ISBN:1858-1382

J M S K

Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi

http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk

Vol. 13, No. 1, 78-84, Juli 2016

Ortogonalitas-*P* di Ruang Norm-2

Muh. Nur*

Abstrak

Pada tulisan ini, akan dipelajari ortogonalitas di ruang hasil kali dalam dan ortogonalitas-*P* di ruang norm-2. Setelah itu, menunjukkan bahwa ortogonalitas-*P* hanya memenuhi empat sifat yaitu nondegenerasi, simetri, kontinuitas, dan resolvabilitas. Terakhir, ditunjukkan bahwa ruang norm-2 merupakan ruang hasil kali dalam-2 jika ortogonalitas-*P* memenuhi sifat homogenitas.

Kata kunci: *Ruang norm*-2, *ruang hasil kali dalam*-2, *ortogonalitas*-*P*.

Abstract

In this article, we will study an ortogonality in an inner product and a *P*-orthogonality in a 2-normed space. We then show that every the *P*-orthogonality only satisfy the four properties of nondegeneracy, symmetry, continuity, and resolvability. Finally, it is shown that the 2-normed space is the 2-inner product if *P*-orthogonality satisfying property of homogenity.

Keywords: 2-Normed space, 2-inner product space, *P*-orthogonality.

1. Pendahuluan

Salah satu konsep penting di ruang vektor adalah ortogonalitas antara dua vektor. Sisi penting dari ortogonalitas ini dapat dilihat dari kaitannya dengan konsep proyeksi,ortonormalitas serta aproksimasi di ruang vektor. Di ruang hasilkali dalam $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ dua vektor x dan y dikatakan *ortogonal*, ditulis $x\perp y$ jika dan hanya jika $\langle x,y\rangle=0$. Beberapa sifat dasar ortogonalitas di ruang hasil kali dalam $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ adalah:

1. *Nondegenerasi*, jika $x\perp x$ maka $x=0$.
2. *Simetri*, jika $x\perp y$ maka $y\perp x$.
3. *Homogenitas*, Jika x ⊥ y maka $\alpha x\perp\beta y$ untuk setiap α,β skalar.
4. *Aditif kanan*, jika $x\perp y$ dan $x\perp z$ maka $x\perp y+z$.
5. *Resolvabilitas*, Untuk setiap $x,y\in X$ terdapat skalar α sedemikian sehingga $x\perp(\alpha x+y)$.
6. *Kontinuitas*, Jika $x_n\to x,\ y_n\to y$ (dalam norm) dan $x_n\perp y_n$ untuk setiap n maka x ⊥ y.

Telah diketahui bahwa pada suatu ruang norm $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ dikenal konsep ortogonalitas antara dua buah vektor. Diantaranya yang cukup terkenal yang adalah sebagai berikut:

a. Ortogonalitas-P (Phytagorean):

* *Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10 Makassar*, *nur_math@yahoo.com*

$x \perp^P y$ jika dan hanya jika $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x+y\|^2$

b. Ortogonalitas-*I* (Isoceles):
$x \perp^I y$ jika dan hanya jika $\|x+y\| = \|x-y\|$

c. Ortogonalitas-*BJ* (Birkhoff-James):
$x \perp^{BJ} y$ jika dan hanya jika $\|x\| \leq \|x+\alpha y\|$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$.

Catat bahwa di ruang hasilkali dalam, ortogonalitas-*P* , ortogonalitas-*I* dan ortogonalitas-*BJ* ekuivalen dengan ortogonalitas biasa $x \perp y$ (lebih jauh lihat [3]). Adapun dalam ruang norm ketiga ortogonalitas di atas secara umum tidak ekuivalen di samping juga tidak semua sifat-sifat ortogonalitas pada ruang hasil kali dalam dipenuhi oleh ketiga ortogonalitas diatas. Untuk ortogonalitas-*P* hanya memenuhi sifat nondegenerasi, simetri, kontinuitas, dan resolvabilitas pada ruang hasil kali dalam, lihat [3,5]. Adapun sifat homogenitas dan aditif kanan diperlihatkan dari contoh berikut ini:

Contoh 1.
Ortogonalitas-*P* tidak memenuhi sifat homogenitas dan aditif kanan. Di ℓ_1, ambil $x = (3,6,0,\cdots)$ dan $y = (8,-4,0,\cdots)$, maka $x \perp^P y$ tetapi x tidak ortogonal-*P* ke $2y$.

