

Solusi Numerik Persamaan Gelombang Dua Dimensi Menggunakan Metode *Alternating Direction Implicit*

Rezki Setiawan Bachrun^{*}, Khaeruddin^{**}, Andi Galsan Mahie^{***}

Abstrak

Salah satu fenomena fisik yang sering dijadikan sebagai studi rekayasa dan melibatkan model matematika adalah fenomena gelombang pada sebuah gendang berbentuk segiempat. Model matematika yang terbentuk dari fenomena gelombang merupakan suatu Persamaan Diferensial Parsial (PDP). Pada penelitian ini, model PDP pada gelombang diselesaikan secara numerik dengan menerapkan metode beda hingga, menggunakan skema *Alternating Direction Implicit* (ADI) dengan melibatkan beberapa masalah syarat batas dan syarat awal. Masalah syarat batas yang digunakan adalah masalah syarat batas Dirichlet. Hasil penelitian menunjukkan bahwa skema ADI konsisten terhadap PDP awal dan stabil pada saat $D_{xx} + D_{yy} \leq 1$. Solusi numerik yang diperoleh pada skema ADI konvergen terhadap solusi analitiknya.

Kata Kunci :Persamaan gelombang, numerik, metode beda hingga, *Alternating Direction Implicit*, syarat batas Dirichlet, konsisten, stabil, konvergen.

1. PENDAHULUAN

Fenomena gelombang merupakan suatu gejala alam yang penting untuk dipelajari karena mempunyai pengaruh terhadap beberapa studi rekayasa. Fenomena tersebut terjadi dalam berbagai macam situasi fisik, salah satunya pada sebuah gendang. Salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk menyelesaikan PDP adalah metode beda hingga. Metode beda hingga mudah digunakan dalam penyelesaian masalah fisik yang mempunyai bentuk geometri teratur, seperti interval dalam satu dimensi, kotak dalam dua dimensi atau kubik dalam tiga dimensi [4].

Dalam metode beda hingga dengan skema implisit terdapat beberapa metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan gelombang dua dimensi, salah satunya adalah metode *Alternating Direction Implicit* (ADI), dimana metode ADI dapat memberikan hasil pendekatan yang relatif lebih efisien dibandingkan dengan metode implisit lainnya [2]. Kemampuan metode beda hingga tersebut karena didukung oleh kemajuan yang sangat pesat dalam bidang komputer, baik dalam software maupun hardware. Dengan kecanggihan software maupun hardware pada komputer sekarang, masalah rekayasa yang rumit dapat dimodelkan dengan relatif mudah. Waktu yang diperlukan untuk memecahkan masalah pun semakin singkat [5]. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui solusi numerik dari persamaan gelombang dua dimensi menggunakan metode ADI.¹

2. BAHAN DAN METODE

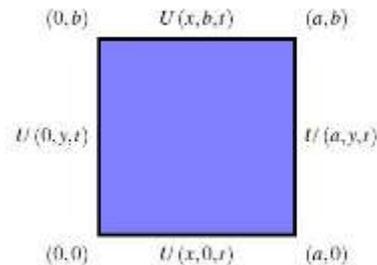
A. Persamaan Gelombang dan Objek Pengamatan

Diketahui bentuk persamaan gelombang dua dimensi, yaitu:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right). \quad (1)$$

^{1,2,3} Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10 Makassar

dimana $c^2 = \frac{T}{\rho}$ dengan $T(kgm^{-1}s^{-2})$ menyatakan tegangan dan $\rho(kgm^{-3})$ menyatakan massa jenis membran [3]. Bentuk domain dari Persamaan (1) digambarkan pada Gambar (1) sebagai berikut:



Gambar 1. Segmen membran yang merupakan objek pengamatan

Pada Gambar (1) menunjukkan objek pengamatan perambatan gelombang pada bagian membran yaitu diambil dari satu garis dari sisi luar membran pada gendang segiempat yaitu $x = a$ dan $y = b$ sampai pada sisi luar yang satunya yaitu $x = 0$ dan $y = 0$. Segmen membran tersebut akan diamati perubahannya dari waktu awal (x_0) hingga waktu yang ditentukan (t_{end}).

B. Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah suatu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan suatu PDP dengan menggunakan pendekatan deret *Taylor*. Deret *Taylor* dalam artian fisik dapat diartikan sebagai “suatu besaran tinjauan pada suatu ruang dan waktu tertentu dapat dihitung dari besaran itu sendiri pada ruang dan waktu tertentu yang mempunyai perbedaan kecil dengan ruang dan waktu tinjauan” [1].

Secara matematis deret *Taylor* dapat dinyatakan sebagai berikut:

Andaikan f dan semua turunannya f', f'', \dots , kontinu di dalam selang $[a, b]$. Misalkan $x_0 \in [a, b]$, maka untuk nilai-nilai x disekitar x_0 dan $x \in [a, b]$, dapat diekspansi ke dalam deret *Taylor* [5]

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots \quad (2)$$

Persamaan (2) merupakan penjumlahan dari suku-suku yang disebut deret. Jika dimisalkan $\Delta x = x - x_0$, maka $f(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut [2]:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Delta x)^n}{n!} f^{(n)}(x_0). \quad (3)$$

Berdasarkan ekspansi deret *Taylor* pada Persamaan (3) terdapat tiga skema beda hingga yang dapat digunakan dalam diskritisasi PDP, yaitu beda maju, beda mundur, dan beda pusat.

Dengan menggunakan Persamaan (3) maka diperoleh skema beda hingga untuk orde pertama yaitu:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i \approx \frac{f_{i+\frac{1}{2}} - f_i}{(\frac{1}{2}\Delta x)} + O\{(\Delta x)\}, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i \approx \frac{f_i - f_{i-\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{2}\Delta x)} + O\{(\Delta x)\}, \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i \approx \frac{f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}}{(\Delta x)} + O\{(\Delta x)^2\}. \quad (6)$$

dimana O merupakan tingkat kesalahan pada suku terbesar dari sisa deret. Persamaan (4), (5), dan (6) berturut-turut merupakan skema beda maju, beda mundur, dan beda pusat untuk orde pertama.

Dengan menggunakan cara yang sama, skema beda pusat orde kedua diperoleh:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i \approx \frac{f_{i+\frac{1}{2}} - 2f_i + f_{i-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\Delta x\right)^2} + O\{(\Delta x)^3\} \quad (7)$$

Dalam menyelesaikan suatu PDP yang dinyatakan dengan fungsi $U(x, y, t)$ terdapat persoalan masalah syarat batas, dimana pada penelitian ini menggunakan masalah syarat batas *Dirichlet* dengan artian nilai konstanta U ditetapkan diseluruh batas pada domain [2].

Dalam menyelesaikan suatu PDP dengan menggunakan suatu metode numerik, dimana metode tersebut dikatakan dapat menyelesaikan suatu PDP yang dihipotesiskan jika memenuhi 3 sifat yaitu konsistensi, kestabilan, dan konvergensi.

C. Persoalan Konsistensi

Terminologi konsistensi menunjukkan bahwa solusi dengan Persamaan Beda Hingga (PBH) merupakan pendekatan solusi dari PDP yang diharapkan secara analitik, bukan solusi persamaan yang lain [7].

Secara matematis konsistensi PBH dapat dinyatakan sebagai berikut:

Misalkan PDP merupakan persamaan diferensial parsial dan PBH merupakan persamaan beda hingga dari sebuah PDP, suatu PBH dikatakan konsisten terhadap PDP yang didekati yaitu [6];

Jika $(\Delta x, \Delta y, \Delta t) \rightarrow 0$ maka $\text{PBH} \rightarrow \text{PDP}$.

D. Persoalan Kestabilan

Penerapan suatu metode numerik pada suatu PDP menghasilkan suatu PBH. Solusi numerik dari PBH belum tentu menghasilkan solusi yang sama dengan solusi analitik dari suatu PDP. Suatu PBH dikatakan stabil jika solusi yang dihasilkannya terbatas, sehingga dalam merumuskan suatu PBH diperlukan suatu analisis kestabilan [2].

Dalam menganalisis kestabilan suatu PBH, ada beberapa metode yang dapat digunakan, pada penelitian ini metode analisis kestabilan yang digunakan yaitu melalui pendekatan terhadap solusi numerik yang diperoleh melalui pemilihan panjang grid tertentu.

