ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 13, No. 1, 66-70, Juli 2016

Seputar Ideal-ideal dalam Gelanggang Operator Differensial

Amir Kamal Amir [*]

Abstrak

Misalkan *R* adalah suatu gelanggang dengan identitas 1, σ adalah suatu endomorfisma dari *R*, dan δ adalah suatu σ- derivatif. Gelanggang polinom miring, disimbol dengan $R[x;\sigma,\delta]$, dalam peubah tak diketahui *x*, adalah gelanggang yang terdiri dari polinom seperti $f(x)=a_n x^n + \cdots + a_0$ yang memenuhi aturan perkalian $xa=\sigma(a)x+\delta(a), \forall a \in R$. Dalam hal $\sigma = 1$ atau σ adalah suatu endomorfisma identitas, gelanggang polinom miring $R[x;\sigma,\delta]$ disebut gelanggang operator differensial dan ditulis $R[x;\delta]$. Dalam paper ini akan diuraikan secara rinci bentuk ideal-ideal dari gelangang $R[x;\delta]$ dengan asumsi bahwa *R* adalah suatu gelanggang komutatif noether.

Kata Kunci: Operator, differensial, derivatif, ideal, prim.

1. Pendahuluan

Definisi dari gelanggang polinom miring (gelanggnag tak komutatif) ini pertamakali diperkenalkan oleh Ore (Ore, 1933), yang mengkombinasikan ide awal dari Hilbert (kasus $\delta=0$) dan Schlessinger (kasus $\sigma=1$). Sejak kemunculan artikel dari Ore ini, Gelanggang Polinom Miring telah memerankan peran yang penting dalam teori gelanggang tak komutatif dan telah banyak peneliti yang bergelut dalam teori gelanggang tak komutatif menginvestigasi bentuk gelanggang tersebut dari berbagai sudut pandang, seperti teori ideal, teori order, teori Galois, dan aljabar homologi. Dalam paper ini akan dibahas bentuk khusus dari gelanggang polinom miring, yaitu gelanggang operator differensial.

Definisi 1.

Misalkan R adalah suatu gelanggang dengan identitas 1, σ *adalah suatu endomorfisma dari R, dan* δ *adalah suatu* $\sigma-$derivatif *, yaitu:*

(i). δ *adalah suatu endomorfisma pada R, dengan R sebagai grup penjumlahan*

(ii). $\delta(ab)=\sigma(a)\delta(b)+\delta(a)b$ *untuk setiap* $a,b \in R$.

Gelanggang polinom miring atas R dengan variabel x adalah gelanggang:

$$R[x;\sigma,\delta] = \{ f(x)=a_n x^n + \cdots + a_0 \mid a_i \in R \} \text{ dengan } xa=\sigma(a)x+\delta(a), \forall a \in R.$$

[*] *JurusanMatematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, e-mail: amirkamalamir@yahoo.com*

Apabila $\sigma = 1$ atau σ adalah suatu endomorfisma identitas, maka gelanggang polinom miring cukup ditulis $R[x;\delta]$ dan lebih dikenal dengan nama **gelanggang operator differensial**. Untuk $\delta = 0$, gelanggang polinom miring cukup ditulis $R[x;\sigma]$. Sedangkan untuk kasus $\sigma = 1$ dan $\delta = 0$ gelanggang polinom miring cukup ditulis $R[x]$, yang merupakan gelanggang polinom biasa.

Contoh 1.

Misalkan $\mathbf{C}$ adalah himpunan bilangan kompleks. Lambang σ adalah suatu endomorfisma pada $\mathbf{C}$ yang didefinisikan sebagai $\sigma(a+bi) = a - bi$, untuk setiap $a + bi \in \mathbf{C}$ dan $\delta = 0$, maka $\Box[x;\sigma,\delta]$ merupakan suatu gelanggang polinom miring. Selanjutnya akan ditunjukkan sifat ketidakkomutatifan dalam gelanggang polinom miring $\mathbf{C}[x;\sigma,\delta]$.

