JURNAL MATEMATIKA, STATISTIKA DAN KOMPUTASI e–ISSN: 2614–8811
Published by Departement of Mathematics, Hasanuddin University, Indonesia
https://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk/index
Vol. 21, No. 1, September 2024, pp. 267-284
DOI: 10.20956/j.v21i1.35860

Fractional Derivative of Hyperbolic Function

Turunan Fraksional dari Fungsi Hiperbolik

Syifaul Janan[1]*, Tuhfatul Janan[2]

[1*]*Program Studi Teknik Mesin, Universitas Pembangunan Nasional "Veteran" Jakarta*
[2]*Program Studi Tadris Matematika, Institut Ahmad Dahlan Probolinggo*
***Email**: [1*]syifauljanan82@gmail.com, [2]tuhfatuljanan4@gmail.com*

Abstract

Fractional derivative is a generalization of ordinary derivative with non-integer or fractional order. This research presented fractional derivative of hyperbolic function (hyperbolic sine, hyperbolic cosine, hyperbolic tangent, hyperbolic cotangent, hyperbolic secant, and hyperbolic cosecant) with order constraint $0 < \alpha \leq 1$. The hyperbolic function is presented in Maclaurin series form. Then, the fractional derivative can be determined by using definition of Riemann-Liouville fractional derivative. The result is simulated by using Matlab software.
Keywords: Maclaurin series, hyperbolic function, fractional derivative.

Abstrak

Turunan fraksional adalah generalisasi dari turunan biasa dengan orde *non-integer* atau pecahan. Penelitian ini menyajikan turunan fraksional dari fungsi hiperbolik (sinus hiperbolik, cosinus hiperbolik, tangen hiperbolik, cotangen hiperbolik, secan hiperbolik, dan cosecan hiperbolik) dengan batasan orde $0 < \alpha \leq 1$. Fungsi hiperbolik tersebut disajikan dalam bentuk deret Maclaurin. Selanjutnya, turunan fraksionalnya dapat ditentukan dengan menggunakan definisi turunan fraksional menurut Riemann-Liouville. Hasilnya disimulasikan dengan menggunakan *software* Matlab.
Kata kunci: deret Maclaurin, fungsi hiperbolik, turunan fraksional.

1. PENDAHULUAN

Turunan merupakan salah satu konsep fundamental dalam matematika. Turunan sering diterapkan dalam permasalahan di bidang fisika dan ekonomi, seperti kecepatan, percepatan, hukum kedua Newton, elastisitas, dan perhitungan biaya marginal. Pada tahun 1695, Leibniz dan L'Hospital menemukan turunan berorde setengah. Konsep ini dikembangkan lebih lanjut oleh Euler dan Liouville [7] yang memperkenalkan ide mengenai turunan dengan orde *non-integer*. Turunan ini dikenal sebagai turunan berorde fraksional atau turunan fraksional. Pada perkembangannya, banyak peneliti yang berkontibusi dalam pendefinisian turunan fraksional. Definisi yang paling umum digunakan adalah turunan fraksional Riemann-Liouville [4, 9], turunan fraksional Caputo [9], turunan fraksional Grunwald-Letnikov [9] dan modifikasi turunan fraksional Jumarie [2]. Namun, gagasan tentang turunan fraksional Riemann-Liouville lebih banyak digunakan terutama pada orde α $(n-1<\alpha\leq n, n\in\mathbb{N})$ [6].

Riemann-Liouville mendefinisikan turunan fraksional dengan menggunakan turunan dari integral hasil kali suatu fungsi dengan variabel $(t-s)^{-\alpha}$, sehingga biasanya sulit dicari solusinya secara analitik. Salah satu metode untuk menyelesaikan masalah ini adalah dengan merepresentasikan fungsi sebagai deret kuasa. Metode yang digunakan dalam menyajikan fungsi dalam bentuk deret kuasa adalah metode deret Maclaurin. Penelitian dari [1] menjelaskan bahwa deret Maclaurin dapat digunakan dalam memecahkan masalah persamaan differensial fraksional linear dan nonlinear, serta menyajikan solusi dari berbagai macam masalah turunan fraksional. Penelitian lain dari Zhang [12] membahas ekspansi deret Maclaurin dari fungsi sinus dan cosinus.

Penelitian ini mengkaji penggunaan metode deret Maclaurin dalam masalah turunan fraksional dari suatu fungsi dengan orde $0<\alpha\leq 1$. Metode ini mensyaratkan fungsi dapat diturunkan sampai tak berhingga kali [10]. Salah satu fungsi yang bersifat demikian adalah fungsi hiperbolik. Fungsi hiperbolik meliputi sinus hiperbolik, cosinus hiperbolik, tangen hiperbolik, cotangen hiperbolik, secan hiperbolik, dan cosecan hiperbolik. Fungsi tersebut direpresentasikan dalam bentuk turunan fraksional dengan bantuan deret Maclaurin.

Penelitian ini juga menyajikan solusi turunan fraksional dalam bentuk grafik, yaitu berupa hasil simulasi visual dengan bantuan *software* matematika Matlab. Matlab adalah sebuah bahasa pemrograman tingkat tinggi yang secara khusus digunakan untuk komputasi numerik, pemrograman, dan visualisasi. Matlab merupakan singkatan dari Matriks Laboratorium yang berkembang pada tahun 1970an dan sering digunakan dalam bidang matematika, sains, dan teknik [5].

2. TINJAUAN PUSTAKA

Akan dijelaskan beberapa definisi dan teorema mengenai deret kuasa, fungsi gamma, dan turunan fraksional.

2.1 Deret Kuasa

Teorema 2.1 [10]
Jika f merupakan representasi (ekspansi) dari deret kuasa, dengan

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n \text{, dan } |x-a|<R$$

maka koefisien yang diberikan adalah

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Substitusi rumus c_n kembali ke dalam deret, dapat dilihat bahwa f adalah suatu deret kuasa yang diekspansikan di sekitar $x=a$.

Representasi f dalam bentuk deret kuasa adalah

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

disebut deret Taylor dari fungsi f di sekitar $x = a$.

Khususnya untuk $a = 0$, deret tersebut menjadi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$
$$= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \cdots$$

yang kemudian disebut deret Maclaurin.

Teorema 2.2 [10]
Jika $\sum a_n$ dan $\sum b_n$ adalah deret konvergen, maka berlaku

i. $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, dengan c konstanta

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

iii. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Selanjutnya, akan dijelaskan representasi deret Maclaurin dari fungsi sinus hiperbolik dan fungsi cosinus hiperbolik.

