ISBN:1858-1382

J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 13, No. 2, 112-121, Januari 2017

Aplikasi Pemetaan Kucing Arnold pada Logo UNHAS

Arman Efendi *

Abstrak

Pemetaan ini memetakan bujursangkar $S=\{(x,y)\,|\,0\le x<1, 0\le y<1\}$ secara satu-satu dan pada menggunakan transformasi $T(x,y)=(x+y, x+2y) \bmod 1$. Misalkan (x,y) adalah titik pixel, yaitu $x=\frac{n}{200}$ dan $y=\frac{m}{200}$, dengan $n=0,1,\ldots,199$ dan $m=0,1,\ldots,199$, maka dapat dibuktikan bahwa terdapat bilangan terkecil $\Pi(p)$ yang merupakan perioda dari $T(S)$. Artinya, untuk setiap titik piksel (x,y) berlaku $T^{\Pi(p)}(x,y)=(x,y)$. Pada khususnya, jika p = 200 maka bilangan asli terkecil $\Pi(p)$ = 150.

Kata Kunci: Pemetaan Kucing Arnold, logo UNHAS.

1. Pendahuluan

Berbagai gejala alam menampilkan prilaku yang rumit, tak dapat diperkirakan, tampak acak (random). Misalnya perubahan musim, aliran turbulen pada gelombang lautan. Karena tidak ada hubungan yang jelas antara sebab dan akibat, maka gejala-gejala semacam ini dikatakan memiliki elemen acak.

Dalam banyak kasus, keacakan yang nampak sesungguhnya mengandung keteraturan. Keacakan (*randomness*) demikian yang kemudian disebut dengan istilah galau (*chaos*).

Pemetaan Kucing Arnold adalah salah satu dari sekian banyak jenis *chaos*. Pemetaan ini dinamakan pemetaan kucing Arnold setelah seorang matematikawan Rusia Vlamindir I Arnold yang pertama menjelaskan tentang pemetaan *chaos* dengan menggunakan diagram seekor kucing. Pemetaan Kucing Arnold merupakan pemetaan yang didasarkan atas pemetaan dari satu titik pada bidang datar ke titik yang lain dengan suatu transformasi tertentu.

Pada penelitian ini akan dipelajari prilaku *chaotic* dari perubahan grafik, dalam pembahasan ini dilakukan perubahan (transformasi) terhadap grafik yang awalnya adalah grafik logo UNHAS. Kembalinya grafik logo UNHAS ke bentuk semula setelah dikenai beberapa kali transformasi tertentu dari R_2 ke R_2 merupakan hasil yang seharusnya terjadi.

2. Model Kucing Arnold

Suatu pemetaan terhadap satuan bujur sangkar pada bidang-*XY* dan konsep perhitungan modulus digunakan untuk menjelaskan konsep pemetaan Kucing Arnold. Hukum Algoritma Hasil Bagi Eucklid yang menyatakan bahwa apabila diberikan bilangan bulat *a* dan bilangan asli *m*, maka bias dicari bilangan bulat *q* dan *r* sedemikian rupa sehingga $a=mq+r$, dengan

* *SMA Negeri 1 Tanrilili Maros, email: armanefendi@gmail.com.*

$0 \le r \le m$. Dalam hal ini ditulis $a = r \bmod m$. Apabila $a \ge 0$ dan semua bilangan diatas di bagi *m* diperoleh

$$\frac{a}{m} = q + \frac{r}{m}.$$

Di sini ditulis $\frac{a}{m} = \frac{r}{m} \bmod 1$. Jika $r = a - mq$, maka dalam bilangan sistem perhitungan modulus dapat di tulis $a = r \bmod m$. Sebagai akibatnya untuk setiap titik bilangan riil *x*, titik *x* mod 1 berapa pada interval [0,1) dan untuk setiap koordionat (*x*,*y*), titik (*x*,*y*) mod 1 berada pada daerah bujur sangkar $S = \{(x, y) | 0 \le x < 1, 0 \le y < 1\}$. Perhatikan batas atas dan batas kanan daerah bujursangkar tidak termuat dalam bujur sangkar S. Pemetaan Kucing Arnold adalah transformasi $T : S \to S$ yang didefenisikan dengan rumus

