ISBN:1858-1382

J M S K

Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi

http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk

Vol. 12, No. 2, 105-110, Januari 2016

Aljabar Atas Suatu Lapangan dan Dualitasnya

Edi Kurniadi[*] dan Irawati [**]

Abstrak

Suatu aljabar $(A,.,+;k)$ atas suatu lapangan k adalah suatu gelanggang $(A,.,+)$ yang dilengkapi suatu aksi dari k pada A sedemikian sehingga $(A,+,k)$ suatu ruang vektor atas lapangan k dan berlaku $\lambda(ab)=(\lambda a)b=a(\lambda b)$ untuk semua a, $b \in A$ dan $\lambda \in k$. Hasil kali tensor akan memberikan definisi aljabar yang ekuivalen dengan definisi pertama di atas. Dualitas aljabar melalui hasilkali tensor membawa kepada konsep koaljabar. Tulisan ini memperlihatkan bahwa suatu aljabar atas suatu lapangan senantiasa dapat diperoleh dari dual suatu koaljabar dan sebaliknya koaljabar dapat diperoleh dari dual aljabar untuk kasus aljabar yang berdimensi hingga.

Kata kunci: Hasil kali tensor, aljabar, dan koaljabar.

1. Pendahuluan

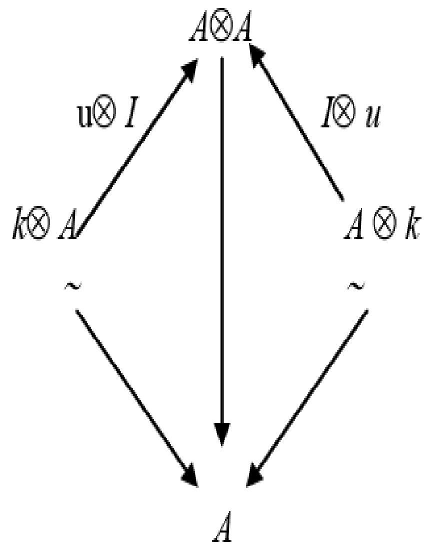
Suatu sistem matematika $(A,.,+;k)$ disebut aljabar atas suatu lapangan k jika $(A,.,+)$ suatu gelanggang yang dilengkapi suatu aksi dari k pada A sedemikian sehingga $(A,+,k)$ suatu ruang vektor atas lapangan k dan berlaku $\lambda(ab)=(\lambda a)b=a(\lambda b)$ untuk semua a, $b \in A$ dan $\lambda \in k$. Definisi klasik tentang aljabar di atas dapat dikarakterisasi melalui hasil kali tensor dan dapat dibuktikan keekuivalenan antar definisi. Secara umum, pendefinisian aljabar melalui hasil kali tensor dapat dilihat dari dua diagram dalam Gambar 1 dan 2.

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A\otimes A \arrow[r, "I\otimes M"] \arrow[d, "M\otimes I"'] & A\otimes A \arrow[d, "M"] \\
A\otimes A \arrow[r, "M"] & A
\end{tikzcd}$$

Gambar 1. Sifat Asosiatif dari A.

[*]*Jurusan Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran, e-mail : edikrnd@gmail.com*

[**] *Program Studi Matematika Institut Teknologi Bandung, e-mail: irawati@math.itb.ac.id*



Gambar 2. Sifat unit di *A*.

Definisi aljabar atas suatu lapangan melalui hasil kali tensor di atas membawa kepada konsep dual dari suatu aljabar yang disebut koaljabar. Dalam tulisan ini akan diselidiki syarat yang harus dipenuhi supaya dual dari suatu aljabar adalah koaljabar.

2. Masalah dan Pemecahan

Masalah dalam tulisan ini adalah membuat suatu definisi aljabar atas suatu lapangan melalui hasil kali tensor dan membuktikan keekuivalenan antar definisi dan mencari suatu syarat agar dual dari suatu aljabar adalah kolajabar. Masalah pertama yaitu membuat definisi aljabar melalui karakterisasi hasil kali tensor. Berikut adalah definis aljabar secara klasik dan melalui hasil kali tensor.

Definisi 1. (Klasik)
Suatu aljabar (A,.,+;k) atas suatu lapangan k adalah suatu gelanggang (A,.,+) yang dilengkapi suatu aksi dari k pada A sedemikian sehingga (A,+,k) suatu ruang vektor atas lapangan k dan berlaku $\lambda(ab)=(\lambda a)b=a(\lambda b)$ *untuk semua* $a, b \in A$ *dan* $\lambda \in k$.

