ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 11, No. 2, 84-92, Januari 2015

Kelengkapan Ruang $C[a,b]$ pada Ruang Norm-2

Faisal[1], Jusmawati Massalesse[2], Muh Nur[3]

Abstrak

Tulisan ini bertujuan untuk menentukan bahwa ruang $C[a,b]$ dengan norm-2 yang didefinisikan dengan

$$\|f,g\|_\infty = \sup_{a\le x\le b}\sup_{a\le y\le b}\left|\det\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f(y) & g(y)\end{pmatrix}\right|$$

merupakan ruang norm-2 yang lengkap. Metode pembuktiannya dilakukan dengan menunjukkan bahwa sebarang barisan Cauchy di $C[a,b]$ konvergen ke suatu elemen $C[a,b]$ dalam ruang norm-2.

Kata Kunci: Ruang norm-2, ruang $\mathrm{C}[\mathrm{a},\mathrm{b}]$, ruang norm lengkap.

1. Pendahuluan

Konsep ruang norm pertama kali dikemukakan oleh S. Banach, H. Hahn dan N. Wiener pada tahun 1922, kemudian teorinya dikembangkan oleh S. Banach pada tahun 1932. Ruang norm adalah ruang-ruang yang dibangun dari ruang vektor dengan norm yang terdefinisikan di dalamnya. Ruang vektor X mempunyai norm yang dilambangkan dengan $\|.\|$ dan pasangan $(X\|.\|)$ disebut ruang norm. Sebuah ruang disebut ruang norm yang lengkap (Ruang Banach) jika setiap barisan Cauchy dalam ruang tersebut konvergen ke suatu elemen yang ada dalam ruang tersebut.

Konsep ruang norm-2 pertama kali diperkenalkan oleh Gähler pada tahun 1960-an. Sejak saat itu, ruang norm telah banyak dikaji oleh para matematikawan antara lain H. Gunawan dan M. Mashadi dalam tulisannya "On finite-dimensional 2-normed space"pada tahun 2001. Norm-2 dilambangkan$\|\cdot,\cdot\|$, sedangkan $(\mathrm{X},\|.,.\|)$menyatakan ruang norm-2.

Salah satu contoh ruang norm adalah ruang $C[a,b]$.Ruang $C[a,b]$ merupakan ruang fungsi-fungsi kontinu pada interval tertutup $[a,b]$. Kreyszig (1989) menyatakan bahwa norm pada $C[a,b]$ didefinisikan dengan:[1]

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]}|f(t)| \qquad (1)$$

Beberapa penelitian telah membuktikan bahwa $C[a,b]$yang dilengkapi dengan suatu norm-2 merupakan ruang norm-2 yang lengkap. Enjun Junaetidalam tulisannya "*Ruang Fungsi Real Kontinu pada Interval [a,b] Sebagai Ruang Norm-n*" membuktikan kelengkapan ruang $C[a,b]$pada ruang norm dengan memanfaatkan suatu diagram keterkaitan antara kekonvergenan barisan terhadap norm-*n* dan kekonvergenan barisan terhadap norm di $C[a,b]$. Pada tulisan ini, kelengkapan ruang $C[a,b]$ pada norm-2 dilakukan dengan menggunakan kriteria barisan Cauchy, yaitu dengan membuktikan bahwa setiap barisan Cauchy di $C[a,b]$konvergen ke suatu $x\in C[a,b]$

[1,2,3] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10 Makassar*

2. Ruang $C[a,b]$

2.1. Ruang $C[a,b]$ sebagai ruang vektor

Sebelum membuktikan $C[a,b]$ sebagai ruang vektor, terlebih dahulu diberikan pengertian ruang $C[a,b]$ sebagai berikut:

Definisi 1
Himpunan semua fungsi bernilai real $f_1(t), f_2(t), \dots$ yang kontinu pada interval tutup $[a,b]$, disebut ruang fungsi kontinu pada interval $[a,b]$ dan dituliskan dengan notasi $C[a,b]$. Jadi,

$C[a,b] = \{f_i, i = 1,2,\dots \mid f_i(t)$ kontinu untuk setiap $t \in [a,b]\}$.

Dengan mengunakan aksioma ruang vektor, berikut ini diperlihatkan bahwa $C[a,b]$ adalah ruang vektor.

Misalkan $f_1, f_2, f_3 \in C[a,b]$ dengan α, β sebarang skalar.