Fungsi sinus hiperbolik dapat ditulis:

$$f(t) = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

Representasi $f(t) = \sinh t$ dalam bentuk deret Maclaurin adalah

$$\sinh t = t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \frac{t^7}{7!} + \cdots$$

Akibatnya untuk setiap $t \in \mathbb{R}$, berlaku

$$\sinh t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1}. \qquad (2.1)$$

Fungsi cosinus hiperbolik dapat ditulis:

$$f(t) = \cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

Representasi $f(t) = \cosh t$ dalam bentuk deret Maclaurin adalah

$$\cosh t = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} + \cdots$$

Akibatnya untuk setiap $t \in \mathbb{R}$, berlaku

$$\cosh t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n}. \tag{2.2}$$

Teorema 2.3 [10]
Diberikan deret kuasa

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

hanya ada tiga kemungkinan:

i. Deret konvergen saat $x = a$
ii. Deret konvergen untuk setiap x
iii. Terdapat bilangan positif R sedemikian hingga deret tersebut konvergen jika $|x-a| < R$ dan divergen jika $|x-a| > R$, dengan $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$.

Representasi pada persamaan (2.1) dan (2.2) berbentuk deret Maclaurin, sehingga dapat dicari selang konvergensinya dengan menggunakan metode pada **Teorema 2.3**.

Selanjutnya, akan ditentukan selang konvergensi untuk fungsi $\sinh t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1}$. Untuk setiap bilangan asli n, misalkan $c_n = \frac{1}{(2n+1)!}$, maka deret $\sinh t$ konvergen untuk setiap t dengan

$$\begin{aligned} |t| &< \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(2n+1)!}}{\frac{1}{(2n+3)!}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+3)!}{(2n+1)!} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} |(2n+3)(2n+2)| \\ &= \infty \end{aligned}$$

Selang konvergensi deret tersebut adalah $(-\infty, \infty)$ atau deret tersebut konvergen untuk setiap bilangan real.

Selanjutnya, akan ditentukan selang konvergensi untuk fungsi $\cosh t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n}$. Untuk setiap bilangan asli n, misalkan $c_n = \frac{1}{(2n)!}$, maka deret $\cosh t$ konvergen untuk setiap t dengan

$$\begin{aligned} |t| &< \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{(2n)!}}{\frac{1}{(2n+2)!}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} |(2n+2)(2n+1)| \\ &= \infty \end{aligned}$$

Selang konvergensi deret tersebut adalah $(-\infty, \infty)$ atau deret tersebut konvergen untuk setiap bilangan real.

Teorema 2.4 [10]
Misalkan deret kuasa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dengan jari-jari kekonvergenan $R > 0$ dan fungsi f didefinisikan sebagai:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

adalah terdifferensial dan kontinu di semua titik pada selang $(a - R, a + R)$ dan

i. $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{d}{dx} a_n x^n$

ii. $\int f\, dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n x^n\, dx$

pernyataan i dan ii tidak mengubah jari-jari kekonvergenan di R.

2.2 Fungsi Gamma dan Beta

Definisi 2.5 [13]
Fungsi gamma $\Gamma(z)$ didefinisikan sebagai

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt \quad (\Re e(z) > 0),$$

dengan $t^{z-1} = e^{(z-1)\log(t)}$. Integral ini konvergen untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ $(\Re e(z) > 0)$.
Rumus di atas dapat direduksi menjadi

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\Re e(z) > 0)$$

Secara khusus, jika $z = n \in \mathbb{N}_0$, berlaku

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

dengan $0! = 1$.

Definisi 2.6 [11]
Fungsi beta $\beta(x, y)$ didefinisikan sebagai

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt, \qquad \Re e(x) > 0, \Re e(y) > 0$$

Hubungan antara fungsi gamma dan beta diberikan sebagai berikut:

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

2.3 Turunan Fraksional

Definisi 2.7 [3]
Misalkan $n - 1 \leq \alpha < n \in \mathbb{Z}^+$, turunan fraksional Riemann-Liouville orde α dari fungsi $f(t)$ didefinisikan sebagai

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds$$

dengan $\Gamma(\alpha)$ adalah fungsi gamma.

Sifat-sifat dari turunan fraksional adalah [8]:
1. Untuk $\alpha = 0$, operasi $D^{\alpha} f(t)$ adalah operator identitas:

$$D^0 f(t) = f(t)$$

2. Turunan fraksional merupakan operator linear:
$$D^\alpha(\lambda f(t) + ug(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \mathrm{u} D^\alpha g(t)$$

Teorema 2.8 [3]
Turunan fraksional dari fungsi kuasa $f(t) = t^p$, dengan $p \geq 0$ memenuhi:
$$D^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha}$$

3. METODOLOGI PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan studi literatur. Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Membuktikan teorema turunan fraksional dari fungsi kuasa dan menentukan turunan fraksional dari suatu konstanta.
2. Menentukan turunan fraksional dari fungsi sinus hiperbolik dan cosinus hiperbolik melalui representasi dari deret Maclaurin, mencari selang konvergensinya, serta membuat simulasi dan interpretasinya dengan menggunakan *software* Matlab.
3. Menentukan turunan fraksional dari fungsi tangen hiperbolik, cotangen hiperbolik, secan hiperbolik, cosecan hiperbolik melalui pembagian antar deret Maclaurin, serta membuat simulasi dan interpretasinya dengan menggunakan *software* Matlab.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada penelitian [1] disajikan metode deret Maclaurin, yang secara khusus digunakan sebagai solusi dalam permasalahan persamaan differensial fraksional. Namun, pada penelitian ini metode deret Maclaurin digunakan untuk merepresentasikan turunan fraksional dari fungsi hiperbolik. Disebutkan bahwa pada penelitian [12] membahas mengenai ekspansi deret Maclaurin dari fungsi sinus dan cosinus. Namun, pada penelitian ini akan disajikan ekspansi deret Maclaurin dari fungsi hiperbolik.

4.1 Pembuktian Teorema Turunan Fraksional

Pada penelitian [3] **Teorema 2.8** tidak disajikan bukti, sehingga perlu dibuktikan terlebih dahulu menggunakan definisi turunan fraksional Riemann-Liouville pada **Definisi 2.7**. Selain itu, akan dicari juga turunan fraksional dari suatu konstanta. Kedua turunan fraksional ini nantinya akan digunakan pada perhitungan turunan fraksional dari fungsi hiperbolik di pembahasan selanjutnya.

a. Membuktikan bahwa $f(t) = t^p \rightarrow D^\alpha f(t) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha}$.

