ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 12, No. 1, 1-8, Juli 2015

Isomorfisma dari Gelanggang Polinom Miring Kompleks ke Gelanggang Quaternion Riil

Amir Kamal Amir [1]

Abstrak

Misalkan R adalah suatu gelanggang dengan identitas 1, σ adalah suatu endomorfisma dari R, dan δ adalah suatu σ-derivatif. Gelanggang polinom miring dengan gelanggang tumpuan R dalam peubah tak diketahui x, disimbol dengan $R[x;\sigma,\delta]$, adalahgelanggang yang terdiri dari polinom seperti $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ yang memenuhi aturan perkalian: $xa=\sigma(a)x+\ \delta(a), \forall a\in R.$ Dalam paper ini, gelanggang tumpuan yang digunakan adalah gelanggang bilangan kompleks, endomorfisma yang digunakan adalah sekawan kompleks, dan δ diambil sama dengan nol. Paper ini akan membuktikan homomorfisma dari gelanggang polinom seperti ini ke gelanggang quaternion riil. Lebih jauh, akan ditunjukkan bahwa gelanggang quaternion riil isomorfik dengan suatu gelanggang faktor dari gelanggang polinom miring tersebut.

Kata Kunci: Isomorfisma, kompleks, quaternion, riil.

Abstract

Let R be any ring with identity *1*, σ be an endomorphism of R and δ be a left σ-derivation. The skew polynomial ring over R in an indeterminate *x*, denoted by $[x;\sigma,\delta]$, is the set of polynomials $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ where $a_i\in R$ with multiplication rule $xa=\sigma(a)x+\ \delta(a), \forall a\in R$ for all $a\in R$. In this paper, the ring R is complex number, σ is complex conjugate, and δ is zero σ-derivatif. It will be proven a hohomorphism from this skew polynomial ring to the quaternion rill ring. Moreover, it will be shown that the quaternion rill ring isomorphic with some factor ring of the skew polynomial ring.

Keywords: Isomorphism, complex, quaternion, real.

1. Pendahuluan

Gelanggang polinom miring adalah gelanggang yang terdiri dari polinom-polinom dengan aturan perkalian yang tidak bersifat komutatif. Sifat perkalian yang tidak komutatif, membuat struktur gelanggang ini jauh berbeda dengan struktur gelanggang polinom biasa. Hal ini menarik minat para peneliti untuk meneliti struktur gelanggang polinom miring. Penelitian ini akan meneliti struktur gelanggang polinom miring dengan gelanggang tumpuan adalah gelanggang bilangan kompleks dengan endomorfisma sekawan kompleks.

Pada sisi lain, gelanggang bilangan kompleks dapat dikembangkan menjadi gelanggang quaternion riil. Gelanggang quaternion juga dikenal sebagai gelanggang tidak komutatif. Penelitian ini akan membuktikan homomorfisam dari gelanggang polinom miring kompleks ke gelanggang quaternion riil. Untuk arah sebaliknya, akan membuktikan bahwa gelanggang

[1] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddinr, email : amirkamalamir@yahoo.com*

quaternion riil isomorfik dengan suatu gelanggang faktor dari gelanggang polinom miring kompleks. Ide ini diperoleh setelah membaca buku Cohn [1].

2. Beberapa Pengertian dan Notasi

2.1. Gelanggang Polinom Miring

Secara lengkap pengertian gelanggang polinom miring disajikan berikut ([3], [4]). Misalkan *R* suatu gelanggang, σ suatu endomorfisma di *R*, dan δ suatu σ-derivatif, yaitu:

1. δ suatu endomorfisma grup di *R*.
2. $\delta(ab) = \sigma(a)\delta(b) + \delta(a)b$ untuk setiap $a, b \in R$.

Gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ dalam variabel tak diketahui *x* berisi semua polinom dengan koefisien di *R* yang memenuhi aturan perkalian sebagai berikut: untuk setiap $a \in R$ berlaku $xa = \sigma(a)x + \delta(a)$.