Secara matematis stabilitas PBH dapat dinyatakan sebagai berikut:

Sebuah PBH dari sebuah PDP dikatakan stabil jika [6]:

$$\left| \frac{U_{i,j}^{n+1}}{U_{i,j}^n} \right| = \left| \frac{\rho^{n+1} e^{I(\alpha\Delta x i + \beta\Delta y l)}}{\rho^n e^{I(\alpha\Delta x i + \beta\Delta y l)}} \right| = |\rho| \leq 1.$$

Jika untuk nilai $\Delta x, \Delta y$, dan Δt tertentu memenuhi $|\rho| \leq 1$ dikatakan stabil bersyarat dan jika untuk semua nilai $\Delta x, \Delta y$, dan Δt memenuhi $|\rho| \leq 1$ dikatakan stabil tak bersyarat.

E. Persoalan Konvergensi

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menganalisis konvergensi suatu PBH yaitu dengan memperhatikan galat absolut yang dihasilkan, apabila panjang gridnya dibuat menuju nol maka galat absolut yang diperoleh juga menuju nol. Karena dalam penelitian ini tidak diperoleh solusi analitiknya maka metode alternatif yang digunakan yaitu dengan memperhatikan galat relatif yang dihasilkan.

Secara matematis konvergensi PBH dapat dinyatakan sebagai berikut:

Misalkan $U_{i,j}^n$ merupakan solusi analitik dari sebuah PDP dan $\overline{U}_{i,j}^n$ merupakan solusi numerik dengan menggunakan PBH. Sebuah PBH dikatakan konvergen terhadap PDP yang didekati yaitu [6]:

Jika $(\Delta x, \Delta y, \Delta t) \rightarrow 0$ maka $U_{i,j}^n \rightarrow \overline{U_{i,j}^n}$.

3. PEMBAHASAN

A. Diskritisasi Persamaan Gelombang

Melalui suatu PBH, benda atau struktur yang akan dianalisis dibagi atau dipotong kedalam bagian-bagian kecil (*grid*), inilah yang dinamakan sebagai diskritisasi. Banyaknya grid yang dibentuk bergantung pada panjang grid.

Bentuk diskritisasi untuk titik (x, y, t) diubah menjadi subskrip (i, j, n) , dimana:

Dimensi ruang x dengan M titik dinyatakan dengan indeks $i = 1, 2, \dots, M$,

Dimensi ruang y dengan N titik dinyatakan dengan indeks $j = 1, 2, \dots, N$,

Dimensi waktu t dengan P titik dinyatakan dengan indeks $n = 1, 2, \dots, P$.

Sedangkan untuk masing-masing panjang grid, yaitu:

$$\Delta x = \frac{a}{M-1}, \text{ dimana } 0 \leq x \leq a,$$

$$\Delta y = \frac{b}{N-1}, \text{ dimana } 0 \leq y \leq b, \text{ dan}$$

$$\Delta t = \frac{T}{P-1}, \text{ dimana } 0 \leq t \leq T.$$

B. Metode ADI

Di dalam formulasi skema ADI untuk dimensi waktu (t) dan dimensi ruang (x, y) menggunakan pendekatan beda pusat orde kedua. Skema ADI disusun berdasarkan pada syarat awal dan syarat batas yang diberikan.

PBH pada skema ADI membentuk dua persamaan simultan yang harus dikerjakan secara berurutan yaitu tahap x – sweep dan y – sweep. Tahap x – sweep digunakan untuk memperoleh nilai-nilai pada step waktu $n + \frac{1}{2}$. Dengan mensubstitusi Persamaan (7) ke Persamaan (1) yang merupakan persamaan gelombang, dengan demikian diperoleh:

$$p \left(U_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + U_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) + q U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = r (U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n) + s U_{i,j}^n - U_{i,j}^{n-\frac{1}{2}} \quad (8)$$

dimana $D_{xx} = \frac{c^2(\Delta t)^2}{4(\Delta x)^2}$; $D_{yy} = \frac{c^2(\Delta t)^2}{4(\Delta y)^2}$; $p = -D_{xx}$; $q = 1 + 2D_{xx}$; $r = D_{yy}$; dan $s = 2 - 2D_{yy}$.