Operasi perkalian di *A* dan aksi dari *k* pada *A* menyatakan perlunya pendefinisian suatu pemetaan linier $M : A\otimes A \to A$. Tentunya perkalian tersebut harus bersifat asosiatif dan terdapat suatu unsur kesatuan 1_A. Sifat asosiatif ini dapat diwakili dengan suatu diagram komutatif seperti yang terlihat dalam Gambar 1. Eksistensi unsur kesatuannya dapat dinyatakan melalui diagram yang dapat dilihat dalam Gambar 2. Secara formal dapat diperoleh suatu definisi tentang aljabar atas lapangan *k* sebagai berikut.

Definisi 2. (Melalui hasil kali tensor)

Suatu aljabar atas lapangan k adalah suatu tripel (A, M, u) dengan A suatu k-ruang vektor, M : $A\otimes A \rightarrow A$ *suatu pemetaan multiplikasi, u:* $k \rightarrow A$ *suatu pemetaan unit sehingga diagram-diagram dalam Gambar 1 dan 2 komutatif.*

Definisi 1 dan 2 di atas ekuivalen. Formalnya dituangkan dalam teorema berikut.

Teorema 1.
Misalkan A suatu k-ruang vektor, maka A suatu aljabar atas lapangan k jika dan hanya jika terdapat pemetaan multiplikasi $M : A\otimes A \rightarrow A$ *dan pemetaan unit* $u: k \rightarrow A$ *sehingga diagram-diagram dalam Gambar 1 dan 2 komutatif.*

Bukti:
($\Rightarrow$) Diketahui A suatu aljabar atas lapangan k. Karena 1_A unit di A, definisikan suatu pemetaan linier u: $k \rightarrow A$ melalui pengaitan $\lambda \longmapsto \lambda.1_A$ untuk setiap $\lambda \in K$. Selanjutnya karena A suatu aljabar atas lapangan k maka A suatu gelanggang dengan operasi hasilkali Ax$A \rightarrow A$ oleh pengaitan $(a,b) \longmapsto ab$. Pemetaan tersebut adalah suatu pemetaan *balance* akibatnya terdapat pemetaan linier M: $A\otimes A \rightarrow A$. Selanjutnya dapat ditunjukkan bahwa diagram dalam Gambar 1 dan 2 komutatif.

($\Leftarrow$) Diketahui (A, +) suatu ruang vektor atas lapangan k, akibatnya (A, +) suatu grup komutatif. Perkalian skalar M/AxA : Ax$A \rightarrow A$ dapat dipilih sebagai restriksi dari M : $A\otimes A \rightarrow A$. Sekarang tinggal menunjukkan bahwa A mempunyai unit, 1_A. Karena k suatu lapangan maka k mempunyai unsur kesatuan, sebut 1_k. Maka $u(1_k)$ suatu unit di A. melalui dua pemetaan linier di atas dan sifat komutatif kedua diagram dapat diperoleh bahwa A suatu gelanggang dengan unsur kesatuan.
Terakhir $\forall\ \lambda \in K$, $\forall\ a, b \in A$ berlaku

$$\lambda(ab) = \lambda\,(M(a\otimes b)) = M(\lambda(a\otimes b)) = M(\lambda a\otimes b) = (\lambda a)b = M(a\otimes \lambda b) = a(\lambda b).$$

Dengan demikian A suatu aljabar atas lapangan k. Q.E.D

Berikut adalah beberapa contoh aljabar atas suatu lapangan.
1. Himpunan semua bilangan ril atas $\Re$.
2. Himpunan semua bilangan kompleks atas $\Re$.
3. Himpunan semua $M_n(\Re)$ atas $\Re$.

Sebagaimana disebutkan di atas bahwa definisi aljabar atas suatu lapangan dapat didefinisikan melalui karakterisasi hasilkali tensor. Di sini akan diberikan suatu contoh konstruksi definisi aljabar melalui karakterisasi hasilkali tensor sebagai berikut.

