

Solusi Pendugaan Komponen Variansi Negatif pada Klasifikasi Satu Arah Data Seimbang untuk Mengetahui Pengaruh Gizi Limbah Sayuran dalam Pakan Terhadap Pertumbuhan Ikan Nila Gift

Raupong*

Abstrak

Komponen variansi adalah keragaman antar pengamatan yang memperoleh perlakuan yang sama. Pendugaan komponen variansi bertujuan untuk mengetahui keragaman pengaruh perlakuan dan keragaman pengaruh galat. Pendugaan komponen variansi selalu bernilai positif, tetapi dalam tulisan ini ditemukan pendugaan komponen variansi bernilai negatif dari metode analisis variansi. Maka metode maksimum likelihood digunakan untuk menduga variansi pengaruh perlakuan (σ_{α}^2) dan variansi galat (σ_e^2) untuk menghindari kemungkinan komponen variansi yang dalam kasus ini bernilai negatif. Selanjutnya akan dicari apa-apa saja yang menyebabkan pendugaan komponen variansi bernilai negatif serta solusinya. Model yang digunakan adalah model Rancangan Acak Lengkap (RAL) $y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$ dengan $i = 1, 2, \dots, a$ dan $j = 1, 2, \dots, n$.

Kata Kunci: Penaksiran komponen variansi, analisis variansi, Rancangan Acak Lengkap (RAL), data seimbang.

1. Pendahuluan

Salah satu usaha manusia untuk mengembangkan ilmu dan teknologi ialah melalui kegiatan percobaan/penelitian. Percobaan merupakan serangkaian kegiatan dimana setiap tahap dalam rangkaian benar-benar terdefiniskan dan dilakukan untuk menemukan jawaban tentang permasalahan yang diteliti melalui suatu pengujian hipotesis. Menduga komponen variansi dapat diketahui keragaman dari pengaruh perlakuan dan keragaman dari pengaruh galat. Suatu populasi yang berbeda sering diklasifikasikan menurut perlakuan atau grup yang berbeda, dimana dalam suatu rancangan yang dikenai perlakuan terdapat sumber-sumber keragaman. Dalam klasifikasi satu arah yang membangkitkan keragaman selain pengaruh galat, yaitu keragaman yang dibangkitkan oleh pengaruh perlakuan faktor tunggal, dimana besarnya keragaman yang dibangkitkan oleh pengaruh perlakuan disebut Kuadrat Tengah Perlakuan (KTP) dan besarnya keragaman yang dibangkitkan oleh pengaruh galat disebut Kuadrat Tengah Galat atau KTG (Gaspersz, 1991).

Dalam analisis variansi (ANOVA) tidak jarang ditemukan F -hitung (F -hit) < 1 . Hal ini bertentangan dengan teori penjabaran harapan kuadrat tengah suatu sumber variasi karena konsekuensinya ialah menghasilkan pendugaan komponen variansi yang bernilai negatif. Ditemukannya dugaan suatu komponen variansi bernilai negatif biasanya disebabkan oleh

* Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10, Tamalanrea Makassar.

kekeliruan pada model yang digunakan termasuk asumsi-asumsi yang melandasinya. Antisipasi yang dilakukan biasanya memperbaiki model termasuk mungkin meniadakan komponen yang dimaksud dari model. Pada tulisan ini tidak melakukan cara tersebut, tetapi memeriksa asumsi-asumsi yang melandasi ANAVA lalu menemukan faktor yang menyebabkan komponen variansi bernilai negatif.

2. Tinjauan Pustaka

2.1 Analisis Variansi (ANAVA)

ANAVA adalah suatu metode analisis statistika yang termasuk ke dalam cabang statistika inferensi. Dalam literatur Indonesia metode ini dikenal dengan berbagai nama lain, seperti analisis ragam, sidik ragam, dan analisis variansi. ANAVA merupakan pengembangan dari masalah Behrens-Fisher, sehingga uji-F juga dipakai dalam pengambilan keputusan.