Berdasarkan **Definisi 2.7**, kita tulis
$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds$$
$$D^\alpha t^p = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{s^p}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds$$

Misalkan $s = tu, 0 \leq u \leq 1$ dan $ds = t\,du$, diperoleh
$$D^\alpha t^p = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^1 \frac{(tu)^p}{(t-tu)^{\alpha-n+1}} t\,du$$
$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^1 t^{p+1} u^p \big(t(1-u)\big)^{n-\alpha-1} du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^1 t^{p+1} t^{n-\alpha-1} u^p (1-u)^{n-\alpha-1}\, du$$
$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} t^{p+n-\alpha} \int_0^1 u^p (1-u)^{n-\alpha-1}\, du$$

Berdasarkan **Definisi 2.6**, kita tulis

$$D^\alpha t^m = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} t^{p+n-\alpha} \beta(p+1, n-\alpha)$$
$$= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} t^{p+n-\alpha} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(p+n-\alpha+1)}$$
$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+n-\alpha+1)} \frac{d^n}{dt^n} t^{p+n-\alpha}$$
$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+n-\alpha+1)} \frac{\Gamma(p+n-\alpha+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha}$$
$$= \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha}$$

Terbukti bahwa

$$D^\alpha t^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} t^{p-\alpha}, \qquad p \geq 0$$

Selanjutnya, akan ditentukan turunan fraksional dari suatu konstanta C.

b. Menentukan turunan fraksional dari suatu konstanta C.

Berdasarkan **Definisi 2.7**, kita tulis

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}\, ds$$
$$D^\alpha C = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{C}{(t-s)^{\alpha-n+1}}\, ds$$

Misalkan $s = tu, 0 \leq u \leq 1$ dan $ds = t\, du$, diperoleh

$$D^\alpha C = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^1 \frac{C}{(t-tu)^{\alpha-n+1}}\, t\, du$$
$$= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^1 (t-tu)^{n-\alpha-1}\, t\, du$$
$$= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^1 t^{n-\alpha-1} (1-u)^{n-\alpha-1}\, t\, du$$
$$= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} t^{n-\alpha} \int_0^1 (1-u)^{n-\alpha-1}\, du$$

Berdasarkan **Definisi 2.6**, kita tulis

$$D^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} t^{n-\alpha} \beta(1, n-\alpha)$$
$$= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} t^{n-\alpha} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(n-\alpha+1)}$$

$$= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha+1)} \frac{d^n}{dt^n} t^{n-\alpha}$$
$$= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha+1)} \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}$$
$$= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}$$

sehingga

$$D^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}$$

Diperoleh bahwa turunan fraksional dari suatu konstanta tidak bernilai nol (dari definisi Riemann-Liouville). Hasil pembuktian dan perhitungan di atas akan digunakan pada pembahasan berikut ini.

4.2 Turunan Fraksional dari Fungsi Sinus Hiperbolik dan Cosinus Hiperbolik

Turunan fraksional dari fungsi sinus hiperbolik dan cosinus hiperbolik ditentukan melalui representasi dari deret Maclaurinnya.

a. Turunan Fraksional dari Fungsi Sinus Hiperbolik

Persamaan (2.1) merupakan representasi $f(t) = \sinh t$ dalam bentuk deret Maclaurin, sehingga bisa kita tulis

$$D^\alpha \sinh t = D^\alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1} \right)$$

Berdasarkan **Teorema 2.4**, maka

$$D^\alpha \sinh t = \sum_{n=0}^{\infty} \left(D^\alpha \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1} \right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(D^\alpha t^{2n+1} \right)$$

Gunakan **Teorema 2.8**, diperoleh

$$D^\alpha \sinh t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\Gamma(2n+2) t^{2n+1-\alpha}}{\Gamma(2n+2-\alpha)} \right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1-\alpha}\,\Gamma(2n+2)}{(2n+1)!\,\Gamma(2n+2-\alpha)} \tag{4.1}$$

Selanjutnya, untuk setiap bilangan asli n, misalkan

$$c_n = \frac{\Gamma(2n+2)}{(2n+1)!\,\Gamma(2n+2-\alpha)}$$

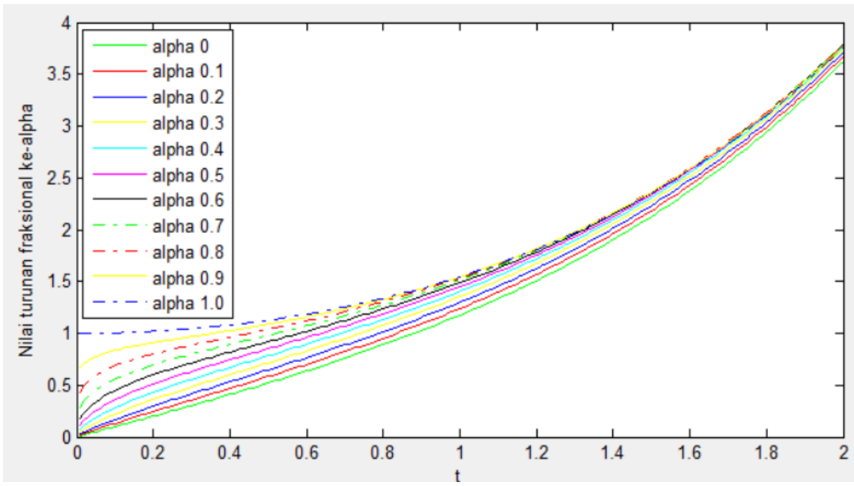
Dengan menggunakan **Teorema 2.3**, deret (4.1) konvergen untuk setiap t dengan

$$|t| < \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{\Gamma(2n+2)}{(2n+1)!\,\Gamma(2n+2-\alpha)}}{\frac{\Gamma(2n+4)}{(2n+3)!\,\Gamma(2n+4-\alpha)}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\Gamma(2n+2)}{(2n+1)!\,\Gamma(2n+2-\alpha)} \times \frac{(2n+3)!\,\Gamma(2n+4-\alpha)}{\Gamma(2n+4)} \right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} |(2n+3-\alpha)(2n+2-\alpha)|$$
$$= \infty$$