$$T : (x, y) \to (x + y, x + 2y) \bmod 1.$$

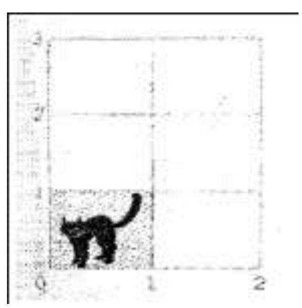
Atau dalam bentuk notasi matriks

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \bmod 1.$$

Untuk memahami geometri Pemetaan Kucing Arnold, kesamaan di atas ditulis dalam bentuk

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \bmod 1,$$

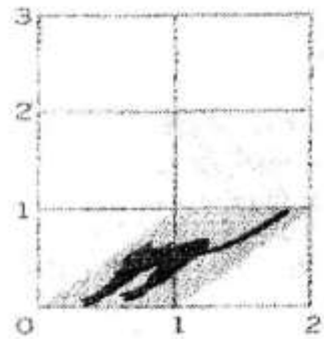
yang mengekspresikan Pemetaan Kucing Arnold sebagai komposisi pemekaran (*shear*) pada arah *x* dengan penambahan sebesar *y*, diikuti oleh pemekaran pada arah *y* dengan penambahan sebesar *x*, dan akhirnya disetarakan dengan bilangan dalam mod 1 sehingga *T* memetakan semua titik dalam bujur sangkar *S* kembali ke *S*.



Gambar 1. Posisi Kucing Arnold Pertama.

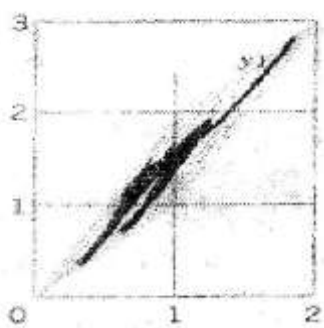
Sebagai ilustrasi, akan dibahas efek Pemetaan Kucing Arnold pada bujur sangkar yang berisi gambar kucing pada Gambar 1. Dapat dibuktikan bahwa kedua proses penyetaraan, yaitu penghitungan mod 1 yang dikerjakan langsung setelah pemekaran dan penghitungan mod 1 yang dikerjakan setelah kedua pemekaran selesai, akan memberikan hasil yang sama seperti yang diperlihatkan melalui ilustrasi gambar-gambar berikut. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

Langkah 1. Pemekaran pada arah *x* dengan penambahan sebesar *y*. Posisi Kucing Arnold setelah mengalami pemekaran pertama $(x,y)\to(x+y,y)$, dapat dilihat dalam Gambar 2. Dalam notasi matriks $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+y\\y\end{bmatrix}$.



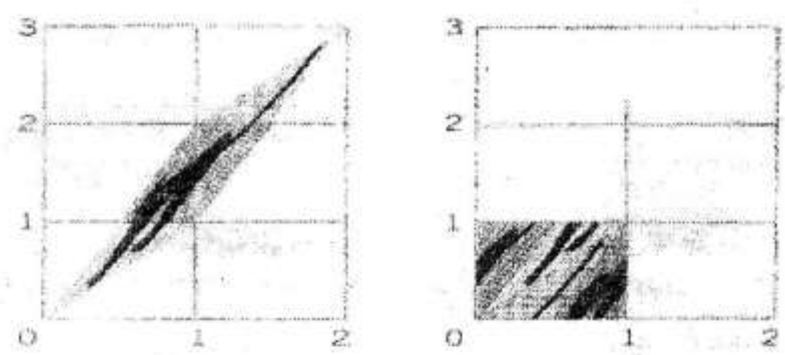
Gambar 2. Posisi Kucing Arnold Setelah
Mengalami Pemekaran Pertama, $(x,y)\to(x+y,y)$.