Memperhatikan definisi dari gelanggang polinom miring dapat disimpulkan bahwa gelanggang polinom miring mengandung tiga unsur, yaitu gelanggang biasa, disimbol dengan *R* (biasa juga disebut gelanggang tumpuan dari gelanggang polinom miring tersebut), σ suatu endomorfisma di *R*, dan δ suatu σ-derivatif. Ketiga unsur tersebut bersama-sama memenuhi syarat-syarat gelanggang polinom miring.

Contoh 1.

Misalkan $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-5}.$ Endomorfisma σ pada *R* didefinisikan sebagai $\sigma(a + b\sqrt{-5}) = a - b\sqrt{-5},$ untuk setiap $a + b\sqrt{-5} \in R$. Selanjutnya pemetaan δ didefinisikan sebagai $\delta(a + b\sqrt{-5}) = b,$ untuk setiap $a + b\sqrt{-5} \in R$. Pemetaan δ yang didefinisikan seperti ini memenuhi syarat σ-derivatif. Dengan demikian, $R[x;\sigma,\delta]$ merupakan suatu gelanggang polinom miring. Gelanggang ini tidak bersifat komutatif. Perhatikan proses perkalian antara

$f(x) = (4 - 2\sqrt{-5})x$ dengan $g(x) = (3 + 5\sqrt{-5})x$ berikut ini.

$$
\begin{aligned}
f(x)g(x) &= \left[(4 - 2\sqrt{-5})x\right]\left[(3 + 5\sqrt{-5})x\right] \\
&= (4 - 2\sqrt{-5})\left[x(3 + 5\sqrt{-5})\right]x \\
&= (4 - 2\sqrt{-5})\left[\sigma(3 + 5\sqrt{-5})x + \delta(3 + 5\sqrt{-5})\right]x \\
&= (4 - 2\sqrt{-5})(3 - 5\sqrt{-5})x^2 + (4 - 2\sqrt{-5})5x \\
&= (-38 - 26\sqrt{-5})x^2 + (20 - 10\sqrt{-5})x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(x)f(x) &= \left[(3+5\sqrt{-5})x\right]\left[(4-2\sqrt{-5})x\right] \\
&= (3+5\sqrt{-5})\left[x(4-2\sqrt{-5})\right]x \\
&= (3+5\sqrt{-5})\left[\sigma(4-2\sqrt{-5})x+\delta(4-2\sqrt{-5})\right]x \\
&= (3+5\sqrt{-5})(4+2\sqrt{-5})x^2+(3+5\sqrt{-5})(-2)x \\
&= (-38+26\sqrt{-5})x^2+(-6-10\sqrt{-5})x
\end{aligned}
$$

Perkalian di atas menunjukkan bahwa $f(x)g(x) \neq g(x)f(x)$.

Dengan adanya σ dan δ dalam operasi perkalian, seperti yang diperlihatkan pada contoh, maka sifat perkalian menjadi tidak komutatif. Hal ini mengakibatkan struktur dari gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ akan berbeda dengan struktur dari gelanggang tumpuannya dan struktur gelanggan polinom biasa $R[x]$.

2.2. Gelanggang Quaternion Riil

Quaternion dapat didefinisikan melalui beberapa cara yang saling ekuivalen. Pengertian quaternion yang diuraikan berikut ini dapat dibaca pada [5]. Quaternion diperkenalkan oleh Hamilton ketika beliau mengembangkan bilangan kompleks $a+bi$ menjadi $a+bi+cj+dk$ dengan $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ dan $i^2=j^2=k^2=-1$ dan $ij=k=-ji$. Sebagai penghargaan kepada beliau, maka quaternion biasanya disimbol dengan **H**. Dengan demikian quaternion secara lengkap ditulis:

$$\mathbf{H} = \{a+bi+cj+dk \mid a,b,c,d \in \mathbb{R},\ i^2=j^2=k^2=-1, \text{dan } ij=k=-ji\}.$$

Karena koefisien-koefisien yang digunakan adalah bilangan rill, maka quaternion ini biasa juga disebut quaternion riil.