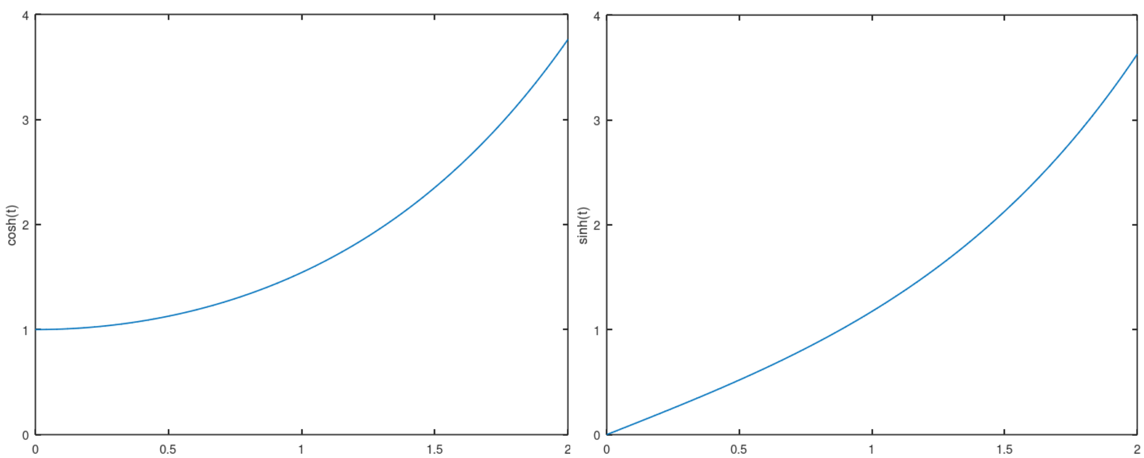
Selang konvergensinya adalah $(-\infty, \infty)$ atau deret tersebut konvergen untuk setiap bilangan real.

Hasil simulasi menggunakan *software* Matlab:



Gambar 1. Grafik $f(t) = D^{\alpha} \sinh t$

Diperoleh bahwa jika α mendekati 1, maka grafik mendekati turunan pertama dari fungsi sinus hiperbolik yaitu $f(t) = D^1 \sinh t = \cosh t$, sedangkan jika α mendekati 0, maka grafik mendekati fungsi semula yaitu $f(t) = D^0 \sinh t = \sinh t$. Ilustrasinya seperti pada gambar berikut:



Gambar 2. Grafik $f(t) = \cosh t$ dan $f(t) = \sinh t$ secara berturut-turut.

b. Turunan Fraksional dari Fungsi Cosinus Hiperbolik

Persamaan (2.2) merupakan representasi $f(t) = \cosh t$ dalam bentuk deret Maclaurin, sehingga bisa kita tulis

$$D^{\alpha} \cosh t = D^{\alpha}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n}\right)$$

Berdasarkan **Teorema 2.4**, maka

$$\begin{aligned} D^{\alpha} \cosh t &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(D^{\alpha} \frac{1}{(2n)!} t^{2n}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} (D^{\alpha} t^{2n}) \end{aligned}$$

Gunakan **Teorema 2.8**, diperoleh

$$\begin{aligned} D^{\alpha} \cosh t &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{\Gamma(2n+1) t^{2n-\alpha}}{\Gamma(2n+1-\alpha)}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n-\alpha}\, \Gamma(2n+1)}{(2n)!\, \Gamma(2n+1-\alpha)} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Selanjutnya, untuk setiap bilangan asli n, misalkan

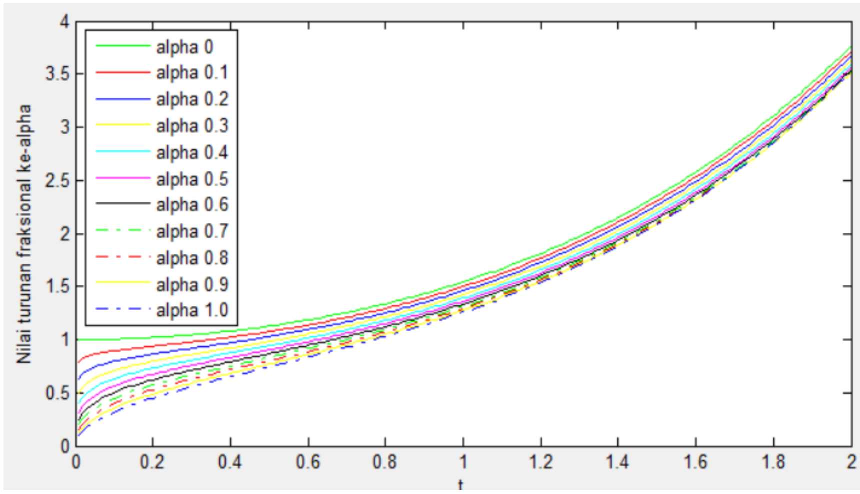
$$c_n = \frac{\Gamma(2n+1)}{(2n)!\, \Gamma(2n+1-\alpha)}$$

Dengan menggunakan **Teorema 2.3**, deret (4.2) konvergen untuk setiap t dengan

$$\begin{aligned} |t| &< \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{\Gamma(2n+1)}{(2n)!\, \Gamma(2n+1-\alpha)}}{\dfrac{\Gamma(2n+3)}{(2n+2)!\, \Gamma(2n+3-\alpha)}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\Gamma(2n+1)}{(2n)!\, \Gamma(2n+1-\alpha)} \times \frac{(2n+2)!\, \Gamma(2n+3-\alpha)}{\Gamma(2n+3)} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} |(2n+2-\alpha)(2n+1-\alpha)| \\ &= \infty \end{aligned}$$

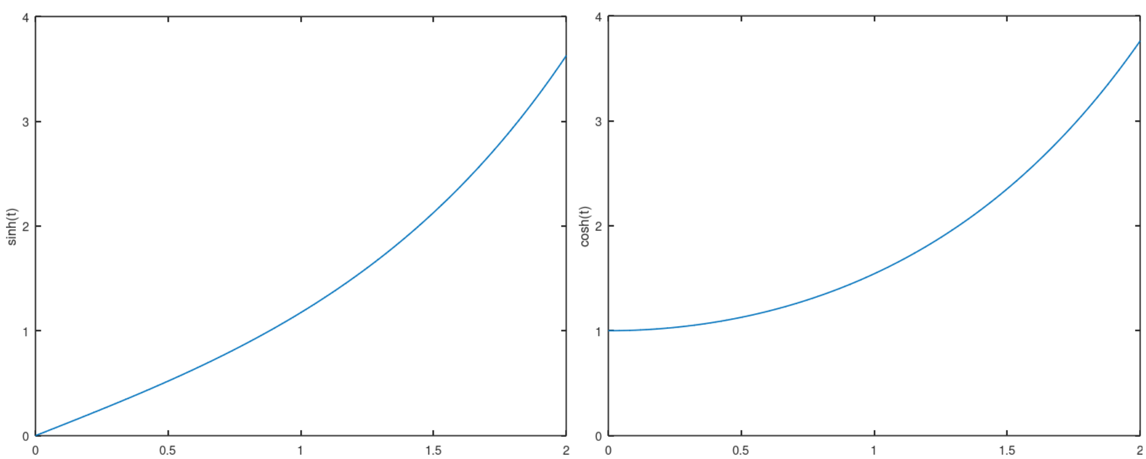
Selang konvergensinya adalah $(-\infty, \infty)$ atau deret tersebut konvergen untuk setiap bilangan real.