Langkah 2. Pemekaran pada arah *y* dengan penambahan sebesar *x*. Posisi Kucing Arnold setelah mengalami pemekaran kedua $(x,y)\to(x,x+y)$, dapat dilihat dalam Gambar 3. Dalam notasi matriks $\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\x+y\end{bmatrix}$.



Gambar 3. Posisi Kucing Arnold Setelah
Mengalami Pemekaran Kedua, $(x,y)\to(x,x+y)$.

Langkah 3. Hasil akhir disetarakan mod 1, dapat dilihat pada Gambar 4.



$(x, y) \to (x, x + y)$ $\qquad$ $(x, y) \to (x, y) \bmod 1$

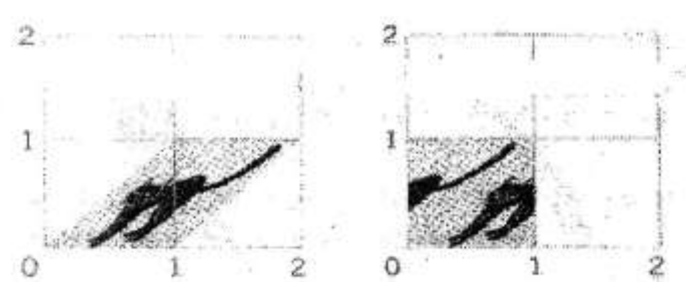
Gambar 4. Hasil Akhir Setelah Pemekaran yang Disetarakan mod 1.

Efek geometri dari perhitungan mod 1 adalah untuk memecahkan parallelogram (yang berwarna gelap) pada Gambar 3, dan menggabungkan semua potongan hasil pemecahan tersebut dalam bujur sangkar satuan $S = \{(x, y) \in R^2 \mid 0 \le x < 1, 0 \le y < 1\}$ pada Gambar 4.

Gambar-gambar tersebut memberikan ilustrasi pemetaan Arnold dengan mengerjakan kedua pemekaran terlebih dahulu dan akhiri dengan perhitungan mod 1. Untuk implementasi komputer, penghitungan-penghitungan modulo 1 pada tiap langkah pemekaran akan lebih efisien dibanding penghitungan–penghitungan pada bagian paling akhir setelah semua pemekarn selesai, walaupun secara teoritis kedua cara penghitungan tersebut memberi hasil yang sama.

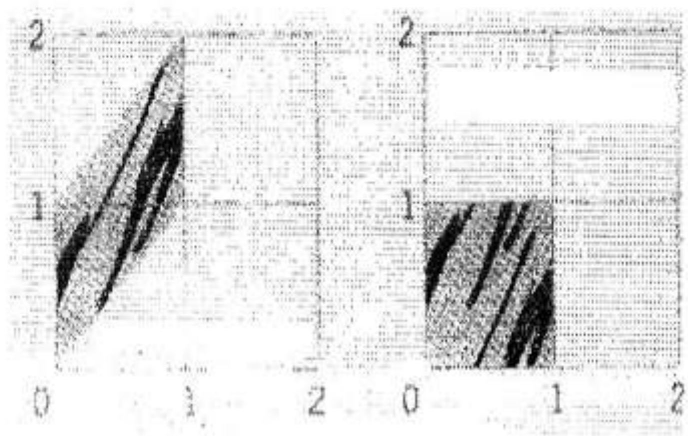
Fakta di atas disebabkan karena nilai bilangan pada komputer selalu terbatas (menghindari *overflow*) dan operasi penghitungan bilangan bulat yang kecil nilainya jauh lebih mudah dan efisien daripada bilangan-bilangan bulat yang besar. Illustrasi hasil Pemetaan Kucing Arnold apabila penghitungan modulus 1 dilakukan langsung setelah pemekaran adalah sebagai berikut.