Analisis variansi adalah prosedur yang mencoba menerapkan porsi variansi ini pada setiap kelompok dari variabel independen. Teknik ini membandingkan secara simultan beberapa variabel sehingga bisa memperkecil kemungkinan kesalahan. Keuntungan dari penggunaan analisis variansi adalah mampu melakukan perbandingan untuk banyak variabel. Tujuan dari analisis variansi adalah untuk menemukan variabel independen dalam penelitian dan bagaimana mereka berinteraksi dan mempengaruhi perlakuan (Ashari & Santosa, 2005). Menurut Searle (1971), variansi negatif dapat terjadi dalam pendugaan komponen variansi. Kebanyakan dari metode-metode akan menghasilkan variansi negatif, kecuali jika syarat variansi yang positif secara langsung selalu diterapkan. Agar valid dalam menafsirkan hasilnya, analisis variansi memenuhi 4 asumsi sebagai berikut:

1. Data berdistribusi normal, karena pengujiannya menggunakan uji *F-Snedecor*,
2. Variansi atau ragamnya homogen, dikenal sebagai homoskedastisitas,
3. Masing-masing sampel saling independen, yang harus dapat diatur dengan perancangan percobaan yang tepat,
4. Komponen-komponen dalam modelnya bersifat aditif.

Tidak terpenuhinya satu atau lebih asumsi dapat mempengaruhi baik tingkat nyatanya (*level of significance*) maupun kepekaan *F* atau *t* terhadap penyimpangan sesungguhnya dari hipotesis nol. Saat ini banyak sekali software-software statistik yang dapat membantu peneliti melakukan pengujian asumsi-asumsi ini dengan lebih mudah. Bila asumsi-asumsi tersebut tidak terpenuhi salah satu cara mengatasinya adalah dengan melakukan transformasi data.

Analisis variansi relatif mudah dimodifikasi dan dapat dikembangkan untuk berbagai bentuk percobaan yang lebih rumit. Selain itu, analisis ini juga masih memiliki keterkaitan dengan analisis regresi. Akibatnya, penggunaannya sangat luas diberbagai bidang, mulai dari eksperimen laboratorium hingga eksperimen periklanan, psikologi dan lain-lain.

2.2 ANAVA Klasifikasi Satu Arah

Model klasifikasi satu arah atau sering juga disebut Rancangan Acak Lengkap (RAL), rancangan ini biasa digunakan bila satuan percobaannya homogen, artinya keragaman antar satuan percobaan tersebut kecil, dan mengelompokkannya ke dalam kelompok tidak memberi manfaat. Pengacakan, proses yang menjadikan hukum peluang dapat diterapkan, dilakukan dengan membagikan perlakuan pada satuan percobaan seluruhnya secara acak. Di dalam pengacakan sama sekali tidak dilakukan pembatasan, seperti halnya di dalam kelompok harus

mencakup semua perlakuan. Banyaknya pengamatan pada berbagai perlakuan tidak dipandang sebagai pembatasan pada pengacakan. Setiap satuan percobaan mempunyai peluang sama untuk menerima perlakuan manapun. RAL sangat luwes dalam arti bahwa banyaknya perlakuan dan ulangan hanya dibatasi oleh banyaknya satuan percobaan yang tersedia.

Kerugian informasi dari data yang hilang relatif kecil dibanding kerugian bila digunakan rancangan lainnya. Banyaknya derajat bebas untuk menduga galat percobaan adalah maksimum; ini meningkatkan ketepatan percobaan dan merupakan hal penting bagi percobaan yang kecil, yaitu yang derajat bebasnya bagi galat percobaan kurang dari 20. Data seimbang (*balanced*) merupakan data dimana setiap perlakuan memiliki jumlah ulangan yang sama. Misalkan y_{ij} menyatakan pengamatan ke- j pada perlakuan ke- i , $i = 1, 2, \dots, a$ dan $j = 1, 2, \dots, n$. Total perlakuan hanya memerlukan satu subskrip, sehingga total bagi perlakuan ke- i dilambangkan dengan $y_{i\cdot}$, titik (dot) menunjukkan bahwa semua pengamatan pada perlakuan ke- i telah dijumlahkan untuk mendapatkan total. Huruf a dan n digunakan untuk banyaknya perlakuan dan banyaknya ulangan dalam setiap perlakuan.