Dalam tulisan ini kita pertama memperkenalkan konsep ruang norm-2, ruang hasil kali dalam-2 serta membahas beberapa ortogonalitas dalam ruang norm-2. Setelah itu dikhususkan dibahas mengenai ortogonalitas-P beserta sifat-sifat yang berlaku didalamnya. Terakhir dibahas mngenai sifat homogenitas di ruang norm-2 sehingga menghasilkan ruang hasil kali dalam-2.

2. Pembahasan

2.1 Ruang Norm-2 dan Ruang Hasil Kali Dalam-2

Misalkan X adalah ruang vektor real berdimensi d dimana $d \geq 2$. Suatu fungsi bernilai real yang didefinisikan sebagai suatu pemetaan $\|\cdot,\cdot\|: X \times X \to \mathbb{R}$, sehingga untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi sifat dibawah ini:

1. $\|x, y\| = 0$ jika dan hanya jika x, y bergantung linear;
2. $\|x, y\| = \|y, x\|$;
3. $\|\alpha x, y\| = |\alpha| \|x, y\|$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$;
4. $\|x, y+z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$, disebut sebagai norm-2 di X.

Pasangan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ disebut suatu ruang norm-2.

Sebagai contoh X adalah ruang vektor real berdimensi d dimana $d \geq 2$. Definisikan fungsi $\|\cdot,\cdot\|$ di X sebagai berikut:

$$\|x, y\| = \left[det \begin{pmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle y, x \rangle & \langle y, y \rangle \end{pmatrix} \right]^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

merupakan norm-2 pada X dan disebut norm-2 standar (lihat [6]). Secara geometris, diketahui bahwa $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ merupakan panjang vektor X. Sedangkan pada Persamaan (1) diperoleh $\|x, y\| = \{\|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2\}^{\frac{1}{2}}$ yang mempresentasikan luas jajaran genjang yang direntang oleh x dan y di X. Dengan menggunakan sifat 1-4 dari definisi norm-2 diatas serta

$$\|x,y\| = \|x,(y+\alpha x) - \alpha x\| \qquad (2)$$

maka perhatikan proposisi berikut.

Proposisi 1.
Jika $(X, \|\cdot,\cdot,\|)$ *adalah ruang norm-*2 *maka*

1. $\|x,y\| \geq 0$ *untuk setiap* $x, y \in X$
2. $\|x,y\| = \|x, y+\alpha x\|$ *untuk setiap* $x, y \in X$ *dan* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pada konsep ortogonalitas di ruang norm terinspirasi di ruang hasil kali dalam. Begitu juga konsep atau notasi ortogonalitas di ruang norm-2 tidak terlepas dari ruang hasil kali dalam-2. Suatu *ruang hasil kali dalam-2* merupakan ruang vektor real X yang dilengkapi dengan suatu *hasil kali dalam-2* $\langle\cdot,\cdot\,|\,\cdot\rangle: X \times X \times X \to \mathbb{R}$ dimana memenuhi sifat dibawah ini:

1. $\langle x,x|z\rangle \geq 0$, $\langle x,x|z\rangle = 0$ jika dan hanya jika x, z bergantung linear untuk setiap $x, z \in X$;
2. $\langle x,x|z\rangle = \langle z,z|x\rangle$ untuk setiap $x, z \in X$;
3. $\langle x,y|z\rangle = \langle y,x|z\rangle$ untuk setiap $x, y, z \in X$
4. $\langle \alpha x,y|z\rangle = \alpha\langle x,y|z\rangle$ untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$;
5. $\langle x+x',y|z\rangle \leq \langle x,y|z\rangle + \langle x',y|z\rangle$ untuk setiap $x, x', y, z \in X$.

Sebagai contoh X adalah ruang vektor real berdimensi d dimana $d \geq 2$. Definisikan fungsi $\langle\cdot,\cdot\,|\,\cdot\rangle$ di X sebagai berikut:

$$\langle x,y|z\rangle = det\begin{pmatrix} \langle x,y\rangle & \langle x,z\rangle \\ \langle z,y\rangle & \langle z,z\rangle \end{pmatrix} \qquad (3)$$

merupakan hasil kali dalam-2 pada X dan disebut hasil kali dalam-2 standar. Adapun hubungan antara ruang norm-2 dan ruang hasil kali dalam-2 adalah sebagai berikut.

