

# Penggunaan Bilangan Fuzzy Segitiga pada Perbandingan Kemampuan Proses

Muhammad Abdy \*

## Abstrak

Kebanyakan metode-metode untuk menilai kemampuan proses manufaktur menggunakan bilangan biasa. Dalam tulisan ini dibahas metode untuk menilai kemampuan proses (Perbandingan Kemampuan Proses) dengan menggunakan bilangan fuzzy yang mempunyai fungsi keanggotaan berbentuk segitiga. Perbandingan Kemampuan Proses (PKP) tersebut diperlukan apabila batas spesifikasi yang diberikan adalah fuzzy. Beberapa hubungan di antara PKP fuzzy tersebut juga akan diberikan.

**Kata Kunci:** Bilangan Fuzzy, PKP klasik, PKP Fuzzy.

## 1. Pendahuluan

Grafik pengendali akan memberikan banyak informasi mengenai kemampuan penampilan proses. Suatu proses disebut kapabel jika karakteristik kualitas yang bernilai riil dari produk berada diantara batas spesifikasi bawah dan batas spesifikasi atas dari grafik pengendali. Suatu statistik yang biasa digunakan untuk menyatakan kemampuan proses adalah melalui *perbandingan kemampuan proses* (PKP). PKP ini membandingkan output suatu proses terhadap batas spesifikasi. Terdapat beberapa PKP yang telah diperkenalkan oleh para statistikawan untuk mengestimasi kemampuan proses suatu manufaktur, diantaranya adalah  $C_p$ ,  $C_{pk}$ ,  $C_{pm}$  dan sebagainya. PKP tersebut akan disebut sebagai PKP klasik dalam tulisan ini untuk membedakannya dengan PKP fuzzy.

Sejak diperkenalkannya teori himpunan fuzzy oleh L. A. Zadeh pada 1965, telah banyak artikel/paper yang membahas penggunaan teori fuzzy dalam bidang statistik dan probability. Di antaranya adalah regresi fuzzy, hipotesis fuzzy, variabel acak fuzzy, dan sebagainya (Taheri, 2003). Demikian juga dalam bidang pengendalian kualitas statistik, Youngtin (1996) memperkenalkan batas spesifikasi sebagai suatu bilangan fuzzy, dan Jorg Hoppner & Hans Wolf (1995) mengkonstruksi suatu bagan kendali Shewhart-Fuzzy. Dalam tulisan ini dibahas batas spesifikasi dan PKP yang berbentuk bilangan fuzzy segitiga.

## 2. Bilangan Fuzzy

Di antara berbagai jenis himpunan fuzzy, maka himpunan fuzzy yang didefinisikan pada himpunan bilangan riil  $R$  mempunyai arti yang khusus. Himpunan kabur yang demikian mempunyai makna kuantitatif dan disebut sebagai bilangan fuzzy. Bilangan fuzzy merupakan suatu bilangan yang tidak persis (*imprecise*) dalam garis riil  $\mathcal{R}$ , misalnya "kira-kira 10", "sekitar 20", dan sebagainya.

---

\* Jurusan Matematika FMIPA Universitas Negeri Makassar, Makassar

**Definisi 1.**

Misalkan  $\tilde{A}$  adalah suatu himpunan fuzzy yang didefinisikan pada bilangan riil  $\mathcal{R}$ . Maka  $\tilde{A}$  merupakan suatu bilangan fuzzy jika memenuhi sifat berikut:

- (i).  $\tilde{A}$  adalah himpunan fuzzy normal dan fuzzy konveks.
- (ii). Potongan- $\alpha$  dari  $\tilde{A}$  merupakan interval tertutup  $\forall \alpha \in [0, 1]$ .