Untuk setiap perlakuan, $y_{i\cdot}$ dan $\sum_{j=1}^n y_{ij}^2$ dihitung sekaligus, kemudian ditotalkan menjadi

$$\sum_{i=1}^a y_{i\cdot} = y_{\cdot\cdot} \text{ dan } \sum_{i=1}^a \left(\sum_{j=1}^n y_{ij}^2 \right) = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij}^2. \text{ Kemudian menghitung Faktor Koreksi (FK) yang}$$

merupakan jumlah semua pengamatan dikuadratkan dan dibagi banyaknya pengamatan dan menghitung Jumlah Kuadrat Total (JKT) yang dikoreksi untuk nilai tengah. Jumlah kuadrat yang berasal dari peubah klasifikasi, yaitu perlakuan atau jumlah kuadrat perlakuan (JKP) dan jumlah kuadrat antarindividu yang diperlakukan sama disebut jumlah kuadrat galat (JKG). Kuadrat tengah galat dilambangkan dengan s^2 merupakan rata-rata komponen yang disumbangkan oleh beberapa populasi atau perlakuan. Besaran ini merupakan nilai-dugaan bagi σ^2 yang sama, yaitu keragaman antar pengamatan yang mendapat perlakuan sama. Masing-masing komponen yang menyusun s^2 hanya didasarkan pada derajat bebas yang kecil, sehingga dapat bervariasi cukup besar di sekitar σ^2 sehingga tidak sebaik nilai-dugaan gabungan (Steel dan Torrie, 1993).

2.3 Model Linier Aditif

Pengamatan dapat diuraikan menjadi jumlah dua komponen, yaitu nilai-tengah dan komponen acak, dan selanjutnya nilai tengah tersebut adalah jumlah beberapa komponen. Model linier aditif secara umum dari rancangan satu faktor dengan RAL dapat dibedakan menjadi dua, yaitu model tetap dan model acak. Model tetap merupakan model dimana perlakuan-perlakuan yang digunakan dalam percobaan berasal dari populasi yang terbatas dan pemilihan perlakuannya ditentukan secara langsung oleh si peneliti. Kesimpulan yang diperoleh dari model tetap terbatas hanya pada perlakuan-perlakuan yang dicobakan saja dan tidak bisa digeneralisasikan. Sedangkan model acak merupakan model dimana perlakuan-perlakuan yang dicobakan merupakan contoh acak dari populasi perlakuan. Kesimpulan yang diperoleh dari model acak berlaku secara umum untuk seluruh populasi perlakuan (Ashari dan Santosa, 2005). Model aditif dari klasifikasi satu arah (RAL) dirumuskan sebagai berikut:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, a; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

dimana

$$\begin{aligned} y_{ij} &= \text{nilai pengamatan perlakuan ke-}i \text{ pada ulangan ke-}j, \\ \mu &= \text{rata-rata umum,} \end{aligned}$$

Raupong

α_i = pengaruh perlakuan ke- i ,

e_{ij} = galat memperoleh perlakuan ke- i pada ulangan ke- j ,

dengan asumsi model tetap yaitu:

$$\sum \alpha_i = 0, \text{ dan } \text{var}(e_{ij}) = \sigma_e^2 \quad \forall_{ij} \text{ serta } e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2).$$

Sedangkan untuk model acak yaitu:

$$E(\alpha_i) = 0, \text{ var}(\alpha_i) = \sigma_\alpha^2, \text{ var}(e_{ij}) = \sigma_e^2 \quad \forall_{ij}, \text{ dan } e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2).$$

Bentuk hipotesis yang diuji adalah sebagai berikut:

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 \dots = \alpha_a = 0 ; H_1: \text{Ada } \alpha_i \neq 0.$$

Klasifikasi satu arah untuk data seimbang yakni terdiri dari a perlakuan dan n ulangan yang sama, sehingga data pengamatan dan tabel ANAVA dapat disusun dalam bentuk tabulasi data seperti pada Tabel 1 dan Tabel 2 berikut.

Tabel 1. Tabulasi Data.

Ulangan	Perlakuan				
	1	2	...	a	
	y_{11}	y_{21}	...	y_{a1}	
	y_{12}	y_{22}	...	y_{a2}	
	\vdots	\vdots		\vdots	
	y_{1n_i}	y_{2n_i}	...	y_{an_i}	
Total	$y_{1\circ}$	$y_{2\circ}$...	$y_{a\circ}$	$y_{\circ\circ}$

Sumber: Mattjik dan Sumertajaya (2002).

