah $S_{n,j}$. Tetapi karena ada sebanyak $k$kemungkinan nilai $j \in \{1, 2, ..., k\}$ atau $j = \min\{n,k\}$, maka banyak distribusi bola tak berlabel ke dalam sebanyak $k \leq n$ wadah yang berlabel adalah$S_{n,1} + S_{n,2} + \ldots + S_{n,k}$. $\blacksquare$

3.8 Distribusi Bola yang Bisa Dibedakan dan Wadah yang tidak Bisa Dibedakan Sebagai Fungsi Injektif atau paling banyak 1 bola dalam wadah

Teorema 3.9

Jika $n \leq k$ maka banyak cara distribusin bola yang bisa dibedakan kedalam k wadah yang tidak bisa dibedakanadalah 1 *tetapi Jika $n > k$ maka solusi* 0.

Bukti:

Misalkan n bola berlabelb_1, b_2,..., b_n didistribusikan ke dalam k wadah tidak berlabel dan paling banyak satu bola di dalam 1 wadah.Jika $n > k$, maka distribusi bola tidak mungkin terjadi dan jika$n \leq k$, maka hanya ada satu macam distribusi:setiap bola masuk ke dalam n di antara k wadah.

■

3.9 Distribusi Bola yang Tidak Bisa Dibedakan dan Wadah yang juga Tidak Bisa Dibedakan Sebagai Fungsi Surjektif atau paling sedikit 1 bola dalam wadah

Teorema 3.10

Banyak cara distribusi*n bola yang tidak bisa dibedakan ke dalam k wadah yang juga tidak bisa dibedakan dengan syarat paling sedikit 1 bola dalam wadahadalah*

$$p(n;k)$$

***Bukti** :*

Karena semua k wadah terisi, maka banyaknya keluarga fungsi-fungsi surjektif dengan daerah asal N dan daerah hasil K dengan kesamaan sifat: memiliki k nilai i_1, i_2, ..., $i_k$yang berbeda.
Setiap distribusi mendefinisikan satu partisi terhadap bilangan n sebagai jumlahan k bilangan-bilangan, katakan $n = <\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k>$artinya $n = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k$, (lihat Definsi 2.3) sebab ada sebanyak λ_1 bola yang bernilai i_1, ada sebanyak λ_2 bola yang bernilai i_2, ..., ada sebanyak λ_k bola yang bernilai i_k. Jadi banyak cara distribusi n bola tak berlabel ke dalam k wadah tak berlabel dengan setiap wadah berisi paling sedikit satu bola adalah $p(n; k)$.

■

3.11 Distribusi Bola yang Tidak Bisa Dibedakan dan Wadah yang Tidak Bisa Dibedakan Tanpa Mensyaratkan Sifat Fungsi yang Terkait

Teorema 3.11

Banyak cara distribusin bola yang tidak bisa dibedakan ke dalam k wadah yang juga tidak bisa dibedakanadalah

$$\sum_{j=1}^{k} p(n;j)$$

***Bukti**:*

Jika hanya j wadah yang terisi, maka banyak cara distribusi n bola tidak berlabel ke dalam k wadah juga tak berlabel adalah banyaknya keluarga fungsi-fungsi dari N ke K dengan kesamaan sifat: memiliki j nilai i_1, i_2, ..., $i_j$yang berbeda. Setiap nilaimendefinisikan satu partisi terhadap bilangan n sebagai jumlahan j bilangan-bilangan, katakan $n = \lambda_1\lambda_2...\lambda_j$ (artinya $n = \lambda_1 + \lambda_2 + ... +$

λ_j, lihat Definsi 2.3 yang berarti ada sebanyak λ_1 bola yang bernilai i_1, ada sebanyak λ_2 bola yang bernilai i_2, ..., ada sebanyak λ_j bola yang bernilai i_j.