Langkah 1. Pemekaran pada arah *x* dengan penambahan sebesar *y*, kemudian disetarakan dengan mod 1, ditunjukkan pada Gambar 5.



Gambar 5. Posisi Kucing Arnold Setelah
Pemekaran Pertama dan Disetarakan mod 1, $(x, y) \to (x + y, y) \bmod 1$.

Langkah 2. Pemekaran pada arah *y* dengan penambahan sebesar *x*, kemudian disetarakan dengan mod 1, ditunjukkan pada Gambar 6.



Gambar 6. Posisi Kucing Arnold Setelah Pemekaran Kedua dan Disetarakan mod 1, $(x, y) \to (x, x+y) \bmod 1$.

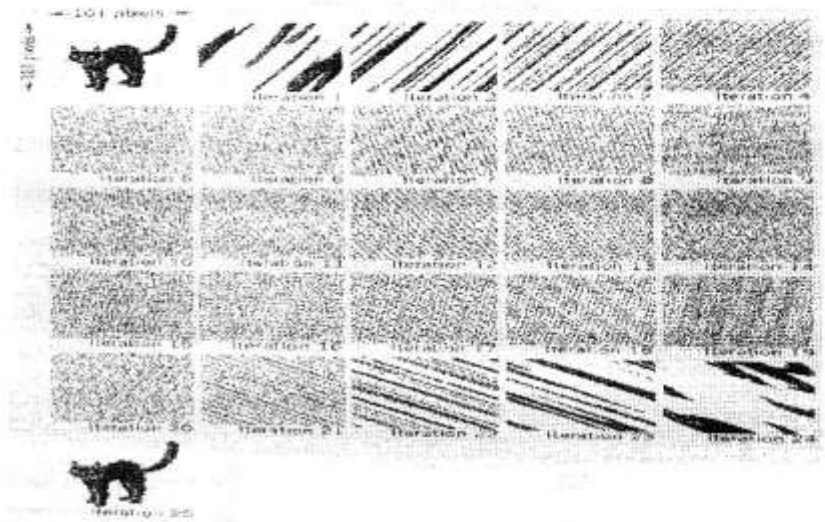
Dalam tulisan ini, Pemetaan Kucing Arnold terhadap sebuah gambar akan berkali-kali dilakukan, dan pada umumnya setiap pemetaan memberikan hasil berupa gambar yang tampaknya tak beraturan (gambar yang *chaotic*). Untuk sembarang bilangan bulat tak negatif k terdapat $a_k, b_k, c_k, d_k \in Z_p$ sedemikian rupa sehingga

$$A^k \bmod p = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^k \bmod p = \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{bmatrix}.$$

Jika $\begin{bmatrix} \frac{x(k)}{p} \\ \frac{y(k)}{p} \end{bmatrix}$ adalah titik pixel hasil iterasi ke k terhadap titik pixel awal $\begin{bmatrix} \frac{x(0)}{p} \\ \frac{y(0)}{p} \end{bmatrix}$ maka diperoleh kesamaan matriks $\begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} \ mod\ p.$

3. Titik Pixel

Pemetaan yang bersifat chaotic seperti Pemetaan Kucing Arnold biasanya muncul dalam model fisik dimana suatu operasi yang sama dikerjakan secara berulang-ulang.



Gambar 7. Hasil-hasil Pemekaran Setelah Mengalami 25 Kali Iterasi.

Gambar 7 yang dibuat dalam komputer memperlihatkan efek 25 iterasi. Pemetaan Kucing Arnold pada unit bujur sangkar *S*. Secara umum, jika terdapat *p* pixel persisinya (baris atau kolom), maka dalam bujursangkar satuan tersebut terdapat p^2 titik pixel yang secara seragam, dua pixel yang berdampingan berjarak $\frac{1}{p}$ satuan ke arah *x* maupun *y*. Jadi titik pixel dalam bujur sangkar satuan memiliki bentuk koordinat $\left(\frac{m}{p}, \frac{n}{p}\right)$, dengan *m* dan *n* adalah bilangan bulat antara 0 sampai *p*–1. Pemetaan Kucing Arnold membawa titik pixel pada bujur sangkar satuan *S* ke titik pixel yang lain dalam *S*. Maka, dengan bentuk koordinat $\left(\frac{m}{p}, \frac{n}{p}\right)$ terbentuklah matriks seperti berikut