Bentuk penulisan anggota quaternion **H** dapat dikaitkan dengan bentuk penulisan anggota $\mathbb{R}^3$. Misalkan $h=a+bi+cj+dk \in \mathbf{H}$, h dapat ditulis $h=[a,\mathbf{v}]$ dengan $\mathbf{v}=(b,c,d)\in\mathbb{R}^3$. Menggunakan bentuk penulisan yang terakhir, operasi-operasi pada quaternion **H** dapat dikaitkan dengan operasi perkalian silang dan perkalian titik dalam $\mathbb{R}^3$. Untuk lebih jelasnya, berikut diberikan beberapa hasil operasi dalam quaternion.

Misalkan$h=[a,\mathbf{v}]$, $h'=[a',\mathbf{v}'] \in \mathbf{H}$ dengan $\mathbf{v},\mathbf{v}' \in \mathbb{R}^3$.

Operasi penjumlahan:

$$h+h' = [a,\mathbf{v}] + [a',\mathbf{v}'] = [a+a',\mathbf{v}+\mathbf{v}'].$$

Operasi perkalian:

$$hh' = [a,\mathbf{v}][a',\mathbf{v}'] = [aa'-\mathbf{v}\,.\,\mathbf{v}',\quad a\mathbf{v}'+a'\mathbf{v}+\mathbf{v}\ \mathrm{x}\ \mathbf{v}'],$$

dengan "**.**" dan "x" masing-masing adalah perkalian titik dan perkalian silang pada $\mathbb{R}^3$. Memperhatikan operasi penjumlahan dan perkalian pada quaternion, dapat dengan mudah ditunjukkan bahwa quaternion **H** merupakan gelanggang. Lebih jauh lagi, dapat juga dinjukkan bahwa **H** adalah gelanggang tidak komutatif karena $hh' \neq h'h$.

3. Homomorfisma dan Isomorfisma Gelanggang.

Misalkan σ adalah pemetaan dari himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$ ke $\mathbb{C}$ yang memetakan bilangan kompleks ke sekawannya. Lebih jelasnya, $\sigma: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dengan $\sigma(a+bi) = a - bi$, untuk setiap $a + bi \in \mathbb{C}$. Dengan mudah dapat dikalkulasi, pendefinisian σ seperti di atas memenuhi syarat:

$$\sigma[(a+bi)+(c+di)] = \sigma(a+bi)+\sigma(c+di), \text{ dan}$$
$$\sigma[(a+bi)(c+di)] = \sigma(a+bi)\sigma(c+di).$$

Oleh karena itu, σ adalah endomorfisma pada $\mathbb{C}$. Dengan demikian, $\mathbb{C}[x;\sigma]$ merupakan gelanggang polinom miring. Perlu ditambahkan bahwa δ dalam gelanggang polinom miring ini adalah nol.

Untuk memperjelas pembahasan, selanjutnya diberikan contoh perkalian polinom dalam $\mathbb{C}[x;\sigma]$. Misalkan $p(x) = (2 + 4i)x$ dan $q(x) = (3 + 5i)x$, diperoleh

$$p(x)q(x) = [(2+4i)x][(3+5i)x] = (2+4i)\sigma[(3+5i)]x^2$$
$$= (2+4i)(3-5i)x^2 = (26+2i)x^2.$$

Selanjutnya akan dubuktikan homomorfisma dari gelanggang polinom miring $\mathbb{C}[x;\sigma]$ ke gelanggang quaternion rill **H**.

Teorema 1.
Misalkan $\varphi: \mathbb{C}[x;\sigma] \to \mathbf{H}$ dengan aturan pengawanan sebagai berikut:
Misalkan $p(x) = (a_n + b_n i)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1} i)x^{n-1} + \dots + (a_0 + b_0 i)$, maka $\varphi[p(x)] = (a_n + b_n i)j^n + (a_{n-1} + b_{n-1} i)j^{n-1} + \dots + (a_0 + b_0 i)$.
Pemetaan φ adalah homomorfisma.

Bukti.
Untuk membuktikan bahwa φ adalah homomorfisma, akan ditunjukkan

(i). $\varphi[p(x) + q(x)] = \varphi[p(x)] + \varphi[q(x)]$, untuk setiap $p(x), q(x) \in \mathbb{C}[x;\sigma]$.
(ii). $\varphi[p(x)q(x)] = \varphi[p(x)]\varphi[q(x)]$, untuk setiap $p(x), q(x) \in \mathbb{C}[x;\sigma]$.