$$\begin{aligned}
\left[(3+2i)x\right]\left[(4+5i)x\right] &= (3+2i)\left[x(4+5i)\right]x \\
&= (3+2i)\left[\sigma(4+5i)x\right]x \\
&= (3+2i)(4-5i)x^2 = (22-7i)x^2 \\
\left[(4+5i)x\right]\left[(3+2i)x\right] &= (4+5i)\left[x(3+2i)\right]x \\
&= (4+5i)\left[\sigma(3+2i)x\right]x \\
&= (4+5i)(3-2i)x^2 = (22+7i)x^2.
\end{aligned}$$

Dalam gelanggang operator differensial $R[x;\delta]$ dikenal istilah δ-ideal dan δ-prime ideal. Pengertian dari istilah-istilah tersebut dipaparkan pada definisi berikut ini.

Definisi 2.

Misalkan $R[x;\delta]$ *adalah suatu gelangang operator differensial. Suatu* δ*-ideal dari* R *adalah suatu ideal* I *dari* R *sedemikian sehingga* $\delta(I) \subseteq I$. *Suatu* δ*-prime ideal adalah suatu* δ*-ideal murni* I *dari* R *sedemikian sehingga jika* J, K *adalah* δ*-ideal yang memenuhi* $JK \subseteq I$, *maka* $J \subseteq I$ *atau* $K \subseteq I$.

Berikut diberikan penjabaran dari $\delta(a^m)$.

Teorema 1.

Misalkan $R[x;\sigma,\delta]$ *adalah suatu gelanggang polinom miring, maka* $\delta(a^m) = \sum_{i=0}^{m-1} \sigma(a)^i \delta(a) a^{m-1-i}$ *untuk setiap* $a \in R$ *dan* $m = 1,2,....$.

Bukti:

Pembuktian menggunakan induksi. Persamaan di atas jelas untuk $m = 1$. Misalkan persamaan di atas benar untuk $m = k$, akan ditunjukkan bahwa persamaan tersebut benar untuk $m = k+1$. Persamaan benar untuk $m = k$ artinya

$$\delta(a^k)=\sum_{i=0}^{k-1}\sigma(a)^i\,\delta(a)a^{k-1-i}\ .$$

Selanjutnya untuk $m=k+1$ diperoleh

$$\begin{aligned}\delta(a^{k+1}) &= \sigma(a)\delta(a^k)+\delta(a)a^k\\ &=\sum_{i=0}^{k-1}\sigma(a)^{i+1}\delta(a)a^{k-1-i}+\delta(a^m)=\sum_{i=0}^{k}\sigma(a)^i\,\delta(a)a^{k-i}.\ \square\end{aligned}$$

Pada tulisan ini akan dipaparkan secara rinci bentuk ideal-ideal (prim) dari gelanggang operator differensial $R[x;\delta]$.

2. Ideal-ideal dalam Gelanggang Operator Differensial

Dalam bagian ini akan dipaparkan secara rinci bentuk ideal-ideal (prim) dari gelanggang operator differensial $R[x;\delta]$ dengan *R* adalah suatu gelanggang komutatif noether.

Teorema 2.

Misalkan R adalah suatu gelanggang, δ adalah suatu derivatif dari R, dan $S=R[x;\delta]$ adalah gelanggang operator differensial, maka

a. *Jika I adalah suatu ideal kanan dari R, maka IS adalah suatu ideal kanan dari S.*
b. *Jika I adalah suatu δ-ideal dari R, maka IS adalah suatu ideal dari S .*
c. *Jika J adalah suatu ideal dari S, maka $J\cap R$ adalah suatu δ-ideal dari R.*