Berdasarkan Tabel 1 dapat dibuat rumus-rumus ANAVA sebagai berikut:

$$FK = \frac{y_{\circ\circ}^2}{an} \quad (2)$$

$$JKT = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{\circ\circ})^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - FK \quad (3)$$

$$JKP = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{i\circ} - \bar{y}_{\circ\circ})^2 = \sum_{i=1}^a \frac{y_{i\circ}^2}{n} - FK \quad (4)$$

$$JKG = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i\circ})^2 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n y_{ij}^2 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^a y_{i\circ}^2 \quad (5)$$

Sehingga diperoleh Kuadrat Tengah Perlakuan (KTP) dan Kuadrat Tengah Galat (KTG),

$$KTP = \frac{JKP}{a-1} \text{ dan } KTG = \frac{JKG}{a(n-1)} \quad (6)$$

sebagaimana yang ditunjukkan pada Tabel 2.

Raupong

Tabel 2. Analisis Variansi (ANAVA).

Sumber keragaman	Derajat bebas (db)	Jumlah Kudrat (JK)	Kudrat Tengan (KT)	F-Hitung
Perlakuan	$a-1$	JKP	KTP	KTP/KTG
Galat	$a(n-1)$	JKG	KTG	
Total	$an-1$	JKT		

Sumber: Mattjik dan Sumertajaya (2002).

Berdasarkan persamaan (1) diperoleh $\bar{y}_{i\cdot} = \mu + \alpha_i + \bar{e}_{\cdot\cdot}$, untuk $\bar{e}_{i\cdot} = \sum_{j=1}^n \frac{e_{ij}}{n}$, $\bar{y}_{\cdot\cdot} = \mu + \bar{\alpha}_{\cdot} + \bar{e}_{\cdot\cdot}$

, untuk $\bar{\alpha}_{\cdot} = \sum_{i=1}^a \frac{\alpha_i}{a}$ dan $\bar{e}_{\cdot\cdot} = \sum_{j=1}^a \frac{\bar{e}_{i\cdot}}{a}$. Oleh karena itu

$$E(JKP) = E \left[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (\bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot})^2 \right] = n \sum_{i=1}^a \left[E(\alpha_i - \bar{\alpha}_{\cdot})^2 + E(\bar{e}_{i\cdot} - \bar{e}_{\cdot\cdot})^2 \right].$$

Variansi σ_e^2 dan σ_a^2 , disebut komponen variansi karena merupakan suatu komponen variansi dari suatu pengamatan. Sehingga berdasarkan definisi variansi, digunakan $E(e_{ij}) = 0$ dan $E(\alpha_i) = 0$, untuk memperoleh komponen-komponen tersebut, yaitu

$$\sigma_e^2 = \text{var}(e_{ij}) = E[e_{ij} - E(e_{ij})]^2 = E(e_{ij}^2), \quad \sigma_a^2 = \text{var}(\alpha_i) = E(\alpha_i^2)$$

dan

$$E(JKP) = n \sum_{i=1}^a \left[\text{var}(\alpha_i - \bar{\alpha}_{\cdot})^2 + \text{var}(\bar{e}_{i\cdot} - \bar{e}_{\cdot\cdot})^2 \right] = (a-1)(n\sigma_a^2 + \sigma_e^2) \quad (7)$$

$$E(KTP) = \frac{E(JKP)}{a-1} = \frac{(a-1)(n\sigma_a^2 + \sigma_e^2)}{a-1} = n\sigma_a^2 + \sigma_e^2. \quad (8)$$

Begitupun untuk memperoleh $E(JKG)$

$$E(JKG) = E \left[\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})^2 \right] = a(n-1)\sigma_e^2 \quad (9)$$

$$E(KTG) = \frac{E(JKG)}{a(n-1)} = \frac{a(n-1)\sigma_e^2}{a(n-1)} = \sigma_e^2 \quad (10)$$

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{JKG}{a(n-1)} = KTG \quad (11)$$

$$\hat{\sigma}_a^2 = \left(\frac{\frac{JKP}{a-1} - \hat{\sigma}_e^2}{n} \right) = \frac{KTP - KTG}{n} \quad (12)$$