(aturan ini dapat dilihat di [2] dan [6]).

Untuk bagian pertama, kesamaan langsung bisa terlihat dari definisi pengawanan φ. Untuk bagian kedua diberikan illustrasi berikut:
Misalkan $r(x) = (a + bi)x$ dan $s(x) = (c + di)$, maka diperoleh $\varphi[r(x)] = (a + bi)j$ dan $\varphi[s(x)] = (c + di)$. Sehingga $\varphi[r(x)]\varphi[s(x)] = [(a + bi)j][(c + di)]$.
Karena dalam quaternion $ij = -ji$, maka diperoleh

$$\varphi[r(x)]\varphi[s(x)] = [(a+bi)j][(c+di)] = (a+bi)(c-di)j$$
$$= [(ac+bd)+(bc-ad)i]j\ .$$

Pada sisi lain, $r(x)s(x) = [(a+bi)x][(c+di)] = (a+bi)\sigma(c+di)x$
$$= (a+bi)(c-di)x = [(ac+bd)+(bc-ad)i]x.$$

Sehingga, dari persamaan terakhir diperoleh

$$\varphi[r(x)s(x)] = [(ac+bd)+(bc-ad)i]j \qquad (2).$$

Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh $\varphi[r(x)s(x)] = \varphi[r(x)]\varphi[s(x)]$.

Selanjutnya, memperhatikan perkalian $p(x)q(x)$ terlihat bahwa perkalian tersebut hanya melibatkan perkalian antara suku-suku yang berbentuk $r(x)$ dan $s(x)$. Oleh karena itu, karena $\varphi[r(x)s(x)] = \varphi[r(x)]\varphi[s(x)]$, maka dapat disimpulkan bahwa

$$\varphi[p(x)q(x)] = \varphi[p(x)]\varphi[q(x)].\blacksquare$$

Anggota-anggota quaternion **H** berbentuk $a + bi + cj + dk$ sedangkan anggota-anggota gelanggang polinom miring $\mathbb{C}[x;\sigma]$ berbentuk $(a_n + b_n i)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1}i)x^{n-1} + \ldots + (a_0 + b_0 i)$.

Dari kedua bentuk ini (yang jauh berbeda) terlihat bahwa tidak ada isomorfisma dari **H** ke $\mathbb{C}[x;\sigma]$ atau dengan kata lain, **H** tidak isomorfik dengan $\mathbb{C}[x;\sigma]$. Penelitian ini, mencoba membuang sebagian anggota $\mathbb{C}[x;\sigma]$ agar anggota-anggota yang tersisa bisa isomorfik dengan **H**. Proses pembuangan ini lebih dikenal dengan proses pemfaktoran atau membuat gelanggang faktor. Pembuatan gelanggang faktor didahului oleh pemilihan ideal yang akan digunakan dalam pemfaktoran.

Salah satu ideal dalam gelanggang polinom miring $\mathbb{C}[x;\sigma]$ adalah $< x^2 + 1 >$, yaitu ideal yang dibangun oleh polinomial $x^2 + 1$. Ideal ini dipakai membentuk gelanggang faktor $\mathbb{C}[x;\sigma]/< x^2 + 1 >$, yaitu gelanggang yang memuat koset-koset yang berbentuk $p(x) + < x^2 + 1 >$, dengan $p(x) \in \mathbb{C}[x;\sigma]$. Menggunakan homomorfisma φ sebagai ide, akan dibentuk isomorfisma dari gelanggang quaternion **H** ke gelanggang faktor gelanggang polinom miring $\mathbb{C}[x;\sigma]/< x^2 + 1 >$.

Teorema 2.
Misalkan ψ adalah pemetaan dari gelanggang quaternion **H** ke gelanggang faktor gelanggang polinom miring $\mathbb{C}[x;\sigma]/< x^2 + 1 >$ didefinisikan seperti:

$$\psi(a + bi + cj + dk) = [(a + bi) + (c + di)x] + < x^2 + 1 >$$

untuk setiap $a + bi + cj + dk \in$ **H**, maka ψ adalah isomorfisma.