Bukti:

a. Misalkan *I* adalah suatu ideal kanan dari *R* , $af(x)\in IS$, dan $g(x)\in S$. Dari sini diperoleh $\left(af(x)\right)g(x)=a\left(f(x)g(x)\right)\in IS$ karena $f(x)g(x)\in IS$. Jadi *IS* merupakan ideal kanan dari *S*.
b. Misalkan *I* adalah suatu δ-ideal dari *R*, berarti $\delta(I)\subseteq I$. Ambil $f(x)=f_0+f_1x+\cdots+f_nx^n\in IS.$ Ini berarti bahwa $f_i\in I,\ \forall i$. Misalkan $g(x)=g_0+g_1x+\cdots+g_mx^m\in S$, akan ditunjukkan bahwa $f(x)g(x)\in IS$ dan $g(x)f(x)\in IS$. Karena $f_i\in I$ dan $f_ig(x)\in S$, maka dengan mudah dapat dilihat bahwa $f(x)g(x)\in IS$. Selanjutnya, dengan memperhatikan bentuk dari $\delta(a^m)$ pada Teorema 1 dan mengingat bahwa $\delta(I)\subseteq I$, maka dengan mudah juga dapat disimpulkan bahwa $g(x)f(x)\in IS$.
c. Ambil $a\in J\cap R$, maka $a\in J$, sehingga $ax,\ xa\in J$ karena *J* adalah suatu ideal dari *S*. Dengan demikian $ax-xa\in J$, sehingga $\delta(a)=ax-xa\in J.$ $\square$

Ideal-ideal dalam gelanggang operator differensial selalu memuat konstanta. Hal ini ditunjukkan pada teorema berikut.

Teorema 3.

Misalkan R adalah suatu daerah integral komutatif dengan karakteristik nol, δ *adalah suatu derivatif dan* $S = R[x;\delta]$. *Jika I adalah suatu ideal tak nol dari S, maka* $I \cap R \neq 0$.

Bukti:

Pilih elemen tak nol $f(x) = f_0 + f_1 x + \cdots + f_n x^n$ dari *I*. Dalam hal ini diasumsikan $n \geq 1$. Selanjutnya *n* disebut derajat polinom $f(x)$ dan f_n disebut koefisien terdepan. Pilih $a \in R$ sedemikian sehingga $\delta(a) \neq 0$. Dengan menggunakan Teorema 1 dapat diketahui bahwa

$$f(x)a - af(x) = nf_n\delta(a)x^{n-1} + [\textit{suku dengan derajat kurang dari } n\text{-}1].$$

Karena $nf_n\delta(a) \neq 0$, maka hal ini berarti *I* memuat elemen tak nol dengan derajat *n-1*. Apabila proses tersebut di atas diulangi, maka pada akhirnya kita akan menemukan bahwa *I* memuat elemen tak nol dengan derajat nol. □

Teorema berikut memberikan sifat dari suatu δ-ideal.

Teorema 4.

Misalkan R adalah suatu gelanggang, δ *adalah suatu derivatif dari R, dan P adalah suatu prim minimal ideal dari R sedemikian sehingga R/P mempunyai karakteristik nol, maka P adalah suatu* δ*-ideal.*

Bukti:

Misalkan $Q = \{a \in R \mid \delta^n(a) \in P \ \forall n \geq 0\}$. Dengan kalkulasi sederhana dapat dibuktikan bahwa *Q* adalah suatu ideal dari *R* yang termuat dalam ideal *P*. Selanjutnya ditunjukkan bahwa Q adalah ideal prim. Perhatikan elemen-elemen $a, b \in R - Q$. Selanjutnya pilih bilangan-bilangan bulat taknegatif sekecil mungkin r dan s sedemikian sehingga $\delta^r(a)$ dan $\delta^s(b)$ tidak berada dalam *P*. Kemudian pilih $c \in R$ sedemikian sehingga $\delta^r(a)c\delta^s(b) \notin P$. Sekarang gunakan kembali Teorema 1 untuk menguraikan $\delta^{r+s}(acb)$, diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\delta^{r+s}(acb) = \sum_{i=0}^{r+s}\binom{r+s}{i}\delta^{r+s-i}(a)\delta^i(cb) = \sum_{i=0}^{r+s}\sum_{j=0}^{i}\binom{r+s}{i}\binom{i}{j}\delta^{r+s-i}(a)\delta^{i-j}(c)\delta^i(b).$$