Fungsi keanggotaan segitiga dan trapesium sering digunakan sebagai fungsi keanggotaan bilangan fuzzy. Akan tetapi, bentuk-bentuk fungsi keanggotaan yang lain dapat juga digunakan. Jika bilangan fuzzy  $\tilde{A}$  menggunakan fungsi keanggotaan segitiga, maka disebut bilangan fuzzy segitiga yang dinyatakan sebagai:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x; a, b, c) = \begin{cases} (x-a)/(b-a) & \text{jika } a \leq x < b \\ (c-x)/(c-b) & \text{jika } b \leq x \leq c. \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

Terdapat dua metode untuk melakukan operasi aritmetika pada bilangan kabur, yaitu metode potongan- $\alpha$  dan metode prinsip perluasan. Dengan metode potongan- $\alpha$ , operasi aritmetika pengurangan dan pembagian dengan bilangan riil diperoleh sebagai berikut.

Misalkan bilangan fuzzy segitiga  $\tilde{A}$  dan  $\tilde{B}$  mempunyai fungsi keanggotaan masing-masing adalah  $\mu_{\tilde{A}}(x; a, b, c)$  dan  $\mu_{\tilde{B}}(x; a', b', c')$  dimana  $k \in \mathcal{R}$ ,  $k > 0$  dan  $a \geq c'$ , maka

- (i).  $\tilde{A} - \tilde{B}$  mempunyai fungsi keanggotaan  $\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x; a-c', b-b', c-a')$ .
- (iii).  $\tilde{A}/k$  mempunyai fungsi keanggotaan  $\mu_{\tilde{A}/k}(x; a/k, b/k, c/k)$ .

**3. Kemampuan Proses (PKP) Klasik**

Perbandingan kemampuan proses (PKP) merupakan ukuran kemampuan proses untuk menghasilkan produk yang memenuhi spesifikasi ([7]). Beberapa PKP klasik telah diperkenalkan, diantaranya adalah:

$$C_p = \frac{A-B}{6\sigma} = \frac{l}{6\sigma} \quad (1)$$

dimana A = batas spesifikasi atas; B = batas spesifikasi atas;  $l = A - B$ ,

$$C_{pk} = \frac{l - 2|\mu - M|}{6\sigma} = \frac{\min[A - \mu, \mu - B]}{3\sigma} \quad (2)$$

dimana  $M = (B + A)/2$ ,

$$C_{pm} = \frac{l}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} = \frac{l}{6\sqrt{E[(X - T)^2]}} \quad (3)$$

dimana T adalah nilai target dan E(.) adalah nilai harapan,

$$C_{pmk} = \frac{l-2|\mu-M|}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu-T)^2}} = \frac{l-2|\mu-M|}{6\sqrt{E[(X-T)^2]}} \quad (19) \quad (4)$$

Dari keempat PKP di atas, maka akan terdapat hubungan sebagai berikut:

$$C_{pk} = C_p - \frac{1}{3} \left| \frac{\mu-M}{\sigma} \right|, \quad (5)$$

$$C_{pm} = \frac{C_p}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu-T}{\sigma}\right)^2}}, \quad (6)$$

$$C_{pmk} = \frac{C_{pk}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu-T}{\sigma}\right)^2}}, \quad (7)$$

atau

$$C_{pmk} = \frac{C_{pm} C_{pk}}{C_p}. \quad (8)$$

#### 4. Perbandingan Kemampuan Proses Fuzzy

Suatu PKP fuzzy akan memuat informasi lebih banyak dibandingkan dengan PKP yang menggunakan bilangan biasa. Pada bagian ini akan diberikan PKP fuzzy dengan menggunakan bilangan fuzzy segitiga seperti yang dibahas pada bagian 2. Batas spesifikasinya juga merupakan bilangan fuzzy segitiga. Diasumsikan juga bahwa proses yang diberikan adalah berdistribusi normal atau sekurang-kurangnya mendekati distribusi normal. Berikut ini diberikan beberapa definisi.