Kriteria untuk ***n* = banyak bola** ***k* = banyak wadah**	**Tanpa syarat**	**1 – 1**	**Pada (onto)**
***n* berlabel** ***k* berlabel**	k^n	$k^{\underline{n}}$	$k!S(n, k)$
***n* tdk berlabel** ***k* berlabel**	$\binom{n+k-1}{n}$	$\binom{k}{n}$	$\binom{n-1}{k-1}$
***n* berlabel** ***k* tdk berlabel**	$\left(\sum_{j=1}^{k} S_{n,j}\right)$	Banyak cara adalah 0 jika n >$k$dan 1 jika $n \leq k$.	$S_{n,k}$
***n* tdk berlabel** ***k* tdk berlabel**	$\sum_{j=1}^{k} p(n;j)$	Jika n >$k$maka solusi 0Jika $n \leq k$, maka solusi 1	$p(n;k)$

Jadi banyak cara distribusi n bola tak berlabel ke dalam k wadah tak berlabel, hanya $j \leq k$ wadah yang terisi adalah $p(n; j)$. Karena ada sebanyak k kemungkinan nilai j = 1, 2, ..., k maka banyak cara distribusi n bola tak berlabel ke dalam k wadah tak berlabel adalah

$$p(n; 1) + p(n; 2) + ... + p(n; k). \quad \blacksquare$$

3.12 Distribusi Bola yang tidak Bisa Dibedakan dan Wadah yang TidakBisa Dibedakan Sebagai Fungsi Injektif

Teorema 3.12

Jika $n \leq k$ maka banyak cara distribusin bola yang tidak bisa dibedakan kedalam k wadah yang juga tidak bisa dibedakanadalah 1 *tetapi jika $n > k$ maka solusi* 0.

Bukti:

Misalkan n bola tak berlabel didistribusikan ke dalam k wadah tidakberlabel dan paling banyak satu bola di dalam 1 wadah. Jika n >k, maka distribusi bola tidak mungkin terjadi dan jika $n \leq k$, maka hanya ada satu macam distribusi, setiap bola masuk ke dalam n di antara k wadah.

$\blacksquare$

4. Penutup

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dan studi literatur terhadap analisis keterkaitan konsepdistribusi bola ke dalam wadahmaka diperoleh hasil-hasil berikut:

1. Banyak cara berbeda pada distribusi bola ke dalam wadah bisa dibagi ke dalam 12 submasalah, sesuai ketentuan atau syarat yang diberikan. Solusi setiap masalah bisa digambarkan oleh tabel berikut.

2. Setiap cara distribusi bersesuaian dengan satu fungsi atau dengan satu keluarga himpunan fungsi-fungsi yang saling lepas. Untuk setiap submasalah, banyak fungsi atau banyak keluarga fungsi-fungsi memiliki penafsiran dan interpretasi masing-masing. Misalnya satu keluarga fungsi-fungsi bisa diinterpretasikan sebagai partisi terhadap sebuah bilangan bulat positif.

4.2 Saran

1. Diharapkan ada penelitian lanjutan yang lebih mendalam pada salah satu submasalah.
2. Perlu dikaji lebih jauh berbagai kemungkinan interpretasi nyata, bukan sekedar interpretasi matematis dari setiap submasalah distribusi bola ke dalam wadah.
3. Perlu digali lebih jauh hubungan antara banyaknya cara distribusi bola ke dalam wadah dengan banyaknya cara mengambil bola dari dalam wadah, dengan hubungan antara banyaknya cara distribusi bola dengan teori peluang.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Aigner, Martin, *A Course in Enumeration*, Springer-Verlag, 2007

[2] Charalambides, A. Charalambides, *Enumerative Combinatorics*, CRC Press,2002

[3] Renzo, Sprugnoli, *An Introduction to Mathematical Methods in Combinatorics*, 2006. www.dsi.unifi.it/~resp/Handbook.pdf pada tanggal 2 Maret 2010

[4] Thomas, A. Dowling, *Applications of Discrete Mathematics*, McGraw-Hill, 1991

[5] Wagner, Carl, *Basic Combinatorics*, 2012. www.math.utk.edu/~**wagner**/papers/comb.pdfdiakses pada tanggal 25 September 2012.