Hasil simulasi menggunakan *software* Matlab:



Gambar 3. Grafik $f(t) = D^{\alpha} \cosh t$

Diperoleh bahwa jika α mendekati 1, maka grafik mendekati turunan pertama dari fungsi cosinus hiperbolik yaitu $f(t) = D^1 \cosh t = \sinh t$, sedangkan jika α mendekati 0, maka grafik mendekati fungsi semula yaitu $f(t) = D^0 \cosh t = \cosh t$. Ilustrasinya seperti pada gambar berikut:



Gambar 4. Grafik $f(t) = \sinh t$ dan $f(t) = \cosh t$ secara berturut-turut.

4.3 Turunan Fraksional dari Fungsi Tangen Hiperbolik, Cotangen Hiperbolik, Secan Hiperbolik, dan Cosecan Hiperbolik

Turunan fraksional dari fungsi tangen hiperbolik, cotangen hiperbolik, secan hiperbolik, dan cosecan hiperbolik tidak bisa dilakukan melalui representasi deret Maclaurin karena bentuk umumnya yang sulit ditentukan. Solusi yang digunakan adalah melakukan pembagian antar deret Maclaurin. Pembagian dilakukan dengan menggunakan bantuan *software* Matlab. Hasilnya adalah deret yang disajikan dalam maksimal empat suku.

a. Turunan Fraksional dari Fungsi Tangen Hiperbolik

Turunan fraksional dari fungsi tangen hiperbolik dilakukan melalui pembagian deret Maclaurin dari fungsi sinus hiperbolik dengan deret Maclaurin dari fungsi cosinus hiperbolik, sehingga bisa kita tulis

$$D^{\alpha} \tanh t = D^{\alpha} \left(\frac{\sinh t}{\cosh t} \right)$$

Berdasarkan persamaan (2.1) dan (2.2), kita tulis

$$D^\alpha \tanh t \ = D^\alpha \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n}} \right)$$

Dengan bantuan *software* Matlab, diperoleh

$$D^\alpha \tanh t = D^\alpha \left(t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{2}{15} t^5 - \frac{17}{315} t^7 + \cdots \right)$$

Berdasarkan **Teorema 2.4**, maka

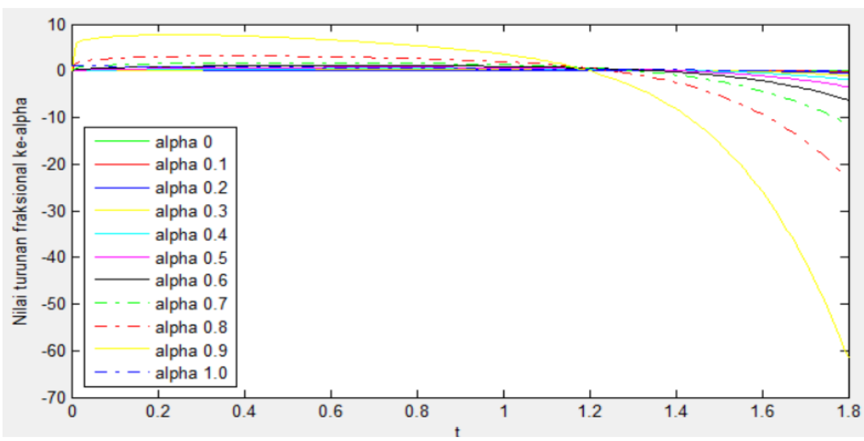
$$D^\alpha \tanh t = D^\alpha t - \frac{1}{3} D^\alpha t^3 + \frac{2}{15} D^\alpha t^5 - \frac{17}{315} D^\alpha t^7 + \cdots$$

Gunakan **Teorema 2.8**, diperoleh

$$D^\alpha \tanh t \ = \frac{t^{-\alpha+1}}{\Gamma(-\alpha+2)} - \frac{1}{3} \frac{3!\, t^{-\alpha+3}}{\Gamma(-\alpha+4)} + \frac{2}{15} \frac{5!\, t^{-\alpha+5}}{\Gamma(-\alpha+6)} - \frac{17}{315} \frac{7!\, t^{-\alpha+7}}{\Gamma(-\alpha+8)} + \cdots$$

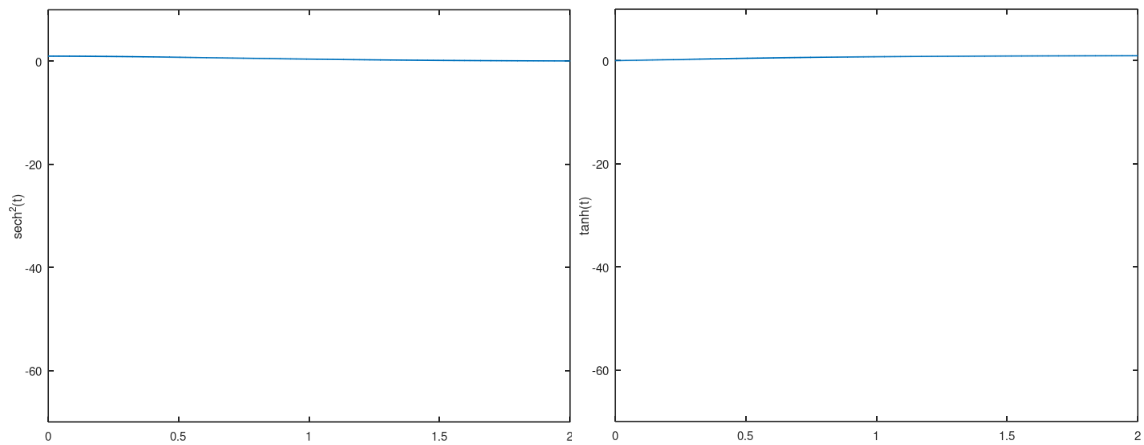
Selang konvergensi tidak perlu dicari karena turunan fraksionalnya tidak berupa deret kuasa.