##### Definisi 2.

Misalkan suatu proses fuzzy dengan simpangan baku  $\sigma$ , batas spesifikasi atas dan bawah masing-masing adalah bilangan fuzzy  $\tilde{A}$  dengan fungsi keanggotaan  $\mu_{\tilde{A}}(x; a_a, b_a, c_a)$  dan bilangan fuzzy  $\tilde{B}$  dengan fungsi keanggotaan  $\mu_{\tilde{B}}(x; a_b, b_b, c_b)$ , dimana  $a_a \geq b_b$ , maka:

- Lebar diantara batas spesifikasi proses fuzzy adalah sebuah bilangan fuzzy segitiga yang didefinisikan sebagai  $\tilde{l}_{BS} = \tilde{A} - \tilde{B}$
- PKP fuzzy adalah sebuah bilangan fuzzy segitiga yang berbentuk  $\tilde{C}_p = \tilde{l}_{BS} : 6\sigma$  dengan fungsi keanggotaan  $\mu_{\tilde{C}}(x; \frac{a_a-c_b}{6\sigma}, \frac{b_a-b_b}{6\sigma}, \frac{c_a-a_b}{6\sigma})$  (9)

##### Contoh.

Misalkan suatu batas spesifikasi atas dan bawah suatu produk masing-masing adalah "kira-kira 5" dan "kira-kira 10" dengan fungsi keanggotaan masing-masing adalah  $\mu_{\tilde{A}}(x; 9, 10, 11)$  dan

$\mu_{\tilde{B}}(x; 3, 5, 7)$ . Andaikan bahwa rata-rata proses  $\mu = 7,5$  dan simpangan baku proses  $\sigma = 2/3$ , maka akan diperoleh lebar diantara batas spesifikasi proses sebagai bilangan kabur  $\tilde{l}_{BS}$  dengan fungsi keanggotaan  $\mu_{\tilde{l}_{BS}}(x; 2, 5, 9)$  atau  $\tilde{l}_{BS} = \text{"kira-kira 5"}$  dan PKP fuzzy dari proses tersebut adalah bilangan fuzzy  $\tilde{C}_p$  dengan fungsi keanggotaan  $\mu_{\tilde{C}_p}(x; \frac{2}{4}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4})$  atau  $\tilde{C}_p = \text{"kira-kira } 5/4\text{"}$ .

### Definisi 3.

Misalkan  $\tilde{A}$  dan  $\tilde{B}$  dengan fungsi keanggotaan seperti dalam Definisi 4.1 masing-masing adalah batas spesifikasi atas dan bawah suatu proses, maka berdasarkan definisi 4.1. dan persamaan (2) – (4), diperoleh

$\tilde{C}_{pk}$  dengan fungsi keanggotaan:

$$\mu \left( x; \frac{a_a - c_b - 2|\mu - m|}{6\sigma}, \frac{b_a - b_b - 2|\mu - m|}{6\sigma}, \frac{c_a - a_b - 2|\mu - m|}{6\sigma} \right), \quad (10)$$

$\tilde{C}_{pm}$  dengan fungsi keanggotaan:

$$\mu \left( x; \frac{a_a - c_b}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - t)^2}}, \frac{b_a - b_b}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - t)^2}}, \frac{c_a - a_b}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - t)^2}} \right), \quad (11)$$

$\tilde{C}_{pmk}$  dengan fungsi keanggotaan:

$$\mu \left( x; \frac{a_a - c_b - 2|\mu - m|}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - t)^2}}, \frac{b_a - b_b - 2|\mu - m|}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - t)^2}}, \frac{c_a - a_b - 2|\mu - m|}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - t)^2}} \right), \quad (12)$$

dengan  $m = (b_a + b_b)/2$  dan  $t$  nilai target.

Apabila nilai batas spesifikasi atas dan bawah diubah menjadi bilangan biasa, yaitu jika  $a_a = b_a = c_a$  dan  $a_b = b_b = c_b$  maka PKP fuzzy tersebut akan sama dengan PKP klasik.

Seperti pada PKP klasik yang dapat dikaitkan satu sama lain, maka demikian juga pada PKP fuzzy yang dapat dikaitkan melalui teorema berikut.