2.4 Statistik Uji-F

Uji F atau ANAVA digunakan untuk menguji perbedaan rata-rata dari kelompok sampel lebih dari dua kelompok yang berlainan akibat penggunaan beberapa perlakuan (*Treatment levels*) pada satu variabel bebas (x). Asumsi-asumsi yang diperlukan untuk uji F adalah sebagai berikut:

1. Pengamatan dilakukan secara acak atau bebas, artinya pemilihan setiap sampel dari populasi harus bebas terhadap kesempatan untuk dipilih.
2. Variabel atau peubah respons yang diukur harus dalam skala interval atau rasional.
3. Data pengamatan yang diambil hendaknya menyebar mengikuti sebaran normal atau paling sedikit tidak melanggar sebaran normal.
4. Data pengamatan harus mempunyai variansi/keragaman yang homogen antar perlakuan yang dibandingkan.

Statistik uji- F didefinisikan sebagai nisbah dua peubah acak χ^2 yang bebas, masing-masing dibagi dengan derajat bebasnya. Jadi dapat ditulis $F = \frac{U/v_1}{V/v_2}$, U dan V menyatakan

peubah acak bebas, masing-masing berdistribusi χ^2 dengan derajat bebas v_1 dan v_2 . Bila S_1^2 dan S_2^2 variansi sampel acak ukuran n_1 dan n_2 yang diambil dari dua populasi normal, masing-masing dengan variansi σ_1^2 dan σ_2^2 , serta diketahui bahwa $\chi_1^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2}{\sigma_1^2}$ dan

$\chi_2^2 = \frac{(n_2-1)s_2^2}{\sigma_2^2}$ menyatakan dua peubah acak yang berdistribusi χ^2 dengan derajat bebas

$v_1 = n_1 - 1$ dan $v_2 = n_2 - 1$. Selanjutnya, karena kedua sampel diambil secara acak maka kedua peubah acak bebas satu sama lain. Dengan $\chi_1^2 = U$ dan $\chi_2^2 = V$, diperoleh statistik uji

$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2 S_1^2}{\sigma_1^2 S_2^2}$ yang berdistribusi F dengan derajat bebas $v_1 = n_1 - 1$ dan $v_2 = n_2 - 1$.

Dengan demikian jika nilai F -hitung lebih besar dari F_{α, v_1, v_2} maka hipotesis nol ditolak.

2.5 Munculnya Pendugaan Komponen Variansi Negatif

Pendugaan adalah usaha untuk memperoleh penduga berupa nilai atau interval nilai sebagai dugaan nilai parameter populasinya. Pendugaan akan menghasilkan bermacam-macam pendugaan yang harus dipilih mana yang paling baik dipakai sebagai dugaan parameter populasinya (Soelistyo, 1987).

Bagaimana menunjukkan taksiran bernilai negatif dapat dibangun dari metode analisis variansi. Tidak ada apapun yang intrinsik dalam metode ini untuk mencegahnya. Ini tidak hanya dengan suatu kasus yang sederhana tetapi juga di dalam model-model yang memiliki banyak

faktor, keduanya dengan data yang seimbang dan data yang tidak seimbang. Itu jelas menyimpang dari hasil metode pendugaan komponen variansi, karena interpretasi suatu taksiran komponen variansi yang negatif dari suatu parameter merupakan suatu masalah (Searle, 1971).

Misal σ^2 vektor dari komponen variansi untuk diduga dalam model yang sama dan misal s vektor dari jumlah kuadrat. Maka, saat jumlah kuadrat mempunyai nilai harapan fungsi linier, yang ditunjukkan sebagai $c\sigma^2$, sehingga

$$E(s) = c\sigma^2 \quad (13a)$$

karenanya, untuk c non-singular pendugaan ANAVA dari σ^2 didasari persamaan (13a) dan merupakan solusi untuk $\hat{\sigma}^2$

$$s = c\hat{\sigma}^2 \quad \text{atau} \quad \hat{\sigma}^2 = c^{-1}s \quad (13b)$$