Karena $\delta^{r+s-i}(a) \in P$ untuk $i > s$ dan $\delta^i(b) \in P$ untuk $j < s$, maka semua suku-suku dalam deret jumlah pada persamaan diatas berada dalam *P* kecuali $\binom{r+s}{s}\binom{s}{s}\delta^r(a)c\delta^s(y)$ tidak berada dalam *P* karena $\delta^r(a)c\delta^s(b)$ tidak berada dalam *P* dan *R/P* mempunyai karakteristik nol. Dengan demikian $\delta^{r+s}(acb) \notin P$ sehingga berdasarkan bentuk dari *Q* disimpulkan bahwa $acb \notin Q$. Hal ini membuktikan bahwa *Q* adalah ideal prim. Karena $Q \subseteq P$ dan *P* adalah prim minimal, maka $P = Q$. Selanjutnya, karena *Q* adalah δ-ideal (dapat dengan mudah dilihat dari pembentukan *Q*), maka *P* juga merupakan δ-ideal. □

Berikut akan diberikan hubungan antara ideal prime gelanggang *R* dengan ideal prim gelanggang operator differensial $S = R[x;\delta]$.

Teorema 5.

Misalkan R adalah suatu gelanggang Noether dengan derivatif δ *sedemikian sehingga R adalah suatu aljabar terhadap* □ *. Misalkan* $S = R[x;\delta]$ *dan P adalah suatu ideal prim dari S, maka* $P \cap R$ *adalah suatu ideal prim dari R.*

Bukti:
Pembuktian akan dilakukan dalam dua kasus, yaitu kasus $P \cap R = 0$ dan kasus $P \cap R \neq 0$.
(i). Kasus $P \cap R = 0$.

Jika Q adalah sustu ideal prim dari *R* maka *R/Q* mempunyai karakteristik nol karena $R \supseteq$ □ . Jadi berdasarkan Teorema 4, Q adalah suatu δ-ideal. Berdasarkan [2, Teorema 5] terdapat ideal-ideal prim minimal $Q_1, \cdots, Q_m$ dalam *R* sedemikian sehingga $Q_1 Q_2 \cdots Q_m = 0$. Dari Teorema 2 diketahui behwa setiap $Q_i S$ adalah suatu ideal dari *S*, dan bahwa $(Q_1 S)(Q_2 S)\cdots(Q_m S) = Q_1 Q_2 \cdots Q_m S = 0$. Karena *P* adalah ideal prime, kita peroleh $Q_i S \subseteq P$ untuk suatu *i*. Dari sini, $Q_i \subseteq P \cap R = 0$, jadi $P \cap R$ adalah suatu ideal prim.
(ii). Kasus $P \cap R \neq 0$.
Karena $P \cap R$ adalah suatu δ-ideal dari *R* [Teorema 2], maka $S' = \left(R/\left(P \cap R\right)\right)\left[x;\delta'\right]$ adalah suatu gelanggang operator differensial menurut [2, exercise 2X]. Selanjutnya, pilih ideal prim *P'* dari *S'* sedemikian sehingga $P' \cap \left[R/\left(P \cap R\right)\right] = 0$. Dengan kondisi seperti ini, maka mengacu pada pembuktian bagian (i) dapat disimpulkan bahwa 0 adalah ideal prim dari $R/\left(P \cap R\right)$. Karena 0 adalah ideal prim dari $R/\left(P \cap R\right)$, hal ini berarti $P \cap R$ adalah ideal prim dari *R*. □

Daftar Pustaka

[1] Goodearl, K.R., 1992, Prieme ideals in skew polinomial ring and quantized Weyl algebras, *J. of Algebra*, 150, 324-377

[2] Goodearl, K.R., dan Warfiled, J.R., 1989, *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*, Cambridge University Press, London.

[3] McConnel, J.C., dan Robson, J.C., 1987, *Noncommutative Noetherian Rings*, John Wiley & Sons.

[4] Ore, O., 1933, Theory of non-commutative polynomials, *Annals of Math*, 34, 480-508.