### Teorema 1.

Dalam sebuah proses fuzzy, hubungan diantara PKP fuzzy pada (9) – (12) adalah:

$$\tilde{C}_{pk}(x) = \tilde{C}_p(x + |\mu - m|/3\sigma), \quad (13)$$

$$\tilde{C}_{pm}(x) = \tilde{C}_p \left( x \sqrt{1 + (\mu - t)^2 / \sigma^2} \right), \quad (14)$$

$$\tilde{C}_{pmk}(x) = \tilde{C}_{pk} \left( x \sqrt{1 + (\mu - t)^2 / \sigma^2} \right). \quad (15)$$

**Bukti:**

Misalkan  $k = |\mu - m|/3\sigma$ , maka dengan beberapa manipulasi aljabar, akan dapat diperoleh bahwa

$$\tilde{C}_p(x+k) = \begin{cases} \frac{c_b - a_a + 6\sigma(x+k)}{b_a + c_b - b_b - a_a} & \text{jika } (a_a - c_b)/6\sigma \leq x+k < (b_a - b_b)/6\sigma \\ \frac{c_a - a_b + 6\sigma(x+k)}{c_a + b_b - a_b - b_a} & \text{jika } (b_a - b_b)/6\sigma \leq x+k < (c_a - a_b)/6\sigma, \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

dan

$$\tilde{C}_{pk}(x) = \begin{cases} \frac{c_b - a_a + 6\sigma(x+k)}{b_a + c_b - b_b - a_a} & \text{jika } (a_a - c_b)/6\sigma - k \leq x < (b_a - b_b)/6\sigma - k \\ \frac{c_a - a_b + 6\sigma(x+k)}{c_a + b_b - a_b - b_a} & \text{jika } (b_a - b_b)/6\sigma - k \leq x < (c_a - a_b)/6\sigma - k, \\ 0 & \text{yang lain} \end{cases}$$

sehingga (13) terbukti. Dengan cara perhitungan yang serupa, (14) dan (15) dapat dibuktikan. ■

## 5. Kesimpulan dan Saran

Nilai PKP fuzzy akan sama dengan nilai PKP klasik apabila batas spesifikasi dari proses merupakan bilangan non-fuzzy. PKP fuzzy akan lebih fleksibel dalam memberikan ukuran kemampuan proses karena akan dapat menyesuaikan diri terhadap lingkungan dari proses. Penggunaan bilangan fuzzy segitiga memberikan perhitungan yang sederhana dan simpel karena sifat dari fungsi keanggotaannya yang berbentuk linear. Penggunaan bilangan fuzzy dengan fungsi keanggotaan bukan segitiga kemungkinan dapat juga dikaji.

## Daftar Pustaka

- [1] Abdy, M., 2008, *Dasar-Dasar Teori Himpunan Kabur dan Logika Kabur*, Badan Penerbit UNM, Makassar.
- [2] Hsiang, T.C., Taguchi, G., 1985, Tutorial on Quality Control and Assurance – The Taghuci Method, *Joint Meeting of American Statistical Association*.
- [3] Jorg Hoppner & Hans Wolf, 1995, The Design of Fuzzy Shewhart Control Chart, *Technical Report, Abteilung Stochastik, Universitat Ulm, Germany*.
- [4] Juran, J. M., 1974, *Juran's Quality Control Handbook*, (3<sup>rd</sup> ed), McGraw-Hill, New York.
- [5] Kane, V. E., 1986, Process Capability Indices, *Journal of Quality Technology*, 18, 41- 52.
- [6] Kotz, S., 1993, *Process Capability Indices*, Chapman and Hill, New York.

- [7] Montgomery, D. C, 2001, *Introduction to Statistical Quality Control*, John Wiley, New York.
- [8] Parchami *et al.*, 2006, Process Capability Indices as Fuzzy Number, *Australian Journal of Statistics*, 34, 301-321.
- [9] Pearn *et al.*, 1992, Distribution and Inferential Properties of Capability Indices, *Journal of Quality Technology*, 24, 41-52.
- [10] Taheri, S. M, 2003, Trends in Fuzzy Statistics, *Austrian Journal of Statistics*, 32, 239-257.
- [11] Youngtin, C, 1996, Fuzzy Quality and Analysis on Fuzzy Probability, *Fuzzy Set and System*, 83, 283-290.