Bukti.
Untuk membuktikan bahwa ψ adalah isomorfisma, akan ditunjukkan:

(i). $\psi(m + n) = \psi(m) + \psi(n)$, untuk setiap $m, n \in$ **H.**

(ii). $\psi(mn) = \psi(m)\,\psi(n)$, untuk setiap $m, n \in$ **H.**
(iii). ψ adalah fungsi satu-satu
(iv). ψ adalah fungsi pada
(aturan ini dapat dilihat di [2] dan [6]).

(i). Misalkan $m = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ dan $n = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$, maka menggunakan kalkulasi sederhana pada definisi ψ dapat dibuktikan bahwa $\psi(m + n) = \psi(m) + \psi(n)$.

(ii). Misalkan $m = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ dan $n = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$. Berdasarkan operasi perkalian quaternion **H**, diperoleh

$$mn = (a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_2b_1 + a_1b_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i + (a_2c_1 + a_1c_2 + d_1b_2 - b_1d_2)j + (a_2d_1 + a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2)k.$$

Dari sini diperoleh, (menggunakan definisi ψ)

$$\varphi(mn) = \{(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_2b_1 + a_1b_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i + (a_2c_1 + a_1c_2 + d_1b_2 - b_1d_2)x + (a_2d_1 + a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2)ix\} + < x^2 + 1 > \quad (3)$$

Pada sisi lain,

$$\varphi(m) = [a_1 + b_1i + (c_1 + d_1i)x] + < x^2 + 1 >$$

dan

$$\varphi(n) = [a_2 + b_2i + (c_2 + d_2i)x] + < x^2 + 1 > .$$

Dari sini diperoleh, menggunakan definisi perkalian dalam gelanggang faktor $\mathbb{C}[x;\sigma]/< x^2 + 1 >$,

$$\varphi(m)\varphi(n) = [(a_1 + b_1i) + (c_1 + d_1i)x][(a_2 + b_2i) + (c_2 + d_2i)x] + < x^2 + 1 >.$$

Dengan operasi perkalian biasa diperoleh

$$\varphi(m)\varphi(n) = \{(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i)x + (c_1 + d_1i)x(a_2 + b_2i) + (c_1 + d_1i)x(c_2 + d_2i)x\} + < x^2 + 1 >.$$

Dengan operasi perkalian dalam gelanggang polinom miring $\mathbb{C}[x;\sigma]$, diperoleh

$$\varphi(m)\varphi(n) = \{(a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) + (a_1 + b_1i)(c_2 + d_2i)x + (c_1 + d_1i)(a_2 - b_2i)x + (c_1 + d_1i)(c_2 - d_2i)x^2\} + < x^2 + 1 >.$$

Dengan operasi perkalian biasa diperoleh

$$\varphi(m)\varphi(n) = \{(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i + (a_1c_2 + a_1c_1 + b_2d_1 - b_1d_2)x + (a_1d_2 + a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)ix + (c_1c_2 + d_1d_2)x^2 + (-c_1d_2 + c_2d_1)ix^2\} + < x^2 + 1 > \quad (4)$$

Karena dalam gelanggang faktor $\mathbb{C}[x;\sigma]/< x^2 + 1 >$ berlaku kesamaan

$$(c_1c_2 + d_1d_2)x^2 + < x^2 + 1 > = (-c_1c_2 - d_1d_2) + < x^2 + 1 >$$

dan

$$(-c_1d_2 + c_2d_1)ix^2 + < x^2 + 1 > = (-c_1d_2 + c_2d_1)i + < x^2 + 1 >,$$

maka persamaan (4) menjadi,

$$\varphi(m)\varphi(n) = \{(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2) + (a_1b_2 + a_2b_1 + c_2d_1 - c_1d_2)i + (a_1c_2 + a_1c_1 + b_2d_1 - b_1d_2)x + (a_1d_2 + a_2d_1 + b_1c_2 - b_2c_1)ix + < x^2 + 1 > \quad (5)$$

Dengan demikian, dari persamaan (3) dan (5) dibuktikan

$$\psi(mn) = \psi(m)\psi(n).$$

(iii). Untuk membuktikan bahwa ψ adalah fungsi satu-satu maka akan ditunjukkan
Jika $\varphi(m) = \varphi(n)$, maka $m = n$.
Memperhatikan bentuk dari $\varphi(m)$ dan $\varphi(n)$ pada langkah pembuktian di atas dapat dengan mudah terlihat bahwa, jika $\varphi(m) = \varphi(n)$, maka $m = n$.