Pada persamaan (13b) di atas elemen $\hat{\sigma}^2$ pendugaan komponen variansi, merupakan suatu kombinasi linier dari jumlah kuadrat dalam s . Lebih dari itu, tidak ada yang bisa dipisahkan dari persamaan di atas untuk memastikan bahwa tiap elemen dari $\hat{\sigma}^2$ adalah selalu tak nol. Jadi pendugaan ANAVA dapat negatif. Dan apakah ketaksamaan ini terjadi atau tidak hanyalah suatu fungsi dari data apapun yang akan digunakan dalam menghitung KTP dan KTG. Dan ketika itu terjadi akan menghasilkan kesulitan dalam pendugaan negatif dari suatu parameter itu, karena menurut definisi pendugaan komponen variansi selalu bernilai positif. Meskipun demikian, suatu karakter dari pendugaan ANAVA, mereka dapat menghasilkan pendugaan negatif (Searle *et al.*, 1992).

Komponen variansi selalu positif karena diasumsikan mewakili variansi dari variabel acak. Tapi metode seperti ANAVA mengakibatkan pendugaan negatif. Pendugaan negatif mungkin muncul dengan berbagai sebab yaitu:

1. Variabel dalam data mungkin cukup besar sehingga menghasilkan pendugaan negatif meskipun *true value* dari komponen variansi adalah positif.
2. Data terdiri dari data pencilan, tidak biasanya memperlihatkan variabel yang besar.
3. Suatu perbedaan model untuk menginterpretasikan data yang sesuai.
4. Di bawah beberapa model statistik untuk analisis komponen variansi, pendugaan negatif adalah suatu indikasi bahwa observasi dalam data berkorelasi negatif (Bhatia, 2000).

Faktor-faktor yang menyebabkan pendugaan bernilai negatif yaitu:

1. Menggunakan suatu model yang salah,
2. Mengubah model,
3. Indikasi nilai dari komponen variansi adalah nol, yaitu $\sigma_a^2 = 0$.

Nilai dugaan untuk komponen variansi dari sumber variasi yang lain dapat diketahui dengan cara yang sama berdasarkan hasil penjabaran kuadrat tengah teoritis. Nilai yang diperoleh akan bernilai negatif apabila nilai kudrat tengah galat lebih besar dari nilai kuadrat tengah sumber variasi lainnya.

Perolehan suatu taksiran negatif dari metode analisis variansi adalah semata-mata konsekuensi dari data dan metode. Itu sama sekali tidak bergantung pada asumsi distribusi normal atau cara lainnya. Bagaimanapun, ketika diasumsikan normal, itu mungkin dalam kasus-kasus tertentu untuk kemungkinan memperoleh suatu taksiran negatif (Searle, 1971).

2.6 Penaksir Maksimum Likelihood

Bila y berdistribusi normal multivariat atau $y \sim N(\mu I_{an}, V = \{ {}_a \sigma_\alpha^2 J_n + \sigma_e^2 I_n \})$ maka fungsi likelihood dapat ditulis sebagai berikut:

$$L = L(\mu, V) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(y - \mu 1_{an})' V^{-1}(y - \mu 1_{an})\right]}{(2\pi)^{\frac{1}{2}an} |V|^{\frac{1}{2}}} \quad (14)$$

$$l = \ln L = \ln [L(\mu, V)] = -\frac{1}{2} an \ln 2\pi - \frac{1}{2} a(n-1) \ln \sigma_e^2 - \frac{1}{2} a \ln \lambda - \frac{1}{2\sigma_e^2} \left\{ JKG + \frac{\sigma_e^2}{\lambda} (JKP + an(\bar{y}_{..} - \mu)^2) \right\}. \quad (15)$$

Dalam hal tertentu $\hat{\sigma}_\alpha^2$ dapat bernilai negatif, sedangkan nilai dari σ_α^2 adalah $0 \leq \sigma_\alpha^2 < \infty$. Sehingga metode maksimum likelihood akan memberikan solusi untuk mengatasi hal seperti ini, dengan menganggap $\lambda = \sigma_e^2$ dimana $\sigma_\alpha^2 = 0$ dengan harapan σ_α^2 bernilai positif, maka persamaan (15) menjadi:

$$\ln L = -\frac{1}{2} an \ln 2\pi - \frac{1}{2} an \ln \sigma_e^2 - \frac{JKP + JKG}{2\sigma_e^2} - \frac{an(\bar{y}_{..} - \mu)^2}{2\sigma_e^2} \quad (16)$$