Proposisi 2.
*Jika suatu norm-*2 *diperoleh dari hasil kali dalam-*2 *maka untuk setiap* $x, y, z \in X$ *berlaku hukum jajaran genjang, yakni* $\|x+y,z\|^2 + \|x-y,z\|^2 = 2(\|x,z\|^2 + \|y,z\|^2)$.

Bukti:
Diketahui bahwa $\|x+y,z\|^2 = \langle x+y, x+y|z\rangle$ dan $\|x-y,z\|^2 = \langle x-y, x-y|z\rangle$.
Dengan menjumlahkan dan menggunakan sifat-sifat hasil kali dalam-2 diperoleh kesamaan yang diinginkan.

Untuk lebih jauh mengetahui tentang ruang norm-2 dan ruang hasil kali dalam-2 lihat [1,2,6].

2.2 Ortogonalitas di Ruang Norm-2

Sebagaimana halnya diruang norm, di ruang norm-2 juga dikenal berbagai rumusan ortogonalitas antara dua buah vektor. Adapun beberapa ortogonalitas pada ruang norm-2 yang dirumuskan oleh Khan dan Siddiqui sebagai berikut:

$x \perp^P y$ jika dan hanya jika $\|x,z\|^2 + \|y,z\|^2 = \|x+y,z\|^2$ untuk setiap $z \in X$
$x \perp^I y$ jika dan hanya jika $\|x+y,z\| = \|x-y,z\|$ untuk setiap $z \in X$

$x \perp^{BJ} y$ jika dan hanya jika $\|x, z\| \leq \|x + \alpha y, z\|$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}, z \in X$

Kemudian Gunawan dkk. (lihat [4]) memperbaiki kekurangan yang dirumuskan oleh Khan dan Siddiqui sebagai berikut:

$x \perp^{P} y$ jika dan hanya jika terdapat subruang $V \subseteq X$ dengan $codim(V) = 1$ sehingga $\|x, z\|^2 + \|y, z\|^2 = \|x + y, z\|^2$ untuk setiap $z \in V$

$x \perp^{I} y$ jika dan hanya jika terdapat subruang $V \subseteq X$ dengan $codim(V) = 1$ sehingga $\|x + y, z\| = \|x - y, z\|$ untuk setiap $z \in V$

$x \perp^{BJ} y$ jika dan hanya jika terdapat subruang $V \subseteq X$ dengan $codim(V) = 1$ sehingga $\|x, z\| \leq \|x + \alpha y, z\|$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}, z \in V$.

2.3 Ortogonalitas-*P* di Ruang Norm-2

Sesuai dengan definisi yang dirumuskan oleh Gunawan dkk. [4], ortogonalitas-*P* didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.
Misalkan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ *adalah ruang norm*-2. *Untuk setiap* $x, y \in X$, x *dikatakan ortogonalitas-P ke* y $(x \perp^{P} y)$ *jika dan hanya jika terdapat subruang* $V \subseteq X$ *dengan* $codim(V) = 1$ *sedemikian sehingga* $\|x, z\|^2 + \|y, z\|^2 = \|x + y, z\|^2$ *untuk setiap* $z \in V$.

Di dalam kasus standar, teorema berikut menjamin definisi di atas ternyata ekuivalen dengan definisi ortogonalitas di ruang hasil kali dalam.

Teorema 1. (Ekuivalensi Ortogonalitas-*P*).
Pada ruang hasil kali dalam-2 *standar*, x *ortogonal-P ke-* y *jika dan hanya jika* $\langle x, y\rangle = 0$ *atau* $x \perp y$.

Bukti:
Diketahui x *ortogonal-P ke-* y artinya $\|x + y, z\|^2 = \|x, z\|^2 + \|y, z\|^2$ sehingga diperoleh

$$\begin{vmatrix} \langle x + y, x + y\rangle & \langle x + y, z\rangle \\ \langle z, x + y\rangle & \langle z, z\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle x, y\rangle & \langle x, z\rangle \\ \langle z, x\rangle & \langle z, z\rangle \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \langle y, y\rangle & \langle x, z\rangle \\ \langle z, y\rangle & \langle z, z\rangle \end{vmatrix} \tag{4}$$

Akibatnya diperoleh $2\langle x, y\rangle = 0$ dengan kata lain $\langle x, y\rangle = 0$. Sebaliknya misalkan $\langle x, y\rangle = 0$. Pilih $V^{\perp}$=span$\{x\}$ atau span $\{y\}$ sehingga $\langle x, y|z\rangle = 0$ untuk setiap $z \in V$. Karena $\langle x, y|z\rangle = \frac{1}{2}[\|x + y, z\|^2 - \|x, z\|^2 - \|y, z\|^2]$ akibatnya $\|x + y, z\|^2 - \|x, z\|^2 - \|y, z\|^2$=0. Jadi $\|x + y, z\|^2 = \|x, z\|^2 + \|y, z\|^2$. ■

Sedangkan sifat-sifat dasar ortogonalitas-*P* di ruang norm-2 mempunyai sifat-sifat yang sama dengan ortogonalitas-*P* di ruang norm dengan beberapa tambahan seperti yang disebutkan dalam Gunawan [4].