(iv). Untuk membuktikan bahwa ψ adalah fungsi pada maka akan ditunjukkan,
Jika $\overline{p(x)} \in \mathbb{C}[x;\sigma]/< x^2+1 >$, maka terdapat $m \in \mathbf{H}$ sedemikian sehingga

$$\varphi(m) = \overline{p(x)}.$$

Misalkan

$$\overline{p(x)} = \{(a_n + b_n i)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1} i)x^{n-1} + \cdots + (a_0 + b_0 i)\} + < x^2+1 >.$$

Karena dalam gelanggang faktor $\mathbb{C}[x;\sigma]/< x^2+1 >$ berlaku kesamaan

$$(a+bi)x^n + < x^2+1 > = (-a-bi)x^{n-2} + < x^2+1 >,$$

Maka

$$(a+bi)x^n + < x^2+1 > = (a' + b'i) + < x^2+1 >$$

untuk suatu $a', b' \in \mathbb{R}$ apabila *n* adalah bilangan genap,
dan

$$(a+bi)x^n + < x^2+1 > = (a' + b'i)x + < x^2+1 >$$

untuk suatu $a', b' \in \mathbb{R}$ apabila *n* adalah bilangan ganjil.
Oleh karena itu, bentuk $\overline{p(x)}$ bisa disederhanakan menjadi

$$\overline{p(x)} = \{(a_0{}' + b_0{}' i) + (a_1{}' + b_1{}' i)x\} + < x^2+1 >.$$

Dengan demikian, jika dipilih $m = a_0' + b_0' i + a_1' j + b_1' k$, maka diperoleh

$$\boldsymbol{\varphi(m) = \overline{p(x)}}. \blacksquare.$$

4. Kesimpulan

Gelanggang polinom miring $\mathbb{C}[x;\sigma]$ dan gelanggang quaternion riil **H** keduanya merupakan gelanggang tidak komutatif. Namun demikian, bentuk anggota dan operasi perkalian mereka sangat berbeda. Hal ini menyebabkan isomorfisma dari **H** ke $\mathbb{C}[x;\sigma]$ sulit ditemukan. Salah satu ide adalah membuang sebagian anggota $\mathbb{C}[x;\sigma]$ agar isomorfisma dari **H** ke $\mathbb{C}[x;\sigma]$ bisa dikonstruksi. Proses membuang ini dikenal dengan pembentukan gelanggang faktor. Dengan mengamati homomorfisma φ dari $\mathbb{C}[x;\sigma]$ ke **H** yang disajikan pada Teorema 1, dapat dikontruksi isomorfisma ψ dari **H** ke $\mathbb{C}[x;\sigma]/< x^2+1 >$ seperti yang dipaparkan pada Teorema 2. Dengan demikian diperoleh bahwa, gelanggang quaternion riil **H** isomorfik dengan gelanggang faktor gelanggang polinom miring $\mathbb{C}[x;\sigma]/< x^2+1 >$, atau dalam bentuk simbol $\mathbf{H} \cong \mathbb{C}[x;\sigma]/< x^2+1 >$.

Daftar Pustaka

[1] Cohn P. N., 2008. *Skew Fields, Theory of General Division Rings*. Cambridge University Press, London.

[2] Fraleigh J.B., 1994. *A First Course in Abstract Algebra*. Addison-Wesley Publishing Company, New York.

[3] Goodearl K.R. and Warfiled J.R., 1989. *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings.* Cambridge University Press, London.

[4] McConnel J.C., and Robson, J.C., 1987. *Noncommutative Noetherian Rings*. John Wiley & Sons, Chichester.

[5] Shoemake K.,2007. Quaternions. *Lecture Note*, Department of Computer and Information Science University of Pennsylvania, Philadelphia.

[6] Spindler K., 1994. *Abstract Algebra with Applications, Volume II*. Marcel Dekker Inc., New York.