Hasil simulasi menggunakan *software* Matlab:



Gambar 5. Grafik $f(t) = D^\alpha \tanh t$

Diperoleh bahwa jika α mendekati 1, maka grafik **tidak** mendekati turunan pertama dari fungsi tangen hiperbolik yaitu $f(t) = D^1 \tanh t = \operatorname{sech}^2 t$, begitu juga jika α mendekati 0, maka grafik **tidak** mendekati fungsi semula yaitu $f(t) = D^0 \tanh t = \tanh t$. Ilustrasinya seperti pada gambar berikut:



Gambar 6. Grafik $f(t) = \mathrm{sech}^2\, t$ dan $f(t) = \tanh t$ secara berturut-turut.

b. Turunan Fraksional dari Fungsi Cotangen Hiperbolik

Turunan fraksional dari fungsi cotangen hiperbolik dilakukan melalui pembagian deret Maclaurin dari fungsi cosinus hiperbolik dengan deret Maclaurin dari fungsi sinus hiperbolik, sehingga bisa kita tulis

$$D^\alpha \coth t = D^\alpha \left(\frac{\cosh t}{\sinh t}\right)$$

Berdasarkan persamaan (2.1) dan (2.2), kita tulis

$$D^\alpha \coth t = D^\alpha \left(\frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1}}\right)$$

Dengan bantuan *software* Matlab, diperoleh

$$D^\alpha \coth t = D^\alpha \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{3}t - \frac{1}{45}t^3 + \frac{2}{945}t^5 - \cdots\right)$$

Berdasarkan **Teorema 2.4**, maka

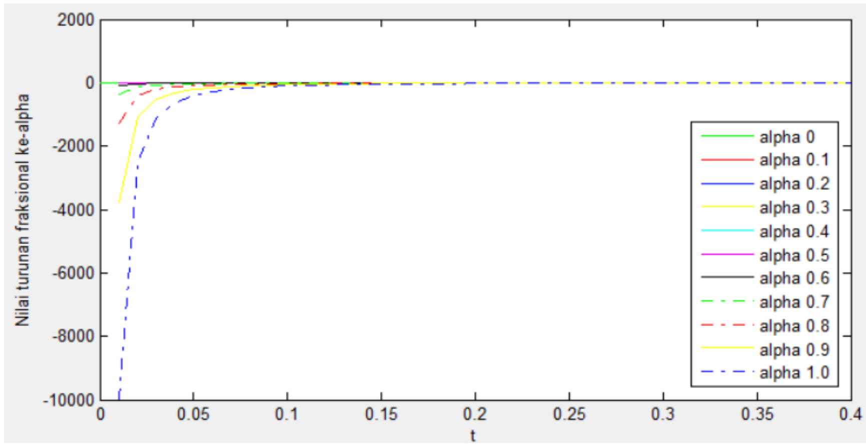
$$D^\alpha \coth t = D^\alpha t^{-1} + \frac{1}{3}D^\alpha t - \frac{1}{45}D^\alpha t^3 + \frac{2}{945}D^\alpha t^5 - \cdots$$

Perhatikan bahwa $D^\alpha t^{-1} = 0$.
Berdasarkan **Teorema 2.8**, diperoleh

$$D^\alpha \coth t \; = \frac{1}{3}\frac{t^{-\alpha+1}}{\Gamma(-\alpha+2)} - \frac{1}{45}\frac{3!\, t^{-\alpha+3}}{\Gamma(-\alpha+4)} + \frac{2}{945}\frac{5!\, t^{-\alpha+5}}{\Gamma(-\alpha+6)} - \cdots$$

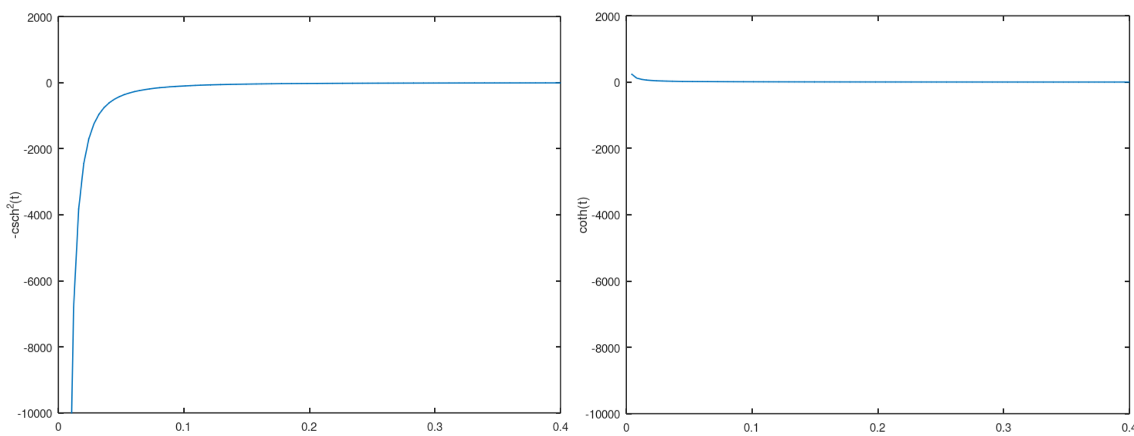
Selang konvergensi tidak perlu dicari karena turunan fraksionalnya tidak berupa deret kuasa.

Hasil simulasi menggunakan *software* Matlab:



Gambar 7. Grafik $f(t) = D^{\alpha} \coth t$

Diperoleh bahwa jika α mendekati 1, maka grafik mendekati turunan pertama dari fungsi cotangen hiperbolik yaitu $f(t) = D^1 \coth t = -\operatorname{csch}^2 t$, sedangkan jika α mendekati 0, maka grafik **tidak** mendekati fungsi semula yaitu $f(t) = D^0 \coth t = \coth t$. Ilustrasinya seperti pada gambar berikut:



Gambar 8. Grafik $f(t) = -\operatorname{csch}^2 t$ dan $f(t) = \coth t$ secara berturut-turut.

c. Turunan Fraksional dari Fungsi Secan Hiperbolik

Turunan fraksional dari fungsi secan hiperbolik dilakukan melalui pembagian 1 dengan deret Maclaurin dari fungsi cosinus hiperbolik, sehingga bisa kita tulis

$$D^{\alpha} \operatorname{sech} t = D^{\alpha} \left(\frac{1}{\cosh t} \right)$$

Berdasarkan persamaan (2.2), kita tulis

$$D^{\alpha} \operatorname{sech} t = D^{\alpha} \left(\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n}} \right)$$

Dengan bantuan *software* Matlab, diperoleh

$$D^{\alpha} \operatorname{sech} t = D^{\alpha} \left(1 - \frac{1}{2} t^2 + \frac{5}{54} t^4 - \frac{61}{720} t^6 + \cdots \right)$$