1. Akan ditunjukkan jika $f_1, f_2 \in C[a,b]$maka $(f_1 + f_2) \in C[a,b]$

Diketahui $f_1, f_2 \in C[a,b]$artinya untuk setiap $t \in [a,b]$
$f_1(t) = \lim\limits_{x\to t} f_1(x)$
$f_2(t) = \lim\limits_{x\to t} f_2(x)$
Sehingga $\lim_{x\to t}(f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x\to t} f_1(x) + \lim_{x\to t} f_2(x)$
$= f_1(t) + f_2(t)$
$= (f_1 + f_2)(t)$

jadi $(f_1 + f_2) \in C[a,b]$

2. Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang skalar α, jika $f_1 \in C[a,b]$ maka $\alpha f_1 \in C[a,b]$

Diketahui $f_1 \in C[a,b]$artinya untuk setiap $t \in [a,b]$
$f_1(t) = \lim_{x\to t} f_1(x)$
Dengan menggunakan sifat limit maka
$\lim\limits_{x\to t} \alpha f_1(x) = \alpha \lim\limits_{x\to t} f_1(x)$
$= \alpha f_1(t)$

jadi $(\alpha f_1) \in C[a,b]$

3. Akan ditunjukkan $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$

Untuk setiap $t \in [a,b]$, $(f_1 + f_2)(t) = f_1(t) + f_2(t)$
$= \lim_{x\to t} f_1(x) + \lim_{x\to t} f_2(x)$
$= \lim_{x\to t} f_2(x) + \lim_{x\to t} f_1(x)$
$= f_2(t) + f_1(t)$
$= (f_2 + f_1)(t)$
Jadi $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$

4. Akan ditunjukkan $f_1 + (f_2 + f_3) = (f_1 + f_2) + f_3$

Untuk setiap $t \in [a,b]$
$(f_1 + (f_2 + f_3))(t) = \lim\limits_{x\to t} f_1(x) + (\lim\limits_{x\to t} f_2(x) + \lim\limits_{x\to t} f_3(x))$
$= \lim_{x\to t} f_1(x) + \lim_{x\to t} f_2(x) + \lim_{x\to t} f_3(x)$
$= (\lim_{x\to t} f_1(x) + \lim_{x\to t} f_2(x)) + \lim_{x\to t} f_3(x)$
$= \left(f_1(t) + f_2(t)\right) + f_3(t)$
$= ((f_1 + f_2) + f_3)(t)$

5. Pilih fungsi $\mathbf{0}(t) = 0$ untuk setiap $t \in [a,b]$. Untuk setiap $f_1(t) \in \mathbb{R}$ berlaku $0(t) + f_1(t) = 0 + f_1(t) = f_1(t)$

6. Untuk setiap $f_1(t) \in \mathbb{R}$ pilih $(-\boldsymbol{f_1})(\boldsymbol{t}) = -f_1(t) \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $f_1(t) + -(\boldsymbol{f_1})(\boldsymbol{t}) = f_1(t) - (\boldsymbol{f_1})(\boldsymbol{t})$
$= \lim_{x\to t} f_1(x) - \lim_{x\to t} f_1(x)$
$= \lim_{x\to t}(f_1(x) - f_1(x))$
$= \lim_{x\to t}(0\,(x)) = \boldsymbol{0}(\boldsymbol{t})$
7. Akan ditunjukkan $\alpha(f_1 + f_2) = \alpha f_2 + \alpha f_1$
Untuk setiap $t \in [a, b]$
$\alpha\big(f_1(t) + f_2(t)\big) = \alpha(\lim_{x\to t} f_1(x) + \lim_{x\to t} f_2(x))$
$= \alpha \lim_{x\to t} f_1(x) + \alpha \lim_{x\to t} f_2(x)$
$=\alpha f_1(t) + \alpha f_2(t)$
8. Akan ditunjukkan $(\alpha + \beta)f_1 = \alpha f_1 + \beta f_1$
Untuk setiap $t \in [a, b]$, $(\alpha + \beta)f_1(t) = (\alpha + \beta)\ \lim_{x\to t} f_1(x)$
$= \alpha\ \lim_{x\to t} f_1(x) + \beta\ \lim_{x\to t} f_1(x)$
$= \alpha f_1(t) + \beta f_1(t)$
9. Akan ditunjukkan $\alpha(\beta f_1) = (\alpha\beta)f_1$
Untuk setiap $t \in [a, b], \alpha\Big(\beta\big(f_1(t)\big)\Big) = \alpha(\beta\ \lim_{x\to t} f_1(x))$
$= \alpha\beta\ \lim_{x\to t} f_1(x)$
$= (\alpha\beta)(f_1(t))$
10. Akan ditunjukkan $1(f_1) = f_1$
Untuk setiap $t \in [a, b], 1(f_1)(t) =\ 1 \lim_{x\to t} f_1(x)$
$= \lim_{x\to t} f_1(x)$
$= f_1(t)$