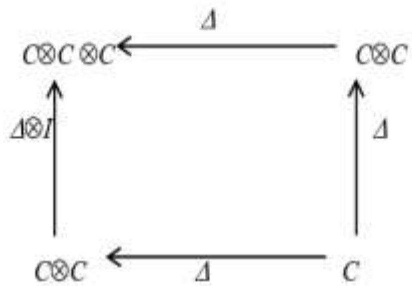
Pandang ($Mn(\Re)$,.,+; $\Re$) suatu aljabar atas suatu lapangan riil $\Re$. Unsur kesatuan di $Mn(\Re)$ adalah $1_A = I_n$ matriks identitas maka definisikan suatu pemetaan linier (pemetaan unit) u: $\Re\rightarrow Mn(\Re)$ melalui pengaitan $\lambda \longmapsto \lambda.1_A$ untuk setiap $\lambda \in \Re$ dengan $\lambda.1_A$ matriks diagonal dengan entri pada diagonal utamanya adalah λ .
Juga karena $Mn(\Re)$ suatu aljabar atas lapangan riil $\Re$ maka $Mn(\Re)$ suatu gelanggang dengan operasi perkalian $Mn(\Re)$ x $Mn(\Re) \rightarrow Mn(\Re)$ oleh pengaitan (A,B) $\longmapsto AB$ untuk semua A, B di $Mn(\Re)$. Pemetaan tersebut adalah suatu pemetaan *balance* maka menurut definisi hasilkali tensor terdapat pemetaan linier

$$M : Mn(\Re) \otimes Mn(\Re) \rightarrow Mn(\Re).$$

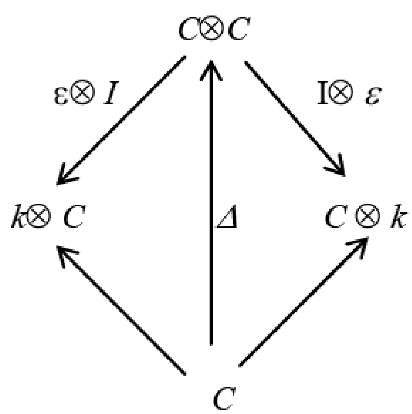
Dari pendefinisian di atas diperoleh juga bahwa $Mo(M \otimes I) = Mo(I \otimes M)$ dan $Mo(u \otimes I) = Mo(I \otimes u)$. Jadi, menurut definisi 2 ($Mn(\Re)$, M, u) suatu aljabar atas suatu lapangan $\Re$ melalui pendefinisian karakterisasi hasilkali tensor.

Masalah ke dua adalah memberikan suatu syarat agar dual dari suatu aljabar adalah koaljabar.

Definisi 3.
Suatu koaljabar adalah suatu tripel (C, Δ, ε) *dengan* C *suatu ruang vektor atas suatu lapangan* k, $\Delta : C \to C \otimes C$ *pemetaan komultiplikasi dan* $\varepsilon : C \to k$ *suatu pemetaan kounit sehingga diagram-diagram dalam gambar berikut komutatif.*



Gambar 3. Sifat koasosiatif.



Gambar 4. Sifat kounit

Contoh-contoh koaljabar:

1. Misalkan S suatu himpunan tak hampa. Notasikan kS sebagai suatu k-ruang vektor dengan S sebagai basisnya. Maka (kS, Δ , ε) suatu koaljabar atas k dengan mendefinisikan $\Delta : kS \to kS \otimes kS$ dan $\varepsilon : kS \to k$ oleh $\Delta(s) = s \otimes s$ dan $\varepsilon(s)=1$ untuk semua $s \in kS$.

2. Lapangan k dapat dipandang sebagai ruang vektor atas dirinya sendiri. Dengan mendefinisikan $\Delta : k \to k \otimes k$ dan $\varepsilon : k \to k$ oleh $\Delta(\alpha) = \alpha \otimes 1$ dan $\varepsilon(\lambda)=\lambda$ untuk semua $\lambda \in k$ maka (kS, Δ , ε) suatu koaljabar atas k.

Berikutnya akan diberikan suatu proposisi yang cukup penting dalam proses dualisasi yang dilakukan.

Teorema 2.
Misalkan k suatu lapangan, M dan N suatu k-ruang vektor. Pemetaan linier $\rho : M^*\otimes N^* \to (M\otimes N)^*$ *yang didefinisikan oleh* $\rho(f\otimes g)(m\otimes n)=f(m)g(n)$ *untuk* $f \in M^*$, $g \in N^*$, $m \in M$ *dan* $n \in N$, *adalah satu-satu.*

Misalkan (C, Δ, ε) suatu koaljabar atas suatu lapangan. Definisikan pemetaan $M : C^*\otimes C^* \to C^*$ dengan $M=\Delta^*\rho$, dan $u : k \to C^*$ dengan $u=\varepsilon^*\phi$ dan $\phi : k \to k^*$ adalah suatu isomorfisma kanonik. Berkenaan dengan pernyataan di atas diturunkan suatu teorema sebagai berikut.