Sedangkan untuk tahap y – sweep digunakan untuk memperoleh nilai-nilai pada step waktu $n + 1$ dengan melibatkan nilai-nilai yang diperoleh pada tahap x – sweep. Dengan mensubstitusi Persamaan (7) ke Persamaan (1) yang merupakan persamaan gelombang, dengan demikian diperoleh:

$$e (U_{i,j+1}^{n+1} + U_{i,j-1}^{n+1}) + f U_{i,j}^{n+1} = g \left(U_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + U_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) + h U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - U_{i,j}^n \quad (9)$$

dimana $D_{xx} = \frac{c^2(\Delta t)^2}{4(\Delta x)^2}$; $D_{yy} = \frac{c^2(\Delta t)^2}{4(\Delta y)^2}$; $e = -D_{yy}$; $f = 1 + 2D_{yy}$; $g = D_{xx}$; dan $h = 2 - 2D_{xx}$.

Persamaan (8) dan (9) merupakan PBH skema ADI yang digunakan untuk menentukan nilai-nilai $U(i, j, n)$ pada setiap domain yang telah didiskritisasi.

Dengan syarat awal, yaitu:

$$U_{i,j}^1 = f(x, y), \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N,$$

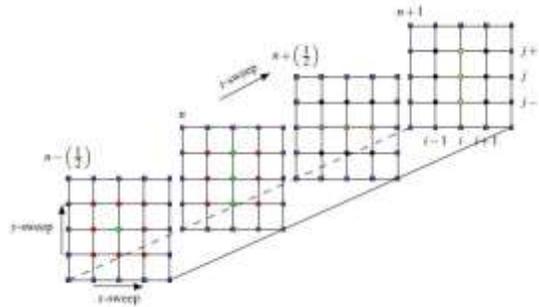
$$U_{i,j}^2 = g(x, y), \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N.$$

Sedangkan untuk syarat batasnya, yaitu:

$$U_{1,j}^n = U_{M,j}^n = 0, \text{ untuk } j = 1, 2, \dots, N; n = 1, 2, \dots, P,$$

$$U_{i,1}^n = U_{i,N}^n = 0, \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, M; n = 1, 2, \dots, P.$$

Berikut gambar jaringan titik hitung dengan menggunakan skema ADI pada penyelesaian persamaan gelombang:



Gambar2. Jaringan titik hitung dengan skema ADI

C. Analisis Konsistensi

Dalam tinjauan konsistensi suatu PBH, dapat dilakukan dengan mensubstitusi bentuk ekspansi deret *Taylor* pada setiap bentuk diskritisasi yang terlibat dalam PBH yang diperoleh. Dalam hal ini ekspansi deret *Taylor* yang dimaksud adalah:

- 1) Ekspansi deret *Taylor* dari $U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$ disekitar $U_{i,j}^n$, dapat dinyatakan dengan:

$$U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} = U_{i,j}^n \pm \left(\frac{1}{2}\Delta t\right) U_t + \frac{\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)^2}{2!} U_{tt} \pm \dots \quad (10)$$

- 2) Ekspansi deret *Taylor* dari $U_{i\pm 1,j}^{n+\frac{1}{2}}$ disekitar $U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$, dapat dinyatakan dengan:

$$U_{i\pm 1,j}^{n+\frac{1}{2}} = U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \pm (\Delta x) U_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} U_{xx} \pm \dots \quad (11)$$

- 3) Ekspansi deret *Taylor* dari $U_{i,j\pm 1}^n$ disekitar $U_{i,j}^n$, dapat dinyatakan dengan:

$$U_{i,j\pm 1}^n = U_{i,j}^n \pm (\Delta y) U_y + \frac{(\Delta y)^2}{2!} U_{yy} \pm \dots \quad (12)$$

- 4) Ekspansi deret *Taylor* dari $U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$ disekitar $U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$, dapat dinyatakan dengan:

$$U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = U_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \pm \left(\frac{1}{2}\Delta t\right) U_t + \frac{\left(\frac{1}{2}\Delta t\right)^2}{2!} U_{tt} \pm \dots \quad (13)$$

- 5) Ekspansi deret *Taylor* dari $U_{i,j\pm 1}^{n+1}$ disekitar $U_{i,j}^{n+1}$, dapat dinyatakan dengan:

$$U_{i,j\pm 1}^{n+1} = U_{i,j}^{n+1} \pm (\Delta y) U_y + \frac{(\Delta y)^2}{2!} U_{yy} \pm \dots \quad (14)$$