Karena $C[a, b]$memenuhi aksioma ruang vektor maka $C[a, b]$ adalah **ruang vektor**.■

2.2. Ruang $\boldsymbol{C[a, b]}$ sebagai ruang norm

Definisi 2.
*Misalkan X adalah ruang vektor real. **Norm pada X** didefinisikan sebagai suatu pemetaan $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ dimana untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ memenuhi :*
1. $\|x\| \geq 0$.
2. $\|x\| = 0$, *jika dan hanya jika* $x = 0$.
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Selanjutnya, pasangan $(X, \|\cdot\|)$ disebut ruang norm.

Berikut ini dibuktikan bahwa norm pada $C[a, b]$ yang didefinisikan dengan
$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$$
merupakan ruang norm

Bukti.

1. Diketahui
$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$$

Untuk t yang tetap maka $\|f\|_\infty \geq |f(t)|$. Karena $|f(t)| \geq 0$ maka $\|f\|_\infty \geq 0$
2. Akan ditunjukkan $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]}|f(t)| = 0$ jika dan hany jika $f = 0$
($\Longrightarrow$) Misalkan $\|f\|_\infty = 0$ artinyasup$_{t\in[a,b]}|f(t)| = 0$.
Untuk setiap $t \in [a,b]$ berlaku :

$\|f\|_\infty \geq |f(t)| \geq 0.$

Karena $\|f\|_\infty = 0$ maka$|f(t)| = 0$ Jadi $f = 0$ untuk setiap $t \in [a,b]$
($\Longleftarrow$)Misalkan $f = 0$. Berdasarkan definisi nilai mutlak maka $|f(t)| = 0$ untuk setiap $t \in [a,b]$.
Hal ini berarti maks$_{t\in[a,b]}|f(t)| = 0$.
Jadi $\|f\|_\infty = 0$
3. Akan ditunjukkan $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha|\|f\|_\infty$ untuk setiap $f \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$

Dari definisi diperoleh:

$$\begin{aligned}\|\alpha f\|_\infty &= \sup_{t\in[a,b]}|\alpha f(t)| \\ &= \sup_{t\in[a,b]}(|\alpha||f(t)|) \\ &= |\alpha| \sup_{t\in[a,b]}|f(t)| \\ &= |\alpha|\|f\|_\infty\end{aligned}$$

4. Akan ditunjukkan $\|f_1 + f_2\|_\infty \leq \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty$ untuk setiap $f_1, f_2 \in X$
Misalkan $\|f_1\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]}|f_1(t)|$ dan $\|f_2\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]}|f_2(t)|$
Maka

$$\begin{aligned}\|f_1 + f_2\|_\infty &= \sup_{t\in[a,b]}|f_1(t) + f_2(t)| \\ &\leq \sup_{t\in[a,b]}|f_1(t)| + \sup_{t\in[a,b]}|f_2(t)| \\ &= \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty\end{aligned}$$

Sehingga $\|f_1 + f_2\|_\infty \leq \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty$

Karena $\|f\|_\infty$memenuhi sifat norm , maka $C[a,b]$ adalah ruang norm.■

2.3. Kelengkapan Ruang $C[a,b]$

Definisi 3.
Misalkan$(X, \|\cdot\|)$ adalah ruang norm, X dikatakan lengkap jika untuk setiap barisan Cauchy (x_n) dalam X konvergen ke suatu $x \in X$. Ruang norm yang lengkap disebut ruang Banach.

Definisi 4.
Ruang $C[a,b]$ disebut ruang yang lengkap jika setiap barisan Cauchy di $C[a,b]$ konvergen ke suatu $x \in C[a,b]$.

Definisi diatas akan digunakan untuk membuktikan ruang $C[a,b]$ yang dilengkapi norm yang didefiniskan dengan

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]}|f(t)|$$

merupakan ruang norm lengkap

Bukti.