Berdasarkan **Teorema 2.4**, maka

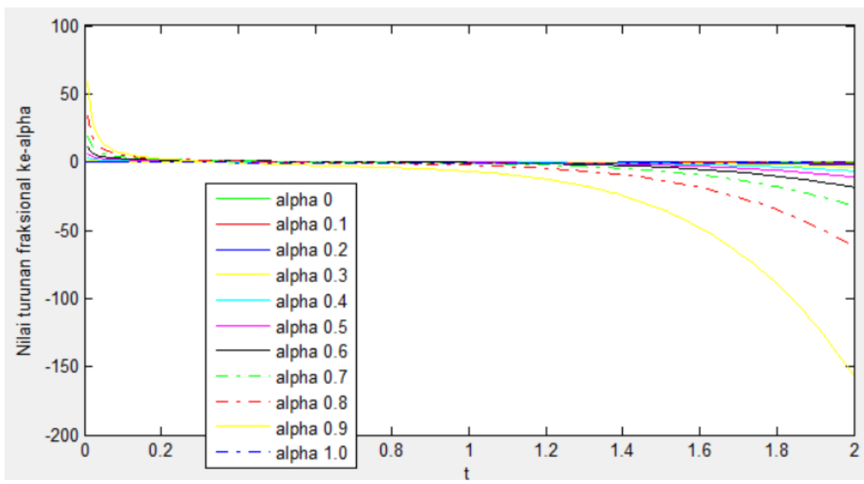
$$D^\alpha \operatorname{sech} t = D^\alpha 1 - \frac{1}{2} D^\alpha t^2 + \frac{5}{54} D^\alpha t^4 - \frac{61}{720} D^\alpha t^6 + \cdots$$

Gunakan **Teorema 2.8**, diperoleh

$$D^\alpha \operatorname{sech} t \; = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(-\alpha+1)} - \frac{1}{2}\frac{2!\, t^{-\alpha+2}}{\Gamma(-\alpha+3)} + \frac{5}{24}\frac{4!\, t^{-\alpha+4}}{\Gamma(-\alpha+5)} - \frac{61}{720}\frac{6!\, t^{-\alpha+6}}{\Gamma(-\alpha+7)} + \cdots$$

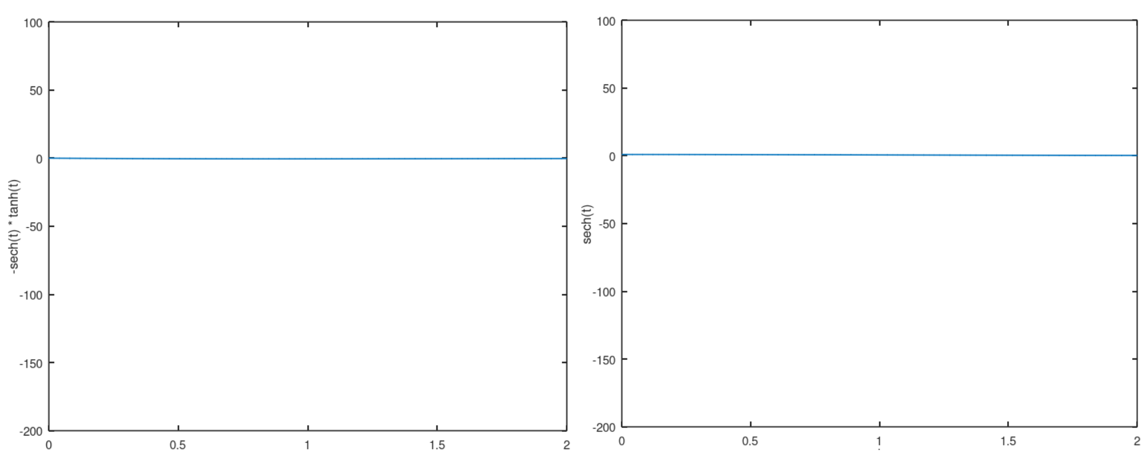
Selang konvergensi tidak perlu dicari karena turunan fraksionalnya tidak berupa deret kuasa.

Hasil simulasi menggunakan *software* Matlab:



Gambar 9. Grafik $f(t) = D^\alpha \operatorname{sech} t$

Diperoleh bahwa jika α mendekati 1, maka grafik **tidak** mendekati turunan pertama dari fungsi secan hiperbolik yaitu $f(t) = D^1 \operatorname{sech} t = -\operatorname{sech} t \tanh t$, begitu juga jika α mendekati 0, maka grafik **tidak** mendekati fungsi semula yaitu $f(t) = D^0 \operatorname{sech} t = \operatorname{sech} t$. Ilustrasinya seperti pada gamber berikut:



Gambar 10. Grafik $f(t) = -\operatorname{sech} t \tanh t$ dan $f(t) = \operatorname{sech} t$ secara berturut-turut.

d. Turunan Fraksional dari Fungsi Cosecan Hiperbolik

Turunan fraksional dari fungsi cosecan hiperbolik dilakukan melalui pembagian 1 dengan deret Maclaurin dari fungsi sinus hiperbolik, sehingga bisa kita tulis

$$D^{\alpha} \operatorname{csch} t = D^{\alpha}\left(\frac{1}{\sinh t}\right)$$

Berdasarkan persamaan (2.1), kita tulis

$$D^{\alpha} \operatorname{csch} t = D^{\alpha}\left(\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1}}\right)$$

Dengan bantuan *software* Matlab, diperoleh

$$D^{\alpha} \operatorname{csch} t = D^{\alpha}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{6}t + \frac{7}{360}t^3 - \frac{31}{15120}t^5 + \cdots\right)$$

Berdasarkan **Teorema 2.4**, maka

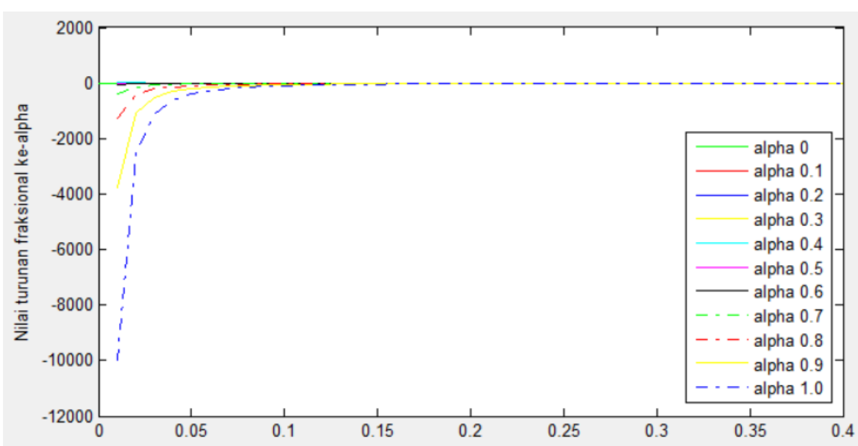
$$D^{\alpha} \operatorname{csch} t = D^{\alpha}t^{-1} - \frac{1}{6}D^{\alpha}t + \frac{7}{360}D^{\alpha}t^3 - \frac{31}{15120}D^{\alpha}t^5 + \cdots$$