Dari setiap bentuk ekspansi deret *Taylor* yang diperoleh disubstitusi kedalam skema ADI yaitu tahap x – sweep dan y – sweep. Untuk tahap x – sweep dengan mensubstitusi Persamaan (10), (11), dan (12) ke persamaan awal pada tahapan x – sweep dan untuk tahap y – sweep dengan mensubstitusi Persamaan (11), (13), dan (14) ke persamaan awal pada tahapan y – sweep, sehingga keduanya diperoleh:

$$U_{tt} + O(\Delta t) = c^2 \left[(U_{xx} + O(\Delta x)) + (U_{yy} + O(\Delta y)) \right]. \quad (15)$$

Kemudian Persamaan (15) panjang gridnya dibuat menuju nol, sehingga diperoleh:

$$U_{tt} = c^2 (U_{xx} + U_{yy}).$$

Dari hasil yang diperoleh menunjukkan bahwa PBH dengan skema ADI konsisten terhadap PDP awal ketika panjang gridnya dibuat menuju nol.

D. Simulasi Komputasi

Dengan menggunakan software *Matlab R2009a*, dilakukan beberapa simulasi kasus dengan menggunakan skema ADI. Pertama-tama dilakukan suatu pendefinisian pada koefisien tegangan, massa jenis membran, panjang membran (a), lebar membran (b), serta waktu simulasi (t). Dilanjutkan dengan pendefinisian panjang grid, syarat awal dan syarat batas. Pada bagian proses, digunakanlah PBH skema ADI dengan menentukan jaringan titik hitungnya melalui penentuan indeks (i, j, n) , tentunya pada bagian ini terjadi perhitungan secara berulang-ulang.

Kasus I

Parameter-parameter yang diberikan:

Koefisien c^2		$= 1 \text{ (cm/s)}^2$;
Panjang membran (a)		$= 4 \text{ cm}$;
Lebar membran (b)		$= 2 \text{ cm}$;
Waktu simulasi (T)		$= 6 \text{ s}$;

Panjang grid $\Delta x = \Delta y = 0.05 \text{ cm}$;
 $\Delta t = 0.001 \text{ s}$

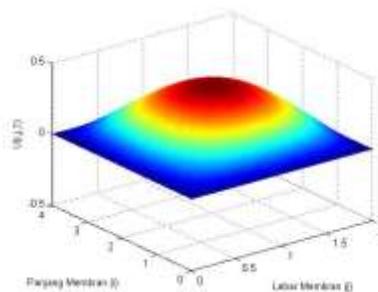
Jumlah grid x	$M = 81$;
Jumlah grid y	$N = 41$;
Step waktu t	$P = 12002$.

Dengan syarat awal:

$$U(x, y, 0) = 0.1(4x - x^2)(2y - y^2);$$

$$U_t(x, y, 0) = 0.$$

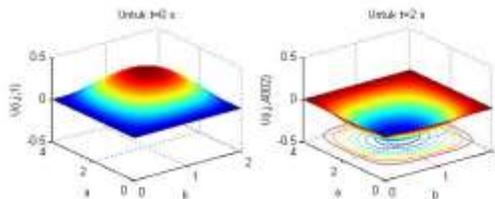
dimana $0 \leq x \leq 4$ dan $0 \leq y \leq 2$. Dengan parameter-parameter yang diberikan, diperoleh grid yang terbentuk berukuran (81×41) .

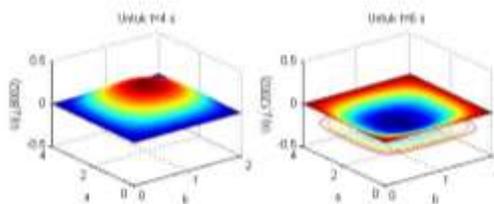


Gambar3. Kondisi awal pada saat $n = 1$ untuk kasus I

Gambar (3) merupakan visualisasi kondisi membran pada saat $t = 0$. Selanjutnya dengan $\Delta t = 0.001$ maka membentuk 12002 matriks dengan ukuran (81×41) . Untuk tahapan waktu yang pertama dan kedua dinyatakan pada syarat awal sedangkan untuk tahapan selanjutnya menggunakan nilai-nilai pada dua tahapan sebelumnya.