Proposisi 3.
Ortogonalitas-P di ruang norm-2 memenuhi sifat non-degenerasi, simetri dan kontinuitas.

Bukti:
Misalkan $x \perp^P x$ maka terdapat sebuah subruang V dari X dengan $\text{codim}(V) = 1$ sehingga $\|x, z\| = 0$ untuk setiap $z \in V$. Andaikan $x \neq 0$, karena $\dim V \geq 2$ maka dapat dipilih $z \in V$ sedemikian sehingga $\{x, z\}$ bebas linear. Akibatnya $\|x, z\| > 0$ sehingga kontradiksi dengan hipotesis. Jadi $x = 0$. Untuk sifat simetrinya tinggal menggunakan sifat ke dua dari norm-2. Sedangkan untuk sifat membuktikan sifat kontinuitas, misalkan x_n konvergen ke x dan y_n konvergen ke y dalam norm-2 dan $x_n \perp^P y_n$ untuk setiap n. Karena norm-2 merupakan pemetaan kontinu sehingga dengan menggunakan sifat norm-2 diperoleh

$$\|x + y, z\|^2 = \lim_{n\to\infty}\|x_n, z\|^2 + \lim_{n\to\infty}\|y_n, z\|^2 = \|x, z\|^2 + \|y, z\|^2. \blacksquare \qquad (5)$$

Teorema 2. (Sifat Resolvabilitas)
Misalkan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ *adalah ruang norm-2 dan* V *subruang* X *dengan* $codim(V) = 1$. *Jika* $x, y \in X$ *maka terdapat skalar* $\alpha \in \mathbb{R}$ *sedemikian sehingga untuk setiap* $z \in V$ *berlaku*

$$\|x, z\|^2 + \|\alpha x + y, z\|^2 = \|x - (\alpha x + y), z\|^2 \qquad (6)$$

Bukti:
Definisikan fungsi bernilai real yakni

$$f(n) = \|x, z\|^2 + \|nx + y, z\|^2 - \|x - (nx + y), z\|^2. \qquad (7)$$

Dengan menggunakan kesamaan $\frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{2n-1}{n^2} = 1$, Persamaan (7) menjadi $f(n) = \|x, z\|^2 + \frac{(n-1)^2}{n^2} + \frac{2n-1}{n^2}(\|nx + y, z\|^2) - \|(n-1)x - y, z\|^2$ (8)

Sehingga diperoleh $f(n) \geq 2\|x, z\|\left[n\|x, z\| - \left(\frac{3n-2}{n}\right)\|y, z\|\right]$. Jadi $f(n)$ bernilai positif jika nilai n cukup besar. Selanjutnya definisikan fungsi

$$f(-n) = \|x, z\|^2 + \|nx - y, z\|^2 - \|(n+1)x - y, z\|^2. \qquad (9)$$

Dengan cara yg sama dan menggunakan kesamaan $\frac{(n+1)^2}{n^2} - \frac{2n+1}{n^2} = 1$, diperoleh

$$f(-n) = \|x, z\|^2 + \frac{(n+1)^2}{n^2} - \frac{2n+1}{n^2}(\|nx - y, z\|^2) - \|(n+1)x - y, z\|^2. \qquad (10)$$

Sehingga diperoleh $f(-n) \leq -2n\|x, z\|^2 - \frac{2n+1}{n^2}\|y, z\|^2 + 2\left(\frac{2n+1}{n}\right)\|x, z\|\|y, z\| + \|y, z\|\left[2\left(\frac{n+1}{n}\right)\|x, z\| + \left(\frac{2n+1}{n^2}\right)\|y, z\|^2\right] = -2\|x, z\|\left[n\|x, z\| - \left(\frac{3n+2}{n}\right)\|y, z\|\right]$. (11)