Misalkan (f_m) sebarang barisan Cauchy di $C[a,b]$. Jadi untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $H(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n \geq H(\varepsilon)$ berlaku

$$\|f_m - f_n\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]}|f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon \qquad (2)$$

Akibatnya untuk suatu $t = t_0 \in [a,b]$, berlaku:

$$|f_m(t_0) - f_n(t_0)| < \varepsilon \qquad m, n > H(\varepsilon)) \qquad (3)$$

Hal ini memprelihatkan bahwa $(f_m(t_0)) = \{f_1(t_0), f_2(t_0), \ldots\}$ adalah sebuah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$. Karena $\mathbb{R}$ lengkap maka barisan $\left(f_m(t_0)\right)$ konvergen, katakanlah $f_m(t_0) \longrightarrow f(t_0)$ dengan $m \to \infty$. Dengan cara yang sama, untuk $t \in [a,b]$ tertentu, terdapat barisan $(f_m(t))$ konvergen ke $f(t)$ dengan $m \to \infty$. Perhatikan bahwa setiap $x \in [a,b]$ berpasangan dengan tepat satu $f(x)$, sehingga hal ini mendefinisikan fungsi f pada interval $[a,b]$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa untuk $f \in C[a,b]$, f_m konvergen ke f untuk $m \to \infty$.
Dari persaman (2) dengan $n \to \infty$ diperoleh
$\sup_{t\in[a,b]}|f_m(t) - f(t)| < \varepsilon \qquad m > N$
Sehingga untuk setiap $t \in [a,b]$ berlaku
$|f_m(t) - f(t)| < \varepsilon \qquad m > N$
Hal ini menunjukkan bahwa $(f_m(t))$ konvergen seragam ke $f(t)$ di $[a,b]$ berdasarkan criteria Cauchy untuk konvergen seragam. Karena barisan (f_m) kontinu dan konvergen seragam di $[a,b]$, maka limit fungsi f juga kontinu di $[a,b]$, sehingga $f \in [a,b]$. Karena (f_m) barisan Cauchy sebarang di $C[a,b]$ dan untuk setiap $t \in [a,b]$ berlaku (f_m) konvergen ke f maka $C[a,b]$ lengkap.■

2.4. Ruang $C[a,b]$ sebagai Ruang Norm-2

Ruang norm-2 didefinisikan sebagai berikut

Definisi *5*

Misalkan X adalah ruang vektor real dengan dimensi $d \geq 2$ (d boleh tak hingga). Suatu fungsi $\|.,.\| = X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$yang memenuhi empat sifat:

1. $\|x,y\| = 0$ *jikan dan hanya jika x dan y bergantung linear;*
2. $\|x,y\| = \|y,x\|$*untuk setiap* $x,y \in X$;
3. $\|\alpha x,y\| = |\alpha|\|x,y\|$*untuk setiap* $x,y \in X, \alpha \in \mathbb{R}$;
4. $\|x+z,y\| \leq \|x,y\| + \|z,y\|$*untuk setiap* $x,y,z \in X$;

dinamakan norm-2 dan pasangan $(X, \|.,.\|)$ *dinamakan ruang norm-2* (Gunawan,2011).
Ruang norm-2 yang lengkap disebut juga ruang Banach-2.

Uraian berikut ini memperlihatkan bahwa ruang $C[a,b]$ dengan norm sebagaimana didefinisikan pada (1) merupakan Ruang Norm-2. Berdasarkan uraian sebelumnya telah diketahui bahwa

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Selanjutnyadiketahui suatu norm pada $C[a,b]$didefinisikan dengan

$$\|f,g\|_\infty = \sup_{a\leq x\leq b} \sup_{a\leq y\leq b} \left|\det\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f(y) & g(y)\end{pmatrix}\right| \tag{4}$$

(Junaeti ,2011:20)

Pembuktian norm-2 dilakukan dengan menunjukkan bahwa norm sebagaimana didefinisikan pada (4) memenuhi sifat-sifat pada definisi 5 sebagai berikut:

1. Akan ditunjukkan $\|f,g\|_\infty = 0$ jika dan hanya jika f dan g bergantung linear.

($\Longrightarrow$)Akan ditunjukkan jika $\|f,g\|_\infty = 0$maka$f$ dan g bergantung linear.
Diketahui$\|f,g\|_\infty = 0$,