Berikut visualisasi perubahan gelombang yang terjadi dari waktu ke waktu:





Gambar4. Kondisi perambatan gelombang pada kasus I

Gambar (4) menunjukkan perubahan perambatan gelombang pada saat $t = 0$ s, $t = 2$ s, $t = 4$ s, dan $t = 6$ s.

Kasus II

Parameter-parameter yang diberikan:

Koefisien c^2

$$= 0.1013 \text{ (cm/s)}^2;$$

Panjang membran (a)

$$= 1 \text{ cm};$$

Lebar membran (b)

$$= 1 \text{ cm};$$

Waktu simulasi (T)

$$= 6 \text{ s};$$

Panjang grid

$$\Delta x = \Delta y = 0.05 \text{ cm};$$

$$\Delta t = 0.001 \text{ s}$$

Jumlah grid x

$$M = 21;$$

Jumlah grid y

$$N = 21;$$

Step waktu t

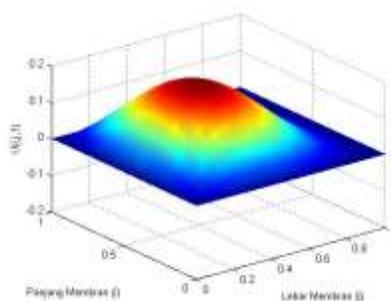
$$P = 12002.$$

Dengan syarat awal:

$$U(x, y, 0) = \sin(\pi x) \cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) \sin(\pi y);$$

$$U_t(x, y, 0) = 0.$$

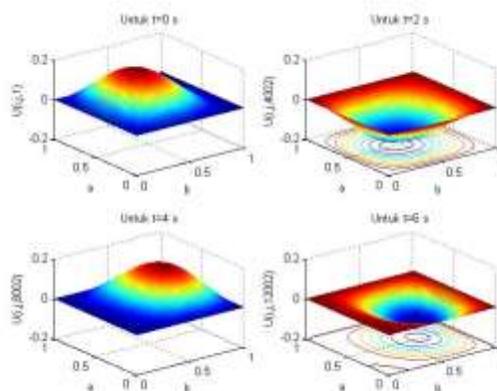
dimana $0 \leq x \leq 1$ dan $0 \leq y \leq 1$. Dengan parameter-parameter yang diberikan, diperoleh grid yang terbentuk berukuran (21×21) .



Gambar5. Kondisi awal pada saat $n = 1$ untuk kasus II

Gambar (5) merupakan visualisasi kondisi membran pada saat $t = 0$. Selanjutnya dengan $\Delta t = 0.001$ maka membentuk 12002 matriks dengan ukuran (21×21) . Untuk tahapan waktu yang pertama dan kedua dinyatakan pada syarat awal sedangkan untuk tahapan selanjutnya menggunakan nilai-nilai pada dua tahapan sebelumnya.

Berikut visualisasi perubahan gelombang yang terjadi dari waktu ke waktu:

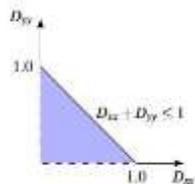


Gambar6. Kondisi perambatan gelombang pada kasus II

Gambar (6) menunjukkan perubahan perambatan gelombang pada saat $t = 0$ s, $t = 2$ s, $t = 4$ s, dan $t = 6$ s.

E. Analisis Kestabilan

Pada penelitian ini menganalisis kestabilan skema ADI hanya didekati berdasarkan pemilihan panjang grid tertentu. Hal ini disebabkan karena skema ADI dalam menganalisis kestabilan menggunakan metode analitik relatif sulit. Jadi dari hasil uji simulasi, apabila Δt diperbesar sedangkan Δx dan Δy tetap, diperoleh bahwa skema ADI stabil pada saat $D_{xx} + D_{yy} \leq 1$.



Gambar9. Syarat Kestabilan Skema ADI.

F. Analisis Konvergensi

Dalam uji konvergensi skema ADI, dilakukan melalui pengamatan dari galat relatif yang dihasilkan karena pada penelitian ini tidak diperoleh solusi analitiknya. Galat relatif ini dihitung dengan perhitungan matematika sebagai berikut:

$$\text{Galat} = \left| \frac{U_n(x, y, t_{end}) - U_{n-1}(x, y, t_{end})}{U_{n-1}(x, y, t_{end})} \right| \times 100\%.$$

Kasus 2 pada titik $U\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ dipilih sebagai pusat pengamatan. Metode yang diterapkan yaitu dengan melakukan pemilihan panjang grid Δx , Δy , dan Δt tertentu pada kondisi stabil, kemudian untuk pengamatan selanjutnya ukuran grid ruangnya yaitu setengah dari pengamatan sebelumnya sedangkan grid waktunya tetap. Hasil daripengamatan uji konvergensi skema ADI ini disajikan pada Tabel (1).