Persamaan (16) diturunkan terhadap σ_e^2 lalu disamakan dengan nol diperoleh:

$$\tilde{\sigma}_e^2 = \frac{JKP + JKG}{an} = \frac{JKT}{na}. \quad (17)$$

Dengan demikian,

$$\text{jika } \left(1 - \frac{1}{a}\right)KTP \geq KTG \quad \text{maka } \tilde{\sigma}_\alpha^2 = \left[\left(1 - \frac{1}{a}\right)KTP - KTG \right] / n \quad (18)$$

$$\tilde{\sigma}_e^2 = KTG$$

$$\text{jika } \left(1 - \frac{1}{a}\right)KTP < KTG \quad \text{maka } \tilde{\sigma}_\alpha^2 = 0 \quad \text{dan} \quad \tilde{\sigma}_e^2 = \frac{JKT}{an} \quad (19)$$

3. Metode Penelitian

3.1 Jenis dan Sumber Data

Data yang digunakan sebagai aplikasi merupakan data sekunder hasil penelitian mengenai pengaruh gizi limbah sayuran terhadap pertumbuhan ikan Nila Gift, dengan lima perlakuan dan empat ulangan (Susangka *dkk.*, 2005).

3.2 Metode Analisis Data

Untuk mengetahui pengaruh gizi limbah sayuran dalam pakan terhadap pertumbuhan ikan Nila Gift digunakan metode ANAVA dengan Model linier aditif seperti persamaan (1). Selanjutnya diduga komponen variansinya, jika komponen variansinya bernilai negatif maka asumsi analisis variansi diuji, dan penanganannya menggunakan metode penaksiran maksimum likelihood. Untuk memudahkan proses pengolahan data, digunakan beberapa software yaitu Microsoft Excel dan SPSS 14.

4. Hasil dan Pembahasan

4.1 Deskripsi Data

Data sekunder untuk data seimbang memiliki 5 (lima) perlakuan dan masing-masing diulang sebanyak 4 (empat) kali, ditunjukkan pada Tabel 3.

Tabel 3. Pertumbuhan Mutlak Ikan Nila Gift (gram) Selama Pemeliharaan.

Ulangan	PERLAKUAN				
	A	B	C	D	E
1	1,73	1,80	1,82	1,83	1,40
2	1,22	1,82	0,92	1,55	1,21
3	0,48	0,57	2,16	1,33	1,42
4	1,17	0,9	0,9	1,04	1,54
RATA-RATA	1,15	1,27	1,45	1,44	1,39

Sumber: Susangka *dkk.*, 2005.

Perlakuan yang digunakan adalah sebagai berikut:

Pakan A = Pelet tanpa mengandung limbah sayuran,

Pakan B = Pelet yang mengandung tepung limbah sayuran 5%,

Pakan C = Pelet yang mengandung tepung limbah sayuran 10%,

Pakan D = Pelet yang mengandung tepung limbah sayuran 15%,

Pakan E = Pelet yang mengandung tepung limbah sayuran 20%.

4.2 Uji Asumsi ANAVA

Berdasarkan output SPSS, hasil pengujian homogenitas varians dengan menggunakan uji *Levene Statistic* diperoleh nilai sebesar 3,975 dengan nilai signifikansi sebesar 0,021. Karena nilai signifikansi lebih kecil dari level kepercayaan $\alpha = 0,05$, sehingga H_0 ditolak yang berarti bahwa variansi tiap perlakuan tidak sama. Ini berarti bahwa asumsi homogenitas tidak terpenuhi.

Selanjutnya pengujian ANAVA dengan menggunakan uji F , diperoleh $F_{hit} = 0,27$ lebih kecil dari $F_{0,05;4;15} = 4,056$, yang berarti bahwa H_0 diterima yaitu semua perlakuan tidak berpengaruh terhadap pertumbuhan ikan Nila Gift.