Teorema 3.
(C^*, M, u) *suatu aljabar atas suatu lapangan k.*

Misalkan (A,M,u) suatu aljabar yang berdimensi hingga maka $\rho : M^*\otimes N^* \to (M\otimes N)^*$ bijektif dan definisikan $\Delta : A^* \to A^*\otimes A^*$ oleh $M=\rho^{-1}M^*$ dan $\varepsilon : A^* \to k$ oleh $\varepsilon = \delta u^*$ dengan $\delta : k^* \to k$.

Teorema 4.
Jika (A, M, u) *suatu aljabar berdimensi hingga maka* $(A^*, \Delta, \varepsilon)$ *suatu koaljabar.*

Bukti:
Ambil $f \in A^*$ dan $\Delta(f)=\Sigma g_i\otimes h_i$. Misalkan $\Delta(gi)=\Sigma g`_{i,j}\otimes g``_{i,j}$ dan $\Delta(hi)=\Sigma h`_{i,j}\otimes h``_{i,j}$ maka dapat dihitung bahwa

- $(\Delta \otimes I)\Delta(f) = \Sigma g`_{i,j}\otimes g``_{i,j} \otimes h_i$; dan
- $(I \otimes \Delta)\Delta(f) = \Sigma g_i\otimes h`_{i,j} \otimes h``_{i,j}$.
-

Akan ditunjukkan bahwa $(\Delta \otimes I)\Delta = (I \otimes \Delta)\Delta$..

Pandang pemetaan berikut $\theta : A^*\otimes A^*\otimes A^* \to (A\otimes A\otimes A)^*$ yang didefinisikan oleh

$$\theta(u\otimes v\otimes w)(a\otimes b\otimes c) = u(a)v(b)w(c),\ \forall\ u, v, w \in A^* \quad \text{dan} \quad a, b, c \in A$$

adalah suatu pemetaan injektif.
Tetapi

$$\theta(\Sigma g`_{i,j}\otimes g``_{i,j} \otimes h_i )(a\otimes b\otimes c)= \Sigma g`_{i,j}(a)g``_{i,j}(b)\, h_i(c)= \Sigma g_i(ab)h_i(c)=f(abc)$$

dan

$$\theta(\Sigma g_i\otimes h`_{i,j} \otimes h``_{i,j} )(a\otimes b\otimes c)= \Sigma g_i(a)h`_{i,j}(b)\, h``_{i,j}(c)= \Sigma g_i(a)h_i(bc)=f(abc).$$

Karena θ injektif maka $\Sigma g`_{i,j}\otimes g``_{i,j} \otimes h_i = \Sigma g_i\otimes h`_{i,j} \otimes h``_{i,j}$ yang menunjukkan bahwa $(\Delta \otimes I)\Delta = (I \otimes \Delta)\Delta$ sehingga sifat koasosiatif terpenuhi.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $(\varepsilon \otimes I)\Delta = (I \otimes \varepsilon)\Delta$. Dengan menggunakan alasan yang sama dengan di atas akan diperoleh bahwa

$$(\Sigma\ \varepsilon(gi)hi)(a) = (\Sigma gi(1)hi(a) = f(a).$$

Oleh karenanya, $(\Sigma\ \varepsilon(gi)hi)=f$ dan dengan cara yang sama juga $(\Sigma\varepsilon(hi)gi) = f$, yang menunjukkan bahwa $(\varepsilon \otimes I)\Delta = (I \otimes \varepsilon)\Delta$ atau sifat kounit dipenuhi. Jadi, A^* suatu koaljabar atas suatu lapangan k. Q.E.D

Jadi, dalam kasus dimensi hingga teori aljabar dan koaljabar adalah saling dual. Tetapi hal tersebut tidak berlaku dalam kasus dimensi tak hingga.

3. Kesimpulan

Dari pembahasan di atas dapat ditarik beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Setiap aljabar dapat diperoleh dengan cara mendualkan suatu koaljabar tanpa memandang dimensinya.
2. Koaljabar dapat diperoleh sebagai dual dari aljabar untuk kasus dimensi hingga.
3. Dalam kasus dimensi hingga ruang lingkup pembicaraan aljabar dan koaljabar adalah saling dual.

Daftar Pustaka

[1] John, D., 1994, *Modules and Rings*, Cambridge University Press,New York, 53–59.

[2] Moss. E., Sweedler, 1969, *Hopf Algebras*, W.A. Benjamin, Inc, New York, 1–28.

[3] Sorin, D., 2001, *Hopf Algebras An Introduction*, Marcel Dekker Inc., New York, 1–55.