$$T\begin{bmatrix} \frac{m}{p} \\ \frac{n}{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{m}{p} \\ \frac{n}{p} \end{bmatrix} \bmod 1 = \begin{bmatrix} \frac{m+n}{p} \\ \frac{m+2n}{p} \end{bmatrix} \bmod 1.$$

Jadi hasil pemetaan di atas yaitu pasangan terurut $\left(\frac{m+n}{p}, \frac{m+2n}{p}\right) \bmod 1$ juga berbentuk $\left(\frac{m'}{p}, \frac{n'}{p}\right)$ dengan *m'* dan *n'* berada pada range 0,1,2,…,*p*-1.

4. Simulasi Grafik Logo UNHAS

Pada bagian ini akan diillustrasikan efek pemetaan kucing Arnold pada Logo UNHAS (lihat Gambar 8), yang digambarkan pada bujur sangkar yang berisi logo UNHAS dengan pixel sebanyak 200 per sisi. Titik pixel berbentuk $\left(\frac{m}{200},\frac{n}{200}\right)$, dengan persamaan

$$T\begin{bmatrix}\frac{m}{p}\\ \frac{n}{p}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{m}{p}\\ \frac{n}{p}\end{bmatrix}\operatorname{mod}1=\begin{bmatrix}\frac{m+n}{p}\\ \frac{m+2n}{p}\end{bmatrix}\operatorname{mod}1,$$

menjadi

$$T\begin{bmatrix}\frac{m}{200}\\ \frac{n}{200}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{m}{200}\\ \frac{n}{200}\end{bmatrix}\operatorname{mod}1=\begin{bmatrix}\frac{m+n}{200}\\ \frac{m+2n}{200}\end{bmatrix}\operatorname{mod}1.$$

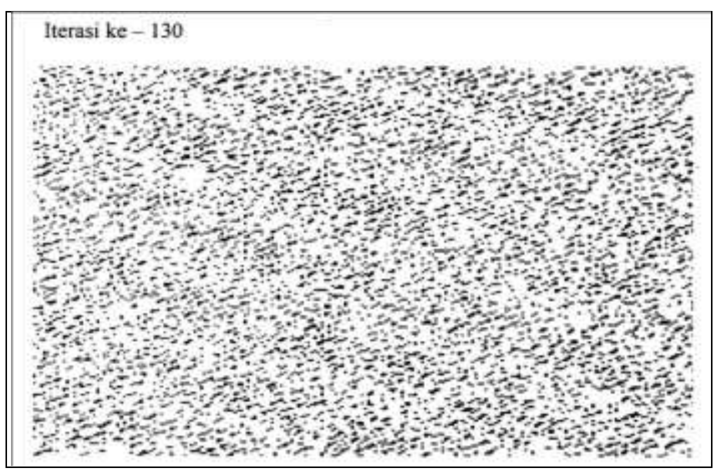
Jadi terdapat 40.000 pixel yang didapatkan dari rumus p^2 dimana p = 200.

Gambar 8. Gambar Logo UNHAS.