4.3 Penaksiran Komponen Variansi

Berdasarkan metode analisis variansi diperoleh komponen variansi untuk data seimbang sebagai berikut:

$$\hat{\sigma}_e^2 = KTG = 0,241 \quad \text{dan} \quad \hat{\sigma}_\tau^2 = \frac{KTP - KTG}{n} = \frac{0,065 - 0,241}{20} = -0,0088 .$$

Karena masing-masing komponen variansi perlakuannya bernilai negatif, maka komponen variansinya dapat dihitung menggunakan metode maksimum likelihood. Untuk data seimbang komponen variansinya sebagai berikut:

$$\left(1 - \frac{1}{a}\right)KTP = \left(1 - \frac{1}{5}\right)0,065 = 0,052.$$

Raupong

Karena $\left(1 - \frac{1}{a}\right)KTP < KTG$, maka $\tilde{\sigma}_\tau^2 = 0$ dan $\tilde{\sigma}_e^2 = \frac{JKT}{an} = \frac{3,877}{20} = 0,19385$.

F -hitung = $\frac{0,065}{0,19385} = 0,335$ lebih kecil dari $F_{0,05;4;15} = 4,056$, yang berarti bahwa H_0 diterima,

atau tidak ada pengaruh perlakuan terhadap pertumbuhan ikan Nila Gift. Sedangkan untuk data tak seimbang komponen variansinya sebagai berikut. Karena $\hat{\sigma}_\tau^2 < 0$ maka

$$\tilde{\sigma}_e^2 = \frac{JKT}{\sum_{i=1}^a n_i} = \frac{3023,413}{10} = 302,34 \text{ dan } \tilde{\sigma}_\tau^2 = 0.$$

F -hitung = $\frac{165,310}{302,34} = 0,547$ lebih kecil dari $F_{0,05;3;6} = 4,757$, yang berarti bahwa H_0 diterima

yaitu tidak ada pengaruh pemberian makanan dengan dosis berbeda terhadap pertumbuhan ikan Nila Gift.

5. Kesimpulan dan Saran

5.1 Kesimpulan

Hasil analisis yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa yang menyebabkan komponen variansi bernilai negatif pada klasifikasi satu arah atau RAL, yaitu adanya penerapan perancangan RAL yang tidak tepat dan satu atau lebih asumsi ANAVA tidak terpenuhi. Akibatnya kesimpulan yang diperoleh yaitu terima H_0 atau semua perlakuan tidak berpengaruh terhadap respon yang diamati. Solusi dalam mengembangkan percobaan lebih lanjut terhadap perlakuan yaitu unit-unit percobaan harus homogen dan presisi taraf perlakuan lebih dikembangkan.

5.2 Saran

Sebaiknya lebih dikembangkan lagi bagaimana mencari solusi pendugaan komponen variansi negatif dalam klasifikasi dua arah atau lebih.

Daftar Pustaka

- Mattjik, A.A. dan Sumertajaya, I.M., 2002. *Perancangan Percobaan, Jilid I Edisi Kedua*. IPB, Bogor.
- Ashari dan Santosa, P.B., 2005. *Analisis Statistik dengan Microsoft Excel & SPSS*. Penerbit Andi, Yogyakarta.
- Bhatia, V.K., 2000. *Variance Component Estimation with Application*. Library Avenue, New Delhi.
- McCulloch, C.E., Casella, G., dan Searle, S.R., 1992. *Variance Components*. John Wiley & Sons Inc., New York.

Raupong

- Susangka, I., Haetami, K., dan Andriani, Y., 2005. *Evaluasi Nilai Gizi Limbah Sayuran, Produk Cara Pengolahan Berbeda dan Pengaruhnya Terhadap Pertumbuhan Ikan Nila Gift*. Universitas Padjadjaran, Bandung.
- Steel, R.G.D. dan Torrie, J.H., 1993. *Prinsip dan Prosedur Statistika*. Gramedia Pustaka Utama, Jakarta.
- Walpole, R.E. dan Myers, R.H., 1986. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan, Edisi Kedua*. ITB, Bandung.
- Searle, S.R., 1971. *Linier Model*. John Wiley & Sons Inc., New York.
- Soelistyo, 1987. *Materi Pokok Pengantar Ekonometrika*. Universitas Terbuka, Karunika Jakarta.
- Gaspersz, V., 1991. *Metode Perancangan Percobaan*. Armico, Bandung.