Jadi $\sup_{a\le x\le b}\sup_{a\le y\le b}\left|\det\begin{pmatrix} f(x) & g(x)\\ f(y) & g(y)\end{pmatrix}\right| = 0$

Dengan kata lain $\det\begin{pmatrix} f(x) & g(x)\\ f(y) & g(y)\end{pmatrix} = 0$

Hal ini berarti terdapat baris atau kolom matriks yang berkelipatan

Tanpa mengurangi keberlakuan umum, misalkan

$\begin{pmatrix} g(x)\\ g(y)\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} f(x)\\ f(y)\end{pmatrix}$ atau $g = kf$

Jadi f dan g bergantung linear.

($\Longleftarrow$)Akan ditunjukkan jika f dan g bergantung linear maka $\|f,g\|_\infty = 0$

Karena f dan g bergantung linear maka terdapat k sedemikian sehingga

$$\begin{pmatrix} g(x)\\ g(y)\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} f(x)\\ f(y)\end{pmatrix}$$

Akibatnya

$$\|f,g\|_\infty = \sup_{a\le x\le b}\sup_{a\le y\le b}\left|\det\begin{pmatrix} f(x) & g(x)\\ f(y) & g(y)\end{pmatrix}\right|$$

$$= \sup_{a\le x\le b}\sup_{a\le y\le b}\left|\det\begin{pmatrix} f(x) & kf(x)\\ f(y) & kf(y)\end{pmatrix}\right| = 0$$

Terbukti $\|f,g\|_\infty = 0$.

2. Akan ditunjukkan $\|f,g\|_\infty = \|g,f\|_\infty$ untuk setiap $f,g \in C[a,b]$.

$$\|f,g\|_\infty = \sup_{a\le x\le b}\sup_{a\le y\le b}\left|\det\begin{pmatrix} f(x) & g(x)\\ f(y) & g(y)\end{pmatrix}\right|$$

$$= \sup_{a\le x\le b}\sup_{a\le y\le b}|f(x)g(y) - f(y)g(x)|$$
$$= \sup_{a\le x\le b}\sup_{a\le y\le b}|g(y)f(x) - g(x)f(y)|$$
$$= \sup_{a\le x\le b}\sup_{a\le y\le b}|g(x)f(y) - g(y)f(x)|$$
$$= \sup_{a\le x\le b}\sup_{a\le y\le b}\left|\det\begin{pmatrix} g(x) & f(x)\\ g(y) & f(y)\end{pmatrix}\right|$$
$$= \|g,f\|_\infty$$

Jadi $\|f,g\|_\infty = \|g,f\|_\infty$.

3. Akan ditunjukkan $\|\alpha f,g\|_\infty = |\alpha|\|f,g\|_\infty$ untuk setiap $f,g \in C[a,b], \alpha \in \mathbb{R}$;

$$\|\alpha f,g\|_\infty = \sup_{a\le x\le b}\sup_{a\le y\le b}\left|\det\begin{pmatrix} \alpha f(x) & g(x)\\ \alpha f(y) & g(y)\end{pmatrix}\right|$$
$$= \sup_{a\le x\le b}\sup_{a\le y\le b}|\alpha f(x)g(y) - \alpha f(y)g(x)|$$
$$= \sup_{a\le x\le b}\sup_{a\le y\le b}|\alpha(f(x)g(y) - f(y)g(x))|$$
$$= \sup_{a\le x\le b}\sup_{a\le y\le b}|\alpha||f(x)g(y) - f(y)g(x)|$$
$$= |\alpha|\sup_{a\le x\le b}\sup_{a\le y\le b}|f(x)g(y) - f(y)g(x)|$$
$$= |\alpha|\|f,g\|_\infty$$

Jadi $\|\alpha f,g\|_\infty = |\alpha|\|f,g\|_\infty$.