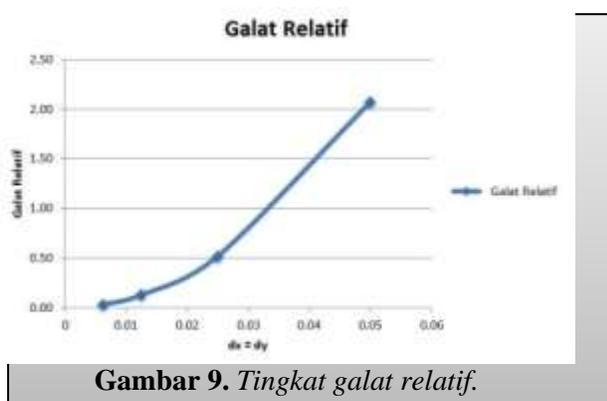
$\Delta x, \Delta y$	Δt	$U\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$	Galat (%)
----------------------	------------	---	-----------

1	0,1	0,001	0,03079	-
2	0,05	0,001	0,03015	2,07
3	0,025	0,001	0,03000	0,52
4	0,0125	0,001	0,02996	0,13
5	0,00625	0,001	0,02995	0,03

Tabel 1. Uji ADI.

konvergensi skema

Tabel (1) menunjukkan 5 pengamatan untuk kasus 2 pada titik tinjauan dengan menggunakan panjang grid yang berbeda-beda. Dari pengamatan solusi yang dihasilkan pada Tabel (1), diperoleh grafik sebagai berikut:



Gambar 9. Tingkat galat relatif.

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Dari pembahasan yang telah dijelaskan sebelumnya bahwa metode beda hingga dengan skema ADI dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan persamaan gelombang dimana penelitian ini menggunakan fenomena gelombang pada sebuah gendang yang berbentuk segiempat. Penggunaan metode beda hingga dengan skema ADI konsisten terhadap PDP awal. Dari hasil uji simulasi yang dilakukan dengan bantuan software *Matlab R2009a*, diperoleh skema ADI stabil pada saat $D_{xx} + D_{yy} \leq 1$ dengan kata lain syarat kestabilannya berupa stabil bersyarat. Sedangkan kekonvergenan skema ADI menghasilkan solusi yang konvergen melalui pendekatan tinjauan terhadap galat relatifnya ketika ukuran gridnya dibuat menuju nol. Penulisan selanjutnya disarankan dalam menganalisis kestabilan skema ADI dengan menggunakan salah satu metode analitik. Selain itu juga, karena dalam penulisan ini hanya menggunakan galat relatif dalam analisis konvergensi skema ADI selanjutnya diharapkan perlu adanya solusi analitiknya, sehingga dalam analisis konvergensi skema ADI menggunakan galat absolut.

DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Anderson, John., 1995, *Computational Fluid Dynamics the basic and applications 1st edition*, McGraw-Hill.
- [2]. Hoffmann, Klauss A., Chiang, Steve T., 2000, *Computational Fluid Dynamics Vol. II*, Wichita, USA: Engineering Education System.

- [3]. Kreyzig, Erwin., 2011, *Advanced Engineering Mathematics tenth edition*, Wiley
- [4]. Li, Qingling et al., 1998, “Heat Transfer and Pressure Drop Characteristics In Rectangular Channels with Elliptic Pin Fins”, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, pp. 245-250.
- [5]. Munir, Rinaldi., 2003, *Metode Numerik*, Bandung: Buku Teks Ilmu Komputer Informatika.
- [6]. Noye, I. John., 1983, *Computational Techniques for Differential Equation*, Australia: Faculty of Mathematical Sciences The University of Adelaide.
- [7]. Ribal, Agustinus., 2008, *Modul Kuliah Metode Beda Hingga*, Makassar: Jurusan Matematika FMIPA Unhas.