Jadi $f(-n)$ bernilai negatif jika nilai n cukup besar. Karena $f(n)$ kontinu maka terdapat nilai $\alpha \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $f(n) = 0$. Dengan kata lain $\|x, z\|^2 + \|\alpha x + y, z\|^2 = \|x - (\alpha x + y), z\|^2$ untuk suatu nilai $\alpha \in \mathbb{R}$. $\blacksquare$

Akibat 5.
Misalkan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ *adalah ruang norm*-2 *dan* V *subruang* X *dengan* $codim(V) = 1$. *Jika* $x, y \in X$ *maka terdapat skalar* $\alpha \in \mathbb{R}$ *sedemikian sehingga untuk setiap* $z \in V$ *berlaku*

$$\|x, z\|^2 + \|\alpha x + y, z\|^2 = \|x - (\alpha x + y), z\|^2. \qquad (12)$$

Dengan menggunakan sifat pada ortogonalitas-*P* dalam ruang norm-2 di atas diperoleh teorema berikut ini

Teorema 6.
Misalkan $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ *merupakan ruang norm*-2. *Jika ortogonalitas-P memenuhi sifat homogenitas di ruang norm*-2 *maka* $(X, \langle\cdot,\cdot \mid \cdot\rangle)$ *merupakan ruang hasil kali dalam*-2.

Bukti:
Berdasarkan Proposisi 2, tinggal ditunjukkan $\|x + y, z\|^2 + \|x - y, z\|^2 = 2(\|x, z\|^2 + \|y, z\|^2)$. Berdasarkan Teorema 6 diatas diperoleh Jika $x, y \in X$ maka terdapat skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $z \in V$ berlaku $\|x, z\|^2 + \|\alpha x + y, z\|^2 = \|x - (\alpha x + y), z\|^2$. Misalkan sifat homogenitas terpenuhi yaitu $\beta x \perp^P \alpha x + y$ dengan $\beta = -\alpha \pm 1$ sehingga diperoleh

$$\left(-\alpha + 1\right)^2 \|x, z\|^2 + \|\alpha x + y, z\|^2 = \left\|\left(-\alpha + 1\right)x + (\alpha x + y), z\right\|^2 = \|x + y, z\|^2. \qquad (13)$$

Dengan cara yang sama diperoleh $\left(-\alpha - 1\right)^2 \|x, z\|^2 + \|\alpha x + y, z\|^2 = \|x - y, z\|^2$. Dengan menjumlahkan kedua persamaan diatas diperoleh $\|x + y, z\|^2 + \|x - y, z\|^2 = 2\|\alpha x + y, z\|^2 + 2(\alpha^2 + 1)\|x, z\|^2$. Akibatnya dengan menggunakan sifat homogenitas yaitu $-\alpha x \perp^P \alpha x + y$ diperoleh $\|x + y, z\|^2 + \|x - y, z\|^2 = 2\|x, z\|^2 + 2\|y, z\|^2$. ■

3. Kesimpulan

Konsep ortogonalitas-*P* dalam ruang norm $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ hanya memenuhi beberapa sifat dasar ortogonalitas di ruang hasil kali dalam yaitu sifat nondegenerasi, simetri, kontinuitas, dan resolvabilitas . Begitu juga, pada ruang norm-2 juga telah dibuktikan bahwa keempat sifat ortogonalitas di ruang hasil kali dalam dipenuhi. Misalkan sifat homogenitas dipenuhi dalam ortoganiltas-*P* dalam ruang norm-2 sehingga ruang vektornya yang dilengkapi dengan hasil kali dalam-2 merupakan ruang hasil kali dalam-2.

Daftar Pustaka

[1] Diminnie C., Gähler S. dan White A., 1973. 2-inner Product Spaces. *Demonstratio. Math*., 6, 525-536.

[2] Gunawan H. dan Mashadi M., 2001. On Finite-dimensional 2-Normed Spaces. *Soochow. J. Math. Sci*., 27, 321-329.

[3] Gunawan H., Nursupiamin, Kikianty E., 2005. Beberapa Konsep Ortogonalitas di Ruang Norm, *Program Riset ITB*.

[4] Gunawan H. *et al*., 2006. *Orthogonality in 2-Normed Spaces Revisited*. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak Ser. Mat.17.

[5] James R.C., 1945. Orthogonality in Normed Linear Spaces. *Duke Math. J.*

[6] Muh Nur., 2011. Teorema Titik Tetap di Ruang Norm-2 Standar. *Program Tesis ITB.*