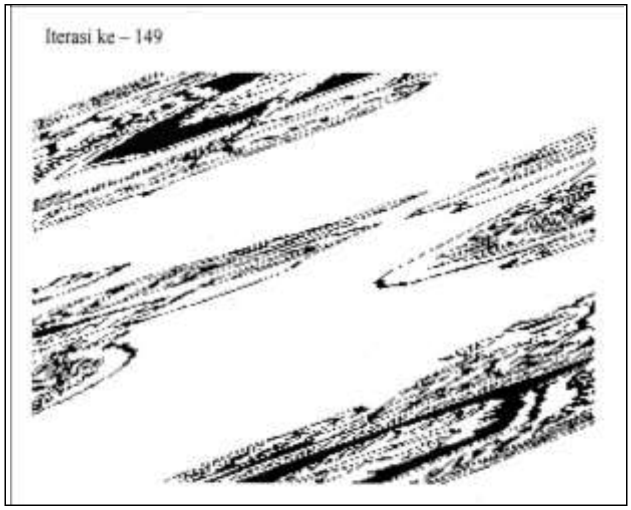
Jadi perhitungan untuk gambar–gambar berikut memperlihatkan perubahan-perubahan akibat iterasi yang dilakukan pada logo UNHAS ini.

Gambar 9. Hasil Iterasi ke 4.

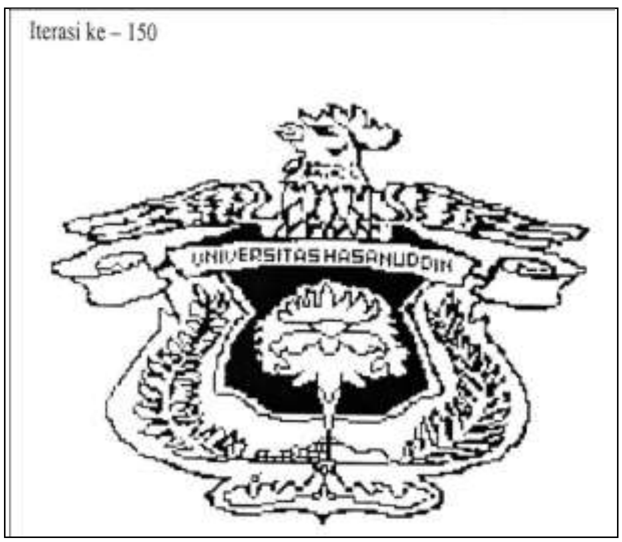
Gambar 10. Hasil Iterasi ke 75.



Gambar 11. Hasil Iterasi ke 130.



Gambar 12. Hasil Iterasi ke 149.



Gambar 13. Hasil Iterasi ke 150.

5. Kesimpulan

Pemetaan Kucing Arnold adalah transformasi, $T : S \rightarrow S$ dengan $S = \{(x, y) | 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$ dan $T(x, y) = (x + y, x + 2y) \bmod 1$. Jika (*x*,*y*) adalah titik pixel maka untuk suatu bilangan asli *n*, $T^{n}(x, y) = (x, y)$ tetapi $T(x, y) \neq (x, y), T^{2}(x, y) = (x, y), \ldots, T^{n-1} = (x, y)$. Dalam hal ini, *n* disebut perioda dari titik pixel (*x*,*y*). Secara umum, bujur sangkar *S* terdiri atas *p* titik pixel yang sebaris dan *p* titik pixel yang sekolom dan setelah melalui beberapa kali iterasi akhirnya kembali ke bentuk semula untuk pertama kalinya.

5.2. Saran

Penelitian ini dapat dikembangkan untuk jumlah *p* yang lebih banyak agar lebih akurat dan dikembangkan untuk matriks yang berbeda

Daftar Pustaka

Anton, H. dan Rorres, C., 1994. *Elementary Linier Algebra: Application Version*, *Seventh Edition*. Jhon Wiley & Sons Inc., New York.

Cullen, C.G. dan Sumantri, B., 1992. *Aljabar Linear dengan Penerapannya*, *Cetakan Pertama*. Jakarta.

Ivan dan Zuckerman, H.S., 1962. *An Introduction to The Theory of Numbers*, *Second Edition.* New York, London.

Nalwan, A., 1996. *Pemrograman Animasi dan Game Profesional 1*. Elex Media Komputindo, Jakarta.

Setiawan, S., 1991. *Chaos*, *Edisi Pertama*. Andi Offset, Yogyakarta.