Perhatikan bahwa $D^{\alpha}t^{-1} = 0$.
Gunakan **Teorema 2.8**, diperoleh

$$D^{\alpha} \operatorname{csch} t = -\frac{1}{6}\frac{t^{-\alpha+1}}{\Gamma(-\alpha+2)} + \frac{7}{360}\frac{3!\, t^{-\alpha+3}}{\Gamma(-\alpha+4)} - \frac{31}{15120}\frac{5!\, t^{-\alpha+5}}{\Gamma(-\alpha+6)} + \cdots$$

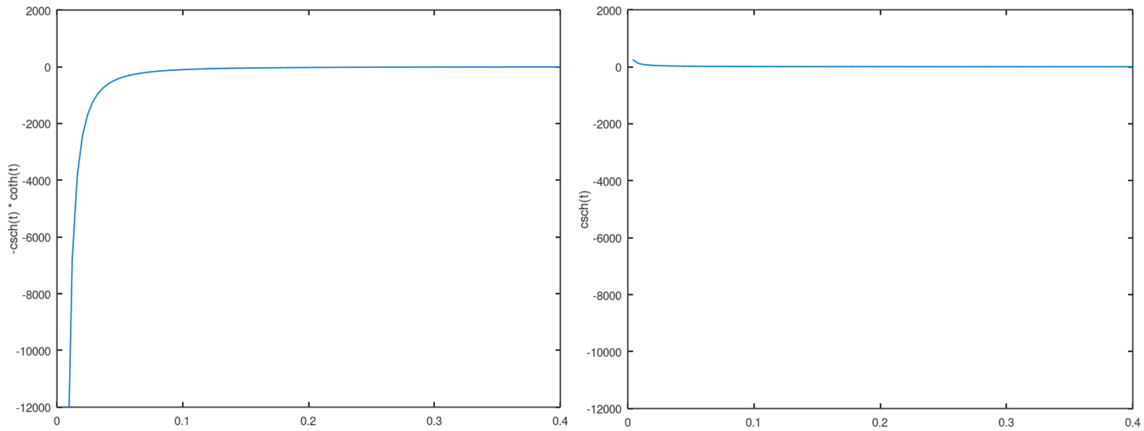
Selang konvergensi tidak perlu dicari karena turunan fraksionalnya tidak berupa deret kuasa.

Hasil simulasi menggunakan *software* Matlab:



Gambar 11. Grafik $f(t) = D^{\alpha} \operatorname{csch} t$

Diperoleh bahwa jika α mendekati 1, maka grafik mendekati turunan pertama dari fungsi cosecan hiperbolik yaitu $f(t) = D^1 \operatorname{sech} t = -\operatorname{csch} t \coth t$, sedangkan jika α mendekati 0, maka grafik **tidak** mendekati fungsi semula yaitu $f(t) = D^0 \operatorname{csch} t = \operatorname{csch} t$. Ilustrasinya seperti pada gambar berikut:



Gambar 12. Grafik $f(t) = -\operatorname{csch} t \coth t$ dan $f(t) = \operatorname{csch} t$ secara berturut-turut.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan analisis dan simulasi yang telah dikerjakan, disimpulkan bahwa

i. Turunan fraksional dari fungsi hiperbolik dapat direpresentasikan dalam bentuk deret atau jumlahan dari turunan-turunan fraksional fungsi kuasa. Ini berarti bahwa turunan fraksional fungsi kuasa merupakan komponen utama dalam menyelesaikan penelitian ini.

ii. Metode yang digunakan dapat diterapkan untuk mencari turunan fraksional dari fungsi-fungsi yang mempunyai turunan sampai tak berhingga kali.

iii. Pada fungsi sinus hiperbolik dan cosinus hiperbolik berlaku bahwa jika α mendekati 1, maka grafik mendekati turunan pertama dari fungsi tersebut, sedangkan jika α mendekati 0, maka grafik mendekati fungsi semula.

iv. Pada fungsi tangen hiperbolik dan secan hiperbolik berlaku bahwa jika α mendekati 1, maka grafik tidak mendekati turunan pertama dari fungsi tersebut, begitu juga jika α mendekati 0, maka grafik tidak mendekati fungsi semula.

v. Pada fungsi cotangen hiperbolik dan cosecan hiperbolik berlaku bahwa jika α mendekati 1, maka grafik mendekati turunan pertama dari fungsi tersebut, sedangkan jika α mendekati 0, maka grafik tidak mendekati fungsi semula.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Alquran, M., 2023. The Amazing Fractional Maclaurin Series for Solving Different Types of Fractional Mathematical Problems that Arise in Physics and Engineering. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, *7*, 100506. https://doi.org/10.1016/j.padiff.2023.100506

[2] Banerjee, J., Ghosh, U., Sarkar, S., & Das, S., 2017. A Study of Fractional Schrödinger Equation Composed of Jumarie Fractional Derivative. *Pramana*, *88*(4), 70. https://doi.org/10.1007/s12043-017-1368-1

[3] Daraghmeh, A., Qatanani, N., & Saadeh, A., 2020. Numerical Solution of Fractional Differential Equations. *Applied Mathematics*, *11*(11), 1100–1115. https://doi.org/10.4236/am.2020.1111074

[4] Das, S., 2011. *Functional Fractional Calculus* (Vol. 1). Springer.

[5] Gatzke, E., 2021. Introduction to MATLAB. In *Introduction to Modeling and Numerical Methods for Biomedical and Chemical Engineers* (pp. 99–121). Springer.
[6] Hilfer, R., Luchko, Y., & Tomovski, Z., 2009. Operational Method for The Solution of Fractional Differential Equations with Generalized Riemann-Liouville Fractional Derivatives. *Fract. Calc. Appl. Anal*, *12*(3), 299–318.
[7] Miller, K. S., & Ross, B., 1993. An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. John Wiley, Inc.
[8] Petráš, I., 2011. *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*. Springer Science & Business Media.
[9] Podlubny, I., 1999. *Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering*. Academic press New York.
[10] Stewart, J., Clegg, D., & Watson, S., 2021. *Calculus: Early Transcendentals*. Cengage Learning.
[11] Yang, X.-J., Gao, F., & Ju, Y., 2020. *General Fractional Derivatives with Applications in Viscoelasticity*. Academic Press.
[12] Zhang, T., Yang, Z.-H., Qi, F., & Du, W.-S., 2024. Some Properties of Normalized Tails of Maclaurin Power Series Expansions of Sine and Cosine. *Fractal and Fractional*, *8*(5), 257. https://doi.org/10.3390/fractalfract8050257
[13] Zhou, Y., 2024. *Basic Theory of Fractional Differential Equations Third Edition*. World Scientific Publishing.