4. Akan ditunjukkan $\|f+h,g\|_\infty \le \|f,g\|_\infty + \|h,g\|_\infty$ untuk setiap $f,g,h \in C[a,b]$.

$$\|f+h,g\|_\infty = \sup_{a\le x\le b}\sup_{a\le y\le b}\left|\det\begin{pmatrix} f(x)+h(x) & g(x)\\ f(y)+h(y) & g(y)\end{pmatrix}\right|$$
$$= \sup_{a\le x\le b}\sup_{a\le y\le b}\left|\det\begin{pmatrix} f(x) & g(x)\\ f(y) & g(y)\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} h(x) & g(x)\\ h(y) & g(y)\end{pmatrix}\right|$$
$$\le \sup_{a\le x\le b}\sup_{a\le y\le b}\left|\det\begin{pmatrix} f(x) & g(x)\\ f(y) & g(y)\end{pmatrix}\right| + \sup_{a\le x\le b}\sup_{a\le y\le b}\left|\det\begin{pmatrix} h(x) & g(x)\\ h(y) & g(y)\end{pmatrix}\right|$$
$$\le \|f,g\|_\infty + \|h,g\|_\infty$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa

$$\sup_{a\le x\le b}\sup_{a\le y\le b}\left|\det\begin{pmatrix} f(x) & g(x)\\ f(y) & g(y)\end{pmatrix}\right|$$

merupakan norm-2 pada ruang $C[a,b]$.

2.5. Kelengkapan Ruang $C[a,b]$ pada Norm-2

Pada subbab ini akan ditunjukkan bahwa ruang $C[a,b]$merupakan ruang norm-2 yang lengkap, dengan norm -2 yang didefinisikan dengan

$$\|f,g\|_\infty = \sup_{a\le x\le b}\sup_{a\le y\le b}\left|\det\begin{pmatrix} f(x) & g(x)\\ f(y) & g(y)\end{pmatrix}\right| \qquad (5)$$

Bukti.

Misalkan (f_m) sebarang barisan Cauchy di $C[a,b]$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m,n \ge n_0$, berlaku

$$\|f_m - f_n, g\|_\infty = \sup_{a\le x\le b}\sup_{a\le y\le b}\left|\det\begin{pmatrix} f_m(x)-f_n(x) & g(x)\\ f_m(y)-f_n(y) & g(y)\end{pmatrix}\right| < \varepsilon \qquad (6)$$

Ambil $x = x_0 \in [a,b]$dan $y = y_0 \in [a,b]$ yang tetap maka berlaku

$$\left|\det\begin{pmatrix} f_m(x_0)-f_n(x_0) & g(x_0)\\ f_m(y_0)-f_n(y_0) & g(y_0)\end{pmatrix}\right| < \varepsilon$$

atau

$$|(f_m(x_0)-f_n(x_0))g(y_0) - (f_m(y_0)-f_n(y_0))\, g(x_0)| < \varepsilon \qquad (7)$$

Kasus I

Dari persamaan (7) diperoleh

$$|(f_m(x_0)-f_n(x_0))g(y_0) - (f_m(y_0)-f_n(y_0))\, g(x_0)| < \varepsilon$$
$$|(f_m(x_0)-f_n(x_0))g(y_0)| - |(f_m(y_0)-f_n(y_0))\, g(x_0)| < \varepsilon$$
$$|(f_m(x_0)-f_n(x_0))g(y_0)| < \varepsilon + |(f_m(y_0)-f_n(y_0))\, g(x_0)|$$

Jika $|(f_m(y_0)-f_n(y_0))\, g(x_0)| < \varepsilon$ mengakibatkan

$$|(f_m(x_0)-f_n(x_0))g(y_0)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Kasus II

Jika $|(f_m(x_0)-f_n(x_0))\, g(y_0)| < \varepsilon$ maka persamaan (7) menjadi

$$|(f_m(x_0)-f_n(x_0))g(y_0) - (f_m(y_0)-f_n(y_0))\, g(x_0)| < \varepsilon$$
$$\left|\big(f_m(y_0)-f_n(y_0)\big)g(x_0) - (f_m(x_0)-f_n(x_0))g(y_0)\right| < \varepsilon$$
$$\left|\big(f_m(y_0)-f_n(y_0)\big)g(x_0)\right| - |(f_m(x_0)-f_n(x_0))g(y_0)| < \varepsilon$$
$$|(f_m(y_0)-f_n(y_0))g(x_0)| < \varepsilon + |(f_m(x_0)-f_n(x_0))g(y_0)|$$

Jika $|(f_m(x_0)-f_n(x_0))g(y_0)| < \varepsilon$ mengakibatkan

$$|(f_m(y_0)-f_n(y_0))g(x_0)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Dari kasus I dan II diperoleh:

$$|(f_m(y_0) - f_n(y_0))g(x_0)| < \varepsilon \text{ dan} |(f_m(x_0) - f_n(x_0))g(y_0)| < \varepsilon$$

Sehingga disimpulkan bahwa
$(f_m(x_0)) = \{f_1(x_0), f_2(x_0), \dots\}$ dan $(f_m(y_0)) = \{f_1(y_0), f_2(y_0), \dots\}$
adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$.
Karena $\mathbb{R}$ lengkap maka barisan $(f_m(x_0))$ dan $(f_m(y_0)$ konvergen.
Misalkan$f_m(x_0) \longrightarrow f(x_0)$ dan $f_m(y_0) \longrightarrow f(y_0)$ untuk $m \longrightarrow \infty$.
Kemudian akan ditunjukkan $f_m \longrightarrow f$ dan $f \in C[a,b]$.
Dari persamaan (5), untuk setiap $m, n \geq n_0$ diperoleh

$$\sup_{a\leq x\leq b} \sup_{a\leq y\leq b} \left|\det\begin{pmatrix} f_m(x) - f_n(x) & g(x) \\ f_m(y) - f_n(y) & g(y) \end{pmatrix}\right| < \varepsilon$$

Untuk $n \longrightarrow \infty$, dimana $m \geq n_0$, diperoleh

$$\sup_{a\leq x\leq b} \sup_{a\leq y\leq b} \left|\det\begin{pmatrix} f_m(x) - f(x) & g(x) \\ f_m(y) - f(y) & g(y) \end{pmatrix}\right| < \varepsilon$$

Akibatnya:

$$\sup_{a\leq x\leq b} \sup_{a\leq y\leq b} \left|(f_m(x) - f(x))g(y) - \big(f_m(y) - f(y)\big)g(x)\right| < \varepsilon \qquad (m \geq n_0)$$

Sehingga untuk setiap $x, y \in [a,b]$ dan $m \geq n_0$ berlakU

$$\left|(f_m(x) - f(x))g(y) - \big(f_m(y) - f(y)\big)g(x)\right| < \varepsilon \qquad (8)$$

Persamaan (8) menunjukkan bahwa $(f_m(x))$ konvergen seragam ke $f(x)$ di $[a,b]$ berdasarkan kriteria Cauchy untuk konvergen seragam. Karena barisan (f_m) kontinu dan konvergen seragam di $[a,b]$, maka limit fungsi f juga kontinu di $[a,b]$, sehingga $f \in [a,b]$. Karena (f_m) barisan Cauchy sebarang di $C[a,b]$ dan untuk setiap $x \in [a,b]$ berlaku (f_m) konvergen ke .
Jadi$(C[a,b]\|.,.)\|$ lengkap.■

3. Penutup

Ruang $C[a,b]$ merupakan ruang fungsi real kontinu pada interval $[a,b]$, Dengan norm-2 yang didefinisikan dengan persamaan

$$\|f,g\|_\infty = \sup_{a\leq x\leq b} \sup_{a\leq y\leq b} \left|\det\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f(y) & g(y) \end{pmatrix}\right|$$

Telah ditunjukkan bahwa dengan norm yang didefinisikan tersebut, sebarang barisan Cauchy di $C[a,b]$konvergen ke suatu fungsi kontinu $f \in C[a,b]$. Hal ini menunjukkan bahwa ruang $(C[a,b], \|.,.\|_\infty)$ merupakan ruang norm-2 yang lengkap, yang telah dibuktikan pada subb$(C[a,b], \|.,.\|_\infty)$ merupakan ruang norm-2 yang lengkap.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H., dan Chris Rorres. 2004. *Aljabar Linear Elementer*. 8th Edition. Jakrta : Erlangga.

[2] Bartle, Robert G., dan Donald R. Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis*. Third Edition. New York: John Wiley and Sons. Inc.

[3] Kreyszig.E, 1989. *Introductory Functional Analysis with Application*. New York : John Wiley and Sons. Inc.

[4] Gunawan, H dan M. Mashadi. 2001. *On Finite-Dimensional 2-Normed Space.* Soochow J. Volume 27, 321-329.

[5] Junaeti, Enjun. 2011. *Ruang Fungsi Real Kontinu Pada Interval [a,b] Sebagai Ruang Norm-N*. Bandung : Thesis Institut Teknologi Bandung.

[6] Nur, Muh. 2011. *Teorema Titik Tetap di Ruang Norm-n Standar*. Bandung : Thesis Institut